И. П. НАТАНСОН

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

И. П. НАТАНСОН

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для высших учебных заведений



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1974

517.2
Н 33
УДК 517.5

Теория функций вещественной переменной. И. П. Натансон, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1974.

Книга посвящена, в основном, функциям одной вещественной переменной. Лишь в трех главах (XI—XIII) рассматриваются функции многих переменных и функции множества.

Книга содержит большое количество упражнений, и сравнительно легкие, доступные широкому кругу читателей, и значительно более трудные, которые могут служить хорошим материалом для студенческих математических кружков.

Рис. 9.

Исидор Павлович Натансон

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

М., 1974 г., 480 стр. с илл.

Редактор *В. В. Абгарян*
Техн. редактор *Л. В. Лихачева*
Корректор *А. Л. Ипатова*

Сдано в набор 20/II 1974 г. Подписано к печати 26/VI 1974 г. Бумага 60×90[1]/16, тип. № 3. Физ. печ. л. 30. Условн. печ. л. 30. Уч.-изд. л. 31,31. Тираж 37 000 экз. Цена книги 1 р. 24 к. Заказ № 1273.

Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26,

Н $\frac{20203-099}{053(02)-74}$ 11-74

ОГЛАВЛЕНИЕ

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Эта книга представляет собою руководство, написанное применительно к действующим учебным программам наших университетов. Имея в виду все возрастающее значение теории функций в системе образования математиков, я включил в книгу (мелким шрифтом) также и ряд вопросов, выходящих за пределы программы.

Теория функций вещественной переменной излагается в университете, начиная с третьего курса. Поэтому у читателя предполагается свободное владение основными понятиями анализа: иррациональные числа, теория пределов, важнейшие свойства непрерывных функций, производные, интегралы, ряды считаются известными в объеме любого обстоятельного курса дифференциального и интегрального исчисления.

Большинство глав книги сопровождается упражнениями. Читатель должен быть предупрежден, что они, как правило, довольно трудны и требуют подчас весьма значительного напряжения. Тем не менее, лицам, желающим основательно усвоить предмет, я настоятельно советую постараться решить хотя бы часть приводимых задач.

В своем настоящем виде эта книга является переработкой моей более ранней книги „Основы теории функций вещественной переменной“, вышедшей небольшим тиражом в 1941 году в издании Ленинградского университета и в скором времени полностью разошедшейся. Мысль о переиздании этой, более ранней книги возникла уже довольно давно и отчасти была осуществлена издательством „Радянська школа“, выпустившим расширенный украинский перевод книги, выполненный доцентом Киевского университета С. И. Зуховицким.

Профессор Е. Я. Ремез, бывший рецензентом упомянутого выше украинского перевода, сделал по поводу него ряд ценных указаний, которыми я воспользовался и при подготовке настоящего издания. Кроме того, я весьма обязан профессорам Н. К. Бари, Д. К. Фаддееву и, особенно, Г. М. Фихтенгольцу за многочисленные советы и указания. Искренно благодарю всех названных лиц.

3 декабря 1949 г. *И. Натансон*

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Важнейшие отличия настоящего издания от предыдущего таковы:

1. Изложен вопрос о замене переменной в интегралах Лебега (для случая, когда старая переменная есть монотонная функция новой).

2. Сообщены некоторые сведения о выпуклых функциях, включая неравенства Иенсена и (в „Добавлении“) Юнга.

3. Доказаны теоремы Кантора и Дю-Буа-Реймонда — Валле-Пуссена и некоторые другие результаты, также относящиеся к вопросу об единственности разложения функции в тригонометрический ряд.

4. Изложена теория интегралов Данжуа — Перрона и дано понятие об интегралах Данжуа — Хинчина.

5. Рассмотрен вопрос о переносе основных результатов книги на функции с неограниченными областями задания[1]).

6. Изложен (в „Добавлении“) вопрос о спрямлении явно заданной кривой.

Чтобы избежать чрезмерного увеличения объема книги, я исключил теорему Хаусдорфа (о неразрешимости „легкой“ задачи теории измерения), а также главу XVII старого издания (посвященную обзору отечественных работ по теории функций).

При подготовке нового издания я получил много ценных указаний от проф. Г. М. Фихтенгольца. Ряд полезных советов мне дали редактор книги доц. Г. П. Акилов и мой сын Г. И. Натансон. Благодарю названных лиц.

8 декабря 1956 г. *И. Натансон*

---

[1]) При написании соответствующей главы я использовал те добавления, которые внес в американское издание этой книги редактор перевода проф. Хьюитт (E. Hewitt).

ГЛАВА I

БЕСКОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА

§ 1. Операции над множествами

Основой теории функций вещественной переменной служит так называемая „теория множеств". Эта дисциплина имеет сравнительно небольшую историю: первые серьезные работы в этой области, принадлежащие Г. Кантору, появились в конце прошлого века. Тем не менее, в настоящее время теория множеств представляет собою весьма обширную область математики. В нашем курсе, для которого теория множеств имеет лишь вспомогательное значение, мы ограничиваемся только элементами этой дисциплины, отсылая читателя, желающего углубить свои познания по теории множеств, к книгам П. С. Александрова и Ф. Хаусдорфа. [1])

Понятие множества является одним из основных математических понятий и не поддается точному определению. Поэтому мы ограничимся лишь описанием этого понятия. Множеством называется собрание, совокупность, коллекция вещей, объединенных по какому-нибудь признаку. Например, можно говорить о множестве всех натуральных чисел, множестве всех точек прямой, множестве всех многочленов с вещественными коэффициентами и т. п.

Говоря о множестве, мы считаем, что относительно всякой вещи верно одно и только одно из двух: эта вещь либо входит в наше множество в качестве его элемента, либо не входит.

Если A есть некоторое множество, а x — вещь, то факт принадлежности вещи x множеству A обозначается так

$$x \in A.$$

Если же x не входит в A, то это записывают так:

$$x \overline{\in} A.$$

Например, если R есть множество всех рациональных чисел, то

$$\frac{3}{4} \in R, \quad \sqrt{2} \overline{\in} R.$$

[1]) П. С. Александров, Введение в общую теорию множеств и функций, Гостехиздат, 1948; Ф. Хаусдорф, Теория множеств, ОНТИ, 1937.

Само множество никогда не является своим элементом:

$$A \overline{\in} A.$$

В целях общности и простоты формулировок полезно ввести так называемое „*пустое множество*", которое вовсе лишено элементов. Например, множество вещественных корней уравнения $x^2+1=0$ пусто. Пустое множество обозначается символом 0, причем опасность смешения с числом „нуль" в дальнейшем не возникает, ибо из контекста будет ясно, о чем идет речь. Иногда, впрочем, пустое множество обозначают через Λ.

Наряду с пустым множеством нам придется иметь дело с „*одноэлементными*" множествами, т. е. множествами, состоящими только из одного элемента. Например, множество корней уравнения $2x-6=0$ состоит из одного элемента — числа 3. Следует остерегаться смешения одноэлементного множества с его единственным элементом.

Если общее имя элементов множества A есть x, то иногда пишут

$$A=\{x\}.$$

Если же возможно выписать обозначения всех элементов множества, то пишут их подряд и заключают в фигурные скобки, например

$$A=\{a,\ b,\ c,\ d\}.$$

Определение 1. Пусть A и B два множества. Если всякий элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что A есть *часть* (или *подмножество*) множества B и пишут

$$A \subset B \quad \text{или} \quad B \supset A.$$

Подобное соотношение называется *включением*.

Пусть, например, N есть множество всех натуральных, а R — множество всех рациональных чисел, тогда

$$N \subset R.$$

Ясно, что всякое множество есть часть самого себя

$$A \subset A.$$

Пустое множество есть часть всякого множества A. Для того чтобы это утверждение стало вполне ясным, достаточно высказать определение 1 в такой форме: ни один элемент, не входящий в B, не входит и в A.

Определение 2. Пусть A и B два множества. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то говорят, что множества A и B *равны* и пишут

$$A=B.$$

Например, если $A=\{2,\ 3\}$, а B есть множество корней уравнения $x^2-5x+6=0$, то $A=B$.

Определение 3. Пусть A и B два множества. Множество S, состоящее из всех элементов обоих множеств A и B и не содержащее никаких других элементов, называется *суммой* множеств A и B и обозначается так:

$$S = A + B, \quad \text{или} \quad S = A \cup B.$$

Подобным же образом определяется сумма n множеств A_1, A_2, ..., A_n, сумма последовательности множеств A_1, A_2, A_3, ..., и вообще сумма множества множеств A_ξ, отмеченных для отличия друг от друга значком ξ, принимающим какие-нибудь различные значения. Соответствующие обозначения таковы:

$$S = A_1 + A_2 + \ldots + A_n, \quad S = \sum_{k=1}^{n} A_k,$$

$$S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n, \quad \text{или} \quad S = \bigcup_{k=1}^{n} A_k,$$

$$S = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots, \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} A_k,$$

$$S = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots, \quad \text{или} \quad S = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

$$S = \sum_{\xi} A_\xi, \quad \text{или} \quad S = \bigcup_{\xi} A_\xi.$$

Например[1]), если S есть множество всех положительных чисел, то

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1, k].$$

Если $A \subset B$, то очевидно

$$A + B = B,$$

в частности

$$A + A = A.$$

Определение 4. Пусть A и B два множества. Множество P, состоящее из всех элементов, общих обоим множествам A и B, и не содержащее никаких других элементов, называется *пересечением* множеств A и B и обозначается так:

$$P = AB, \quad \text{или} \quad P = A \cap B.$$

---

[1]) Как обычно, при $a \leqslant b$, мы обозначаем через (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ множества чисел x, удовлетворяющих соответственно неравенствам $a < x < b$, $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant x < b$, $a < x \leqslant b$. Каждое из этих множеств называется промежутком, а a и b его концами. Промежуток (a, b) называется также интервалом, а $[a, b]$ отрезком, или сегментом. Промежутки $[a, b)$ и $(a, b]$ называются полусегментами.

Например, если $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{3, 4, 5, 6\}$, то

$$AB=\{3, 4\}.$$

Сходным образом определяется пересечение n множеств A_1, A_2, ..., A_n, последовательности множеств A_1, A_2, A_3, ... и вообще множества множеств A_ξ, отмеченных для отличия друг от друга значком ξ. Соответствующие обозначения таковы:

$$P=A_1A_2 \ldots, A_n, \quad P=\prod_{k=1}^{n} A_k,$$

$$P=A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n, \quad \text{или} \quad P=\bigcap_{k=1}^{n} A_k,$$

$$P=A_1A_2A_3 \ldots, \quad P=\prod_{k=1}^{\infty} A_k,$$

$$P=A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots, \quad \text{или} \quad P=\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k,$$

$$P=\prod_{\xi} A_\xi, \quad \text{или} \quad P=\bigcap_{\xi} A_\xi.$$

Например,

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)=\{0\} \text{ (одноэлементное множество)}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(0, \frac{1}{k}\right)=0 \text{ (пустое множество).}$$

Если $A \subset B$, то очевидно $AB=A$ и, в частности, $AA=A$.

То обстоятельство, что множества A и B не имеют общих элементов, можно записать так:

$$AB=0.$$

В этом случае говорят также, что множества A и B *«не пересекаются»*.

Теорема 1. *Пусть A некоторое множество и $\{E_\xi\}$ множество множеств. Тогда*

$$A\sum_{\xi} E_\xi=\sum_{\xi} AE_\xi.$$

Доказательство. Положим $S=A\sum_{\xi} E_\xi$, $T=\sum_{\xi} AE_\xi$.

Пусть $x \in S$. Это значит, что $x \in A$ и что $x \in \sum_{\xi} E_\xi$. Последнее же соотношение обозначает, что $x \in E_{\xi_0}$. Но тогда $x \in AE_{\xi_0}$ и, тем более, $x \in T$. Итак, $S \subset T$.

Пусть теперь, наоборот, $x \in T$. Это значит, что $x \in AE_{\xi_0}$. Иначе говоря, $x \in A$ и $x \in E_{\xi_0}$, но из того, что $x \in E_{\xi_0}$, следует,

что $x \in \sum_{\xi} E_{\xi}$, а тогда (поскольку $x \in A$) $x \in S$. Значит, $T \subset S$, что вместе с доказанным выше дает $S = T$.

Из доказанной теоремы в частности вытекает, что

$$A(B+C) = AB + AC.$$

Определение 5. Пусть A и B два множества. Множество R, состоящее из всех тех элементов множества A, которые не входят в множество B, и только из этих элементов, называется *разностью* множеств A и B и обозначается так:

$$R = A - B \text{ или } R = A \setminus B.$$

Например, если $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, то

$$A - B = \{1, 2\}.$$

Теорема 2. *Если A, B, C три множества, то*

$$A(B-C) = AB - AC.$$

Доказательство предоставляем читателю.

Бросается в глаза аналогия между свойствами операций над множествами и свойствами арифметических действий. Однако эта аналогия не полна. Мы уже видели, что $A + A = A$, $AA = A$; этих соотношений в арифметике, вообще говоря, нет. Приведем еще один пример нарушения указанной аналогии.

Теорема 3. *Соотношение*

$$(A - B) + B = A \tag{1}$$

верно тогда и только тогда, когда $B \subset A$.

Доказательство. Пусть (1) верно. Так как слагаемое всегда есть часть суммы, то $B \subset A$. Допустим теперь, что $B \subset A$. Тогда очевидно $(A - B) + B \subset A$. Но обратное включение $(A - B) + B \supset A$, как легко видеть, верно без всяких ограничений, откуда и следует (1).

§ 2. Взаимнооднозначное соответствие

Пусть A и B два конечных множества. Естественно поставить вопрос о том, одинаково или нет количество элементов в этих множествах.

Для того, чтобы решить этот вопрос, мы можем *сосчитать* элементы каждого из множеств и затем посмотреть, одинаковы или нет получаемые в результате счета числа.

Однако поставленный вопрос можно решить и не считая элементов наших множеств. Пусть, например, A есть множество латинских букв $A = \{a, b, c, d, e\}$, а B множество греческих букв $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$.

Если мы расположим элементы этих множеств так:

$A:$	a	b	c	d	e
$B:$	α	β	γ	δ	ε

то без всяких подсчетов видим, что A и B имеют одинаковое количество элементов.

Что характерно для этого способа сравнения множеств? Характерно то, что для каждого элемента одного множества указывается один и только один соответствующий ему элемент другого множества и обратно.

Сила этого второго способа сравнения состоит в том, что его можно применять и тогда, когда сравниваемые множества *бесконечны*. Например, если N есть множество всех натуральных чисел, а M множество чисел вида $1/n$, то второй способ сравнения сразу показывает, что «количество» элементов в множествах N и M одинаково; чтобы убедиться в этом, достаточно расположить наши множества так:

$N:$	1	2	3	4	...
$M:$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...

и считать взаимно соответствующими числа n и $1/n$.

Перейдем теперь к точным определениям.

Определение 1. Пусть A и B два множества. Правило φ, которое каждому элементу a множества A соотносит один и только один элемент b множества B, причем каждый элемент $b \in B$ оказывается соотнесенным одному и только одному $a \in A$, называется *взаимнооднозначным соответствием* между множествами A и B.

Определение 2. Если между множествами A и B можно установить взаимнооднозначное соответствие, то говорят, что эти множества *эквивалентны* или что они имеют одинаковую *мощность*, и пишут

$$A \sim B.$$

Легко понять, что два *конечных* множества оказываются эквивалентными тогда и только тогда, когда они состоят из одинакового числа элементов, так что понятие одинаковой мощности есть прямое обобщение понятия одинаковой численности конечных множеств.

Приведем несколько примеров попарно эквивалентных множеств.

Пусть A и B суть множества точек на двух параллельных сторонах прямоугольника (рис. 1). Легко понять, что $A \sim B$.

Пусть, далее, A и B суть множества точек двух концентрических окружностей (рис. 2). И здесь очевидно $A \sim B$.

Этот пример менее тривиален, чем предыдущий. Если мы «распрямим» наши окружности, то одна из них превратится в более короткий прямолинейный отрезок, чем другая. Казалось бы, что на более длинном отрезке и точек «больше». Мы видим, что это не так.

Вот пример, где этот парадокс еще более ярок. Пусть A множество точек гипотенузы, а B множество точек катета прямоугольного треугольника. Как видно из рис. 3, $A \sim B$, хотя

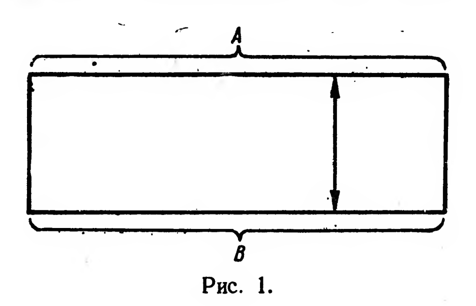


Рис. 1.

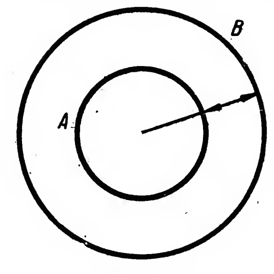


Рис. 2.

катет и короче гипотенузы. Если мы наложим катет на гипотенузу, то множество B окажется *частью* множества A и притом отличной от самого A. Такую часть мы будем называть *правильной* частью множества (т. е. B есть правильная часть A, если $B \subset A$, но $B \neq A$). Таким образом, в последнем примере мы сталкиваемся с множеством, у которого есть эквивалентная ему правильная часть. Само собою ясно, что конечное множество не имеет эквивалентных ему правильных частей. Стало быть, именно бесконечности множества A мы обязаны этим его удивительным свойством. Ниже мы убедимся, что *всякое* бесконечное множество имеет эквивалентные правильные части, а пока иллюстрируем этот факт еще одним примером.

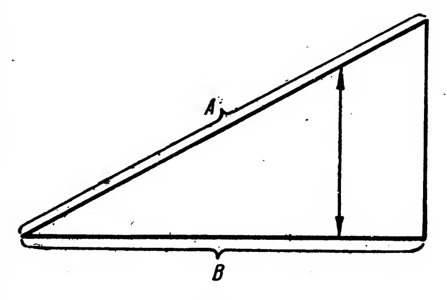


Рис. 3.

Пусть N множество всех натуральных, а M — всех четных чисел: $N = \{n\}$, $M = \{2n\}$.

Располагая эти множества так:

$$\frac{N: |1|2|3|4|5|\ldots}{M: |2|4|6|8|10|\ldots}$$

мы непосредственно убеждаемся в их эквивалентности, хотя M есть правильная часть N: «четных чисел столько же, сколько всех натуральных».

Приведем некоторые простые свойства понятия эквивалентности, доказательства которых можно предоставить читателю.

Теорема 1. a) *Всегда* $A \sim A$.

b) *Если* $A \sim B$, *то* $B \sim A$.

c) *Если* $A \sim B$, *а* $B \sim C$, *то* $A \sim C$.

Теорема 2. *Пусть* $A_1, A_2, A_3, \ldots$ *и* $B_1, B_2, B_3, \ldots$ *две последовательности множеств. Если множества* A_n *не пересекаются между собою, а множества* B_n *между собою*:

$$A_n A_{n'} = 0, \quad B_n B_{n'} = 0 \quad (n \neq n'),$$

и если при каждом n

$$A_n \sim B_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sim \sum_{k=1}^{\infty} B_k.$$

§ 3. Счетные множества

Определение 1. Пусть N множество всех натуральных чисел

$$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Всякое множество A, эквивалентное множеству N, называется *исчислимым*, или *счетным*.

Иногда говорят также, что множество A «*имеет мощность a*». Очевидно, все счетные множества эквивалентны между собою.

Вот несколько примеров счетных множеств:

$$\begin{aligned} A &= \{1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \ldots, \quad n^2, \ldots\}, \\ B &= \{1, \quad 8, \quad 27, \quad 64, \ldots, \quad n^3, \ldots\}, \\ C &= \{2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \ldots, \quad 2n, \ldots\}, \\ D &= \{1, \quad 1/2, \quad 1/3, \quad 1/4, \ldots, \quad 1/n, \ldots\}. \end{aligned}$$

Теорема 1. *Для того чтобы множество* A *было счетным, необходимо и достаточно, чтобы его можно было «перенумеровать», т. е. представить в форме последовательности*:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}. \tag{1}$$

Доказательство. Если множество A представлено в форме (1), то достаточно каждому его элементу a_n соотнести индекс n этого элемента, чтобы получить взаимнооднозначное соответствие между A и N, так что A счетно.

Обратно, если A счетно, то существует взаимнооднозначное соответствие φ между A и N. Достаточно обозначить через a_n тот из элементов множества A, который в соответствии φ отвечает числу n, чтобы получить представление A в форме (1).

Теорема 2. *Из всякого бесконечного множества A можно выделить счетное подмножество D.*

Доказательство. Пусть A бесконечное множество. Выделим из A произвольный элемент a_1. Так как A бесконечно, то оно не исчерпывается выделением элемента a_1, и мы можем выделить элемент a_2 из оставшегося множества $A - \{a_1\}$. По тем же соображениям множество $A - \{a_1, a_2\}$ не пусто, и мы можем из него выделить элемент a_3. Ввиду бесконечности множества A мы можем продолжать этот процесс неограниченно, в результате чего получим последовательность выделенных элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, которая и образует искомое множество D.

Теорема 3. *Всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно.*

Доказательство. Пусть A счетное множество, а B его бесконечное подмножество. Расположим A в форме последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ и будем перебирать один за другим элементы A в порядке их номеров. При этом мы время от времени будем встречать элементы множества B, и каждый элемент B рано или поздно встретится нам. Соотнося каждому элементу B номер «встречи» с ним, мы перенумеруем множество B, причем, в силу бесконечности его, нам придется на эту нумерацию израсходовать все натуральные числа.

Следствие. *Если из счетного множества A удалить конечное подмножество M, то оставшееся множество $A - M$ будет счетным.*

Теорема 4. *Сумма конечного множества и счетного множества без общих элементов есть счетное множество.*

Доказательство. Пусть

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \quad B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\},$$

причем $AB = 0$. Если $A + B = S$, то S можно представить в форме

$$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, b_3, \ldots\},$$

после чего становится очевидной возможность перенумеровать S.

Условие отсутствия общих элементов как в этой, так и в следующих теоремах могло бы быть опущено.

Теорема 5. *Сумма конечного числа попарно не пересекающихся счетных множеств есть счетное множество.*

Доказательство. Проведем доказательство для случая трех слагаемых множеств; из контекста будет ясна полная общность рассуждения.

Пусть A, B, C три счетных множества:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}, \quad B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\},$$
$$C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots\}.$$

Тогда сумму $S = A + B + C$ можно представить в форме последовательности $S = \{a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, \ldots\}$, и счетность ее очевидна.

Теорема 6. *Сумма счетного множества попарно не пересекающихся конечных множеств есть счетное множество.*

Доказательство. Пусть A_k $(k=1, 2, 3, \ldots)$ суть попарно не пересекающиеся конечные множества:

$$A_1=\{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_{n_1}^{(1)}\},$$
$$A_2=\{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_{n_2}^{(2)}\},$$
$$A_3=\{a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, \ldots, a_{n_3}^{(3)}\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Для того чтобы расположить сумму их S в форме последовательности, достаточно выписать подряд все элементы множества A_1, затем элементы A_2 и так далее.

Теорема 7. *Сумма счетного множества попарно не пересекающихся счетных множеств есть счетное множество.*

Доказательство. Пусть множества A_k $(k=1, 2, 3, \ldots)$ попарно не пересекаются и счетны. Запишем эти множества так:

$$A_1=\{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \ldots\},$$
$$A_2=\{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, \ldots\},$$
$$A_3=\{a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, a_3^{(3)}, \ldots\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Если мы выпишем элемент $a_1^{(1)}$, затем оба элемента $a_2^{(1)}$ и $a_1^{(2)}$, у которых сумма верхнего и нижнего индексов равна 3, затем те элементы, у которых эта сумма равна 4, и т. д., то сумма $S=\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ окажется представленной в форме последовательности

$$S=\{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_1^{(2)}, a_3^{(1)}, a_2^{(2)}, a_1^{(3)}, a_4^{(1)}, \ldots\},$$

откуда и следует ее счетность.

Используя символ a как обозначение мощности счетного множества, мы можем доказанные теоремы изобразить с помощью мнемонических схем:

$$a-n=a, \quad a+n=a, \quad a+a+\ldots+a=na=a,$$
$$n_1+n_2+n_3+\ldots=a, \quad a+a+a+\ldots=aa=a.$$

Теорема 8. *Множество R всех рациональных чисел счетно.*

Доказательство. Множество дробей вида p/q с данным знаменателем q, т. е. множество $1/q$, $2/q$, $3/q$, ... очевидно счетно. Но знаменатель может принять также счетное множество натуральных значений 1, 2, 3, ... Значит, в силу теоремы 7, множество дробей p/q счетно; удаляя из него все сократимые дроби и применяя теорему 3, убеждаемся в счетности множества R_+ всех *положительных* рациональных чисел. Так как множество R_- отрицательных рациональных чисел очевидно эквивалентно множеству R_+, то счетно и оно, а тогда счетно и множество R, ибо $R=R_-+\{0\}+R_+$.

Следствие. *Множество рациональных чисел любого сегмента* $[a, b]$ *счетно.*

Теорема 9. *Если к бесконечному множеству* M *прибавить конечное или счетное множество* A *новых элементов, то это не изменит его мощности, т. е.*

$$M + A \sim M.$$

Доказательство. Выделим, пользуясь теоремой 2, из M счетное подмножество D и пусть $M - D = P$, тогда

$$M = P + D, \quad M + A = P + (D + A).$$

Так как $P \sim P$, $D + A \sim D$ (теоремы 4 и 5), то $M + A \sim M$.

Теорема 10. *Если бесконечное множество* S *несчетно, а* A *его конечная или счетная часть, то*

$$S - A \sim S.$$

Доказательство. Множество $M = S - A$ не может быть конечным, ибо иначе исходное множество S было бы конечным или счетным. Но тогда, в силу теоремы 9, будет $M + A \sim M$, а это и значит, что $S \sim S - A$.

Следствие. *Всякое бесконечное множество содержит эквивалентную правильную часть.*

Действительно, удаляя из бесконечного множества произвольное конечное подмножество, мы, согласно теоремам 3 и 10, не изменяем его мощности.

Как уже отмечалось, конечное множество не обладает указанным свойством. Это обстоятельство позволяет дать (принадлежащее Р. Дедекинду) положительное определение бесконечного множества.

Определение 2. Множество называется *бесконечным*, если оно содержит эквивалентную правильную часть.

В заключение докажем следующую, весьма общую теорему:

Теорема 11. *Если элементы множества* A *определяются* n *значками, каждый из которых, независимо от других, пробегает счетное множество значений*

$$A = \{a_{x_1, x_2, \ldots, x_n}\} \qquad (x_k = x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \ldots; \ k = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

то множество A *счетно.*

Доказательство. Докажем теорему методом математической индукции.

Теорема очевидна, если $n = 1$, т. е. имеется только один значок. Допустим, что теорема справедлива для $n = m$, и покажем, что она справедлива для $n = m + 1$.

Итак, пусть $A = \{a_{x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}}\}$.

Обозначим через A_i множество тех элементов A, для которых $x_{m+1} = x_{m+1}^{(i)}$, где $x_{m+1}^{(i)}$ одно из возможных значений $(m+1)$-го значка, т. е. положим $A_i = \left\{a_{x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}^{(i)}}\right\}$.

В силу сделанного допущения множество A_i счетно, а так как $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$, то счетно и A. Теорема доказана.

Вот несколько предложений, вытекающих из этой теоремы:

1) Множество точек (x, y) плоскости, у которых обе координаты рациональны, счетно.

2) Множество комплексов $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, состоящих из k натуральных чисел, счетно.

Более интересным является следующий факт:

3) Множество многочленов $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ с целыми коэффициентами счетно.

В самом деле, это непосредственно следует из теоремы 11, если рассматривать только многочлены фиксированной степени n, и для завершения доказательства следует применить теорему 7.

Так как каждый многочлен имеет конечное число корней, то из доказанного предложения вытекает следующая теорема.

Теорема 12. *Множество алгебраических чисел счетно.*

(Напомним, что алгебраическим называется число, являющееся корнем многочлена с целыми коэффициентами.)

§ 4. Мощность континуума

Не следует думать, что все бесконечные множества счетны. Докажем это на следующем важном примере.

Теорема 1. *Сегмент* $U = [0, 1]$ *несчетен.*

Доказательство. Допустим, напротив, что сегмент U есть счетное множество. Тогда все точки его можно расположить в виде последовательности

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \qquad (*)$$

Пусть это сделано, т. е. всякая точка $x \in U$ находится в последовательности (*). Разделим U на три равные части точками

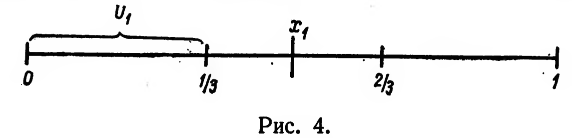


Рис. 4.

1/3 и 2/3. Ясно, что точка x_1 не может принадлежать всем трем сегментам

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right], \qquad (1)$$

и хоть один из них не содержит ее (рис. 4). Обозначим его через U_1 (если точка x_1 не принадлежит двум из сегментов (1), то через U_1 назовем любой из них, например тот, который лежит левее другого).

Теперь разделим на три равные сегмента сегмент U_1 и обозначим через U_2 тот из новых сегментов, который не содержит точки x_2 (а если таких сегментов два, то один из них).

Затем делим на три равные сегмента сегмент U_2 и обозначаем через U_3 тот из них, который не содержит точки x_3 и т. д.

В результате мы получим бесконечную последовательность вложенных друг в друга сегментов $U \supset U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$, которые обладают тем свойством, что $x_n \overline{\in} U_n$.

Ввиду того, что длина сегмента U_n есть $1/3^n$, ясно, что эта длина с возрастанием n стремится к нулю, а тогда, по известной теореме теории пределов, существует точка ξ, принадлежащая всем сегментам U_n

$$\xi \in U_n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Будучи точкой сегмента U, точка ξ должна входить в последовательность (*), но это явно невозможно, ибо какое бы n ни взять мы имеем

$$x_n \overline{\in} U_n, \quad \xi \in U_n, \quad \text{откуда } \xi \neq x_n,$$

т. е. ξ не может совпасть ни с одной из точек последовательности (*). Полученное противоречие и доказывает теорему.

Доказанная теорема дает повод к установлению следующего определения:

Определение. Если множество A эквивалентно сегменту $U = [0,\ 1]$

$$A \sim U,$$

то говорят, что A имеет *мощность континуума* или, короче, *мощность* c.

Теорема 2. *Всякий сегмент $[a,\ b]$, всякий интервал $(a,\ b)$ и всякий полусегмент $(a,\ b]$ или $[a,\ b)$ имеет мощность c.*

Доказательство. Пусть $A = [a,\ b]$, $U = [0,\ 1]$. Формула $y = a + (b - a)x$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между множествами $A = \{y\}$ и $U = \{x\}$, откуда и следует, что A имеет мощность континуума. Так как удаление одного или двух элементов из бесконечного множества приводит к множеству, эквивалентному исходному, то промежутки $(a,\ b)$, $(a,\ b]$, $[a,\ b)$ имеют ту же мощность, что и сегмент $[a,\ b]$, т. е. мощность c. Теорема доказана.

Теорема 3. *Сумма конечного числа попарно не пересекающихся множеств мощности c имеет мощность c.*

Доказательство. Пусть

$$S = \sum_{k=1}^{n} E_k \qquad (E_k E_{k'} = 0,\ k \neq k'),$$

где каждое из множеств E_k имеет мощность c. Возьмем полусегмент $[0,\ 1)$ и точками $c_0 = 0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_{n-1} < c_n = 1$ разложим его на n полусегментов

$$[c_{k-1},\ c_k) \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Каждый из этих полусегментов имеет мощность c, так что мы можем связать множество E_k и полусегмент $[c_{k-1}, c_k)$ взаимнооднозначным соответствием. Легко видеть, что тем самым оказывается установленным взаимнооднозначное соответствие между суммой S и полусегментом

$$[0, 1) = \sum_{k=1}^{n} [c_{k-1}, c_k).$$

Теорема доказана.

Теорема 4. *Сумма счетного множества попарно не пересекающихся множеств мощности c имеет мощность c.*

Доказательство. Пусть $S = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \quad (E_k E_{k'} = 0,\ k \neq k')$, где каждое из множеств E_k имеет мощность c.

Возьмем на полусегменте $[0, 1)$ монотонно возрастающую последовательность $c_0 = 0 < c_1 < c_2 < \ldots$, для которой $\lim_{k\to\infty} c_k = 1$.

Установив взаимнооднозначное соответствие между множествами E_k и $[c_{k-1}, c_k)$ для всех k, мы тем самым установим взаимнооднозначное соответствие между S и $[0, 1)$.

Следствие 1. *Множество Z всех вещественных чисел имеет мощность c.*

В самом деле $Z = \sum_{k=1}^{\infty} \{[k-1, k) + [-k, -k+1)\}$.

Следствие 2. *Множество всех иррациональных чисел имеет мощность c.*

Следствие 3. *Существуют трансцендентные*[1] *числа.*

Теорема 5. *Множество Q всех последовательностей натуральных чисел*

$$Q = \{(n_1, n_2, n_3, \ldots)\}$$

имеет мощность c.

Доказательство. Установим взаимнооднозначное соответствие между Q и множеством всех иррациональных чисел интервала $(0, 1)$ (последнее множество очевидно имеет мощность континуума), считая взаимно соответствующими последовательность $(n_1, n_2, n_3, \ldots) \in Q$ и иррациональное число x, для которого разложение в непрерывную дробь имеет вид

$$x = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ddots}}}$$

Возможность соответствия и доказывает теорему.

Изложенное доказательство предполагает, что читатель знаком с теорией непрерывных дробей.[2]

---

[1] Т. е. неалгебраические.

[2] См., например, А. Я. Хинчин, Цепные дроби, Гостехиздат, 1949.

Можно дать другое доказательство, основанное на теории *двоичных* дробей. С этой целью напомним некоторые факты этой теории. Они будут нам полезны и для других целей. Вот нужные нам свойства двоичных дробей:

1) Двоичной дробью называется сумма ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}, \qquad a_k = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

Указанная сумма обозначается символом

$$0,\ a_1a_2a_3 \ldots \qquad (1)$$

2) Всякое число $x \in [0,\ 1]$ допускает представление в форме

$$x = 0,\ a_1a_2a_3 \ldots$$

Это представление *единственно* в случае, когда x не есть дробь вида $m/2^n$ $(m = 1,\ 3,\ \ldots,\ 2^n - 1)$. Числа 0 и 1 разлагаются (единственным образом) в дроби

$$0 = 0{,}000\ldots, \quad 1 = 0{,}111\ldots$$

Если же $x = m/2^n$ $(m = 1,\ 3,\ \ldots,\ 2^n - 1)$, то x допускает *два* разложения. В этих разложениях знаки $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1}$ совпадают, а знак a_n в одном из них равен 1, а в другом равен 0. Все остальные знаки у первого разложения суть нули («0 в периоде»), а у второго — единицы («1 в периоде»). Например,

$$\frac{3}{8} = \begin{cases} 0{,}011000\ldots \\ 0{,}010111\ldots \end{cases}$$

3) Всякая двоичная дробь (1) равна некоторому числу x из $[0,\ 1]$.

Если эта дробь содержит 0 или 1 в периоде, то x есть число вида $m/2^n$ $(m = 1,\ 3,\ \ldots,\ 2^n - 1)$ (исключение составляют дроби $0{,}000\ldots$ и $0{,}111\ldots$), и тогда, наряду с исходным, существует еще одно двоичное разложение x. Если же дробь (1) не содержит цифру 0 или 1 в периоде, то $x \neq m/2^n$ и других двоичных разложений x не имеет.

Отметив это, возвратимся к теореме 5. Условимся не пользоваться дробями, содержащими единицу в периоде. Тогда каждое число из полусегмента $[0,\ 1)$ будет иметь единственное представление в форме

$$0,\ a_1a_2a_3 \ldots \qquad (1)$$

причем какое бы число N ни взять, найдутся такие a_k, что

$$a_k = 0, \quad k > N.$$

Обратно, любой дроби (1) с этим свойством отвечает точка из $[0,\ 1)$. Но задать дробь (1) можно, указав те k, для которых $a_k = 0$.

Эти k образуют возрастающую последовательность натуральных чисел

$$k_1 < k_2 < k_3 < \ldots \qquad (2)$$

и каждой такой последовательности отвечает дробь (1). Значит, множество H последовательностей (2) имеет мощность c. Но между множествами H и Q легко установить взаимнооднозначное соответствие. Для этого достаточно соотнести последовательности (2) последовательность $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ из Q, для которой $n_1 = k_1$, $n_2 = k_2 - k_1$, $n_3 = k_3 - k_2, \ldots$

Теорема доказана.

Теорема 6. *Если элементы множества A определяются n значками, каждый из которых, независимо от прочих значков, принимает c значений*[1])

$$A = \{a_{x_1, x_2, \ldots, x_n}\},$$

то множество A имеет мощность c.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай трех значков, ибо рассуждение имеет общий характер.

Пусть $A = \{a_{x, y, z}\}$.

Назовем через X (соответственно, Y и Z) множество значений значка x (соответственно, y и z), при этом каждый из значков изменяется независимо от прочих и каждое из множеств X, Y, Z имеет мощность c.

Установим взаимнооднозначное соответствие между каждым из множеств X, Y, Z и множеством Q всех последовательностей натуральных чисел. Это позволит нам установить такое же соотношение между A и Q.

Именно, пусть ξ есть некоторый элемент A. Тогда

$$\xi = a_{x_0, y_0, z_0}, \quad \text{где} \quad x_0 \in X, \; y_0 \in Y, \; z_0 \in Z.$$

В соответствиях между X, Y, Z и Q элементам x_0, y_0, z_0 отвечают какие-то элементы из Q; пусть

элементу x_0 отвечает последовательность $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$,
» y_0 » » $(p_1, p_2, p_3, \ldots)$,
» z_0 » » $(q_1, q_2, q_3, \ldots)$.

Соотнесем элементу ξ последовательность

$$(n_1, p_1, q_1, n_2, q_2, n_3, \ldots),$$

очевидно входящую в Q. Легко понять, что этим мы действительно получили взаимнооднозначное соответствие между A и Q.

Из доказанной теоремы вытекает ряд важных следствий.

[1]) И здесь и ниже мы употребляем такие обороты речи как «c значений», «в множестве есть c элементов» и т. п., вместо того, чтобы сказать «множество значений имеет мощность c» и т. д.; надеемся, что это не затруднит читателя.

Следствие 1. *Множество всех точек плоскости имеет мощность c.*

Следствие 2. *Множество всех точек трехмерного пространства имеет мощность c.*

Иначе говоря, мощность множества точек пространства не зависит от числа его измерений.

Следствие 3. *Сумма c попарно не пересекающихся множеств мощности c имеет мощность c.*

Действительно, можно установить взаимнооднозначное соответствие между множеством слагаемых множеств и множеством всех прямых плоскости xy, параллельных оси Ox. Если затем установить взаимнооднозначное соответствие между каждым из слагаемых множеств и соответствующей ему прямой, то мы, очевидно, получим взаимнооднозначное же соответствие между суммой и плоскостью xy.

Схематически теоремы 3, 4 и последнее следствие можно записать так:

$$c+c+\ldots+c=cn=c,\quad c+c+c+\ldots=ca=c,\quad cc=c.$$

Теорема 7. *Если элементы множества A определяются с помощью счетного множества значков*

$$A=\{a_{x_1,\,x_2,\,x_3,\,\ldots}\},$$

каждый из которых, независимо от прочих значков, принимает c значений, то множество A имеет мощность c.

Доказательство. Пусть множество значений значка x_k есть X_k. Свяжем его взаимнооднозначным соответствием с множеством Q всех последовательностей натуральных чисел. Пусть это соответствие обозначено через φ_k $(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

Сделав это, выберем произвольный элемент $\xi\in A$. Тогда

$$\xi=a_{x_1^{(0)},\,x_2^{(0)},\,x_3^{(0)},\,\ldots}\quad\text{где}\quad x_k^{(0)}\in X_k\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Пусть в соответствии φ_k значению $x_k^{(0)}$ значка x_k отвечает последовательность $(n_1^{(k)},\ n_2^{(k)},\ n_3^{(k)},\ \ldots)\in Q$. Тогда элементу $\xi\in A$ отвечает бесконечная целочисленная матрица

$$\begin{array}{|llll} \hline n_1^{(1)}, & n_2^{(1)}, & n_3^{(1)}, & \ldots \\ n_1^{(2)}, & n_2^{(2)}, & n_3^{(2)}, & \ldots \\ n_1^{(3)}, & n_2^{(3)}, & n_3^{(3)}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\qquad (*)$$

Легко видеть, что полученное соответствие между A и множеством L матриц (*) взаимнооднозначно. Стало быть, остается обнаружить, что множество L имеет мощность c. Но это почти очевидно, ибо, соотнеся матрице (*) последовательность

$$(n_1^{(1)},\ n_2^{(1)},\ n_1^{(2)},\ n_3^{(1)},\ n_2^{(2)},\ n_1^{(3)},\ n_4^{(1)},\ \ldots)$$

(построенную так же, как мы это делали при доказательстве теоремы 7 § 3), мы сразу получим взаимнооднозначное соответствие между L и Q.

Теорема 8. *Множество T всех последовательностей вида*

$$(a_1, a_2, a_3, \dots),$$

где a_k, независимо друг от друга, принимают значения 0 и 1, имеет мощность c.

Доказательство. Пусть S есть множество тех последовательностей из T, в которых, начиная с некоторого места, все a_k равны 1. Каждой последовательности $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, входящей в S, можно соотнести число, имеющее двоичное разложение $0, a_1a_2a_3 \dots$; это число будет или 1 или $m/2^n$ ($m = 1, 3, \dots, 2^n - 1$), причем полученное соответствие между S и множеством чисел указанного вида, очевидно, взаимнооднозначно, откуда следует, что S есть множество счетное.

С другой стороны, если последовательности $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, входящей в $T - S$, соотнести число с двоичным разложением $0, a_1a_2a_3 \dots$, то мы получим взаимнооднозначное соответствие между $T - S$ и полусегментом $[0, 1)$, откуда вытекает, что $T - S$, а значит, и T имеет мощность c.

Следствие. *Если элементы множества A определяются с помощью счетного множества значков, каждый из которых, независимо от прочих, принимает два значения, то множество A имеет мощность c.*

В самом деле, если $A = \{a_{x_1, x_2, x_3, \dots}\}$ и $x_k = \begin{cases} l_k \\ m_k \end{cases}$, то достаточно соотнести каждому элементу A последовательность $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, где a_k равно 0 или 1, смотря по тому, будет ли $x_k = l_k$ или $x_k = m_k$, чтобы получить взаимнооднозначное соответствие между A и T.

§ 5. Сравнение мощностей

Мы определили выше смысл выражений «два множества имеют одинаковую мощность», «множество имеет мощность a», «множество имеет мощность c». Таким образом, встретив слово «мощность» в одном из подобных выражений, мы знаем, чтó оно означает, но само по себе это понятие у нас еще не определено. Что же такое мощность множества?

Г. Кантор пытался определить это понятие с помощью таких, довольно-таки туманных, выражений:

«Мощностью данного множества A называется та общая идея, которая остается у нас, когда мы, мысля об этом множестве, отвлекаемся как от всех свойств его элементов, так и от их порядка». В связи с этим Г. Кантор обозначал мощность множества A символом

$$\overline{\overline{A}}$$

(две черты — «двойное» отвлечение).

В настоящее время канторовский способ определения понятия мощности не считается удовлетворительным (хотя обозначение $\overline{\overline{A}}$ оказалось очень удачным). Вместо этого принято такое формальное определение.

Определение 1. Пусть все множества разбиты по классам, так что два множества попадают в один класс тогда и только тогда, когда они эквивалентны. Соотнесем каждому такому классу множеств какой-либо символ и будем его называть *мощностью* любого множества данного класса. При этом, если мощность некоторого множества A есть α, то пишут

$$\overline{\overline{A}} = \alpha.$$

При таком способе определения ясно, что эквивалентные множества действительно имеют одинаковую мощность, а также что, соотнеся классу, содержащему множество N всех натуральных чисел, символ a, можно сказать, что счетное множество имеет мощность a.

Далее, буква c есть символ, соотнесенный классу, содержащему множество $U=[0, 1]$ и потому про все множества, эквивалентные U, мы и говорим, что они имеют мощность c.

Приведем еще один пример применения определения 1. Пусть классу, содержащему множество $A=\{a, b, c\}$, соотнесен символ «3». Тогда можно сказать, что любое множество, эквивалентное множеству A (т. е., попросту сказать, любое множество из трех элементов), имеет мощность 3. Мы видим, что понятие количества элементов конечного множества есть частный вид более общего понятия мощности.

Наконец, 0 есть мощность пустого множества, а 1 — мощность любого «одноэлементного» множества.

Имея, таким образом, определение понятия мощности, естественно поставить вопрос о сравнении мощностей.

Определение 2. Пусть A и B множества, имеющие соответственно мощности α и β:

$$\overline{\overline{A}} = \alpha, \quad \overline{\overline{B}} = \beta.$$

Если: 1) множества A и B не эквивалентны, но 2) в множестве B есть часть B^*, эквивалентная множеству A, то говорят, что множество B имеет *большую*, а множество A — *меньшую* мощность, и пишут $a < \beta$, $\beta > \alpha$.

Например, если

$$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_{32}\}, \qquad \overline{\overline{A}} = 32,$$
$$B=\{b_1, b_2, \ldots, b_{49}\}, \qquad \overline{\overline{B}} = 49,$$

то A не $\sim B$, но $A \sim B^*$, где $B^*=\{b_1, b_2, \ldots, b_{32}\}$, а потому $32 < 49$.

Точно так же любое конечное натуральное число n меньше, чем каждая из мощностей a и c.

Наконец, если

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\},\qquad \overline{\overline{N}}=a,\ U=[0,\ 1],\qquad \overline{\overline{U}}=c,$$

то N не $\sim U$ (см. теорему 1, § 4), но $N \sim U^*$, где

$$U^*=\{1,\ {}^1/_2,\ {}^1/_3,\ \ldots\} \subset U.$$

Поэтому $a<c$.

Вопрос о том, существуют ли мощности μ, *промежуточные* между a и c, т. е. такие, что $a<\mu<c$, еще не решен[1]), хотя ему было посвящено много исследований.

Зато легко построить множества мощности, большей чем c.

Теорема 1. *Множество F всех вещественных функций, заданных на сегменте* $[0,\ 1]$, *имеет мощность, большую чем c.*

Доказательство. Покажем, прежде всего, что F не $\sim U$, где $U=[0,\ 1]$. Допустим, напротив, что $F\sim U$, и пусть φ есть некоторое взаимнооднозначное соответствие между F и U. Условимся обозначать через $f_t(x)$ ту функцию из F, которая отвечает в соответствии φ числу $t\in[0,\ 1]$. Положим, $F(t,\ x)=f_t(x)$. Это есть некоторая совершенно определенная функция двух переменных, заданная в области $0\leqslant t\leqslant 1$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

Положим теперь $\psi(x)=F(x,\ x)+1$. Эта функция задана для $0\leqslant x\leqslant 1$, т. е. $\psi(x)\in F$. Но тогда в соответствии φ функция $\psi(x)$ отвечает некоторому числу $a\in U$, т. е. $\psi(x)=f_a(x)$, или $\psi(x)=$ $=F(a,\ x)$.

Иначе говоря, при всех x из $[0,\ 1]$ будет $F(x,\ x)+1=F(a,\ x)$, а это невозможно, например, для $x=a$.

Итак, действительно, F не $\sim U$. Но если мы рассмотрим множество функций $F^*=\{\sin x+c\}$ $(0\leqslant c\leqslant 1)$, которое есть часть F, то сразу увидим, что $F^*\sim U$.

Теорема доказана.

Определение 3. Мощность множества F всех функций, заданных на сегменте $[0,\ 1]$, обозначается символом f.

С помощью этого символа теорему 1 можно формулировать так:

$$c<f.$$

Существуют ли мощности, большие чем f? Оказывается, что да, существуют. Больше того, мы покажем, что, исходя из множества любой мощности, можно построить множество большей мощности.

Теорема 2. *Пусть M какое-либо множество. Если T есть множество всех частей множества M, то $\overline{\overline{T}}>\overline{\overline{M}}$.*

Доказательство. Отметим, что элементами множества T являются *все* части M, в частности само M, пустое множество 0 и все одноэлементные подмножества M.

---

[1]) Предположение, что таких мощностей нет, носит название «*гипотезы континуума*». [Современное состояние вопроса о гипотезе континуума изложено в книге: П. Дж. Коэн, Теория множеств и континуум-гипотеза, «Мир», 1969 (*Прим. ред.*).]

Покажем, прежде всего, что T не $\sim M$.

Допустим, напротив, что $T \sim M$, и пусть φ какое-либо взаимно-однозначное соответствие между этими множествами. Каждому $m \in M$ в соответствии φ отвечает определенный элемент T, который мы обозначим через $\varphi(m)$, и каждый элемент T есть $\varphi(m)$ для одного и только одного $m \in M$.

Назовем элемент $m \in M$ «хорошим», если $m \in \varphi(m)$, и «плохим» в противном случае. Элемент, который в соответствии φ отвечает самому множеству M, наверное «хороший», а элемент, отвечающий пустому множеству, наверное «плохой». Пусть S множество всех «плохих» (и только «плохих») элементов M. Так как $S \in T$, то в соответствии φ множеству S отвечает элемент $m_0 \in M$

$$S = \varphi(m_0).$$

Каков же этот элемент m_0 — «хороший» или «плохой»? Допустим, что m_0 «хороший» элемент. Это значит, что $m_0 \in \varphi(m_0) = S$, а так как S состоит только из «плохих» элементов, то m_0 элемент «плохой», что противоречит сделанному допущению.

Итак, m_0 «плохой» элемент. Но тогда $m_0 \overline{\in} \varphi(m_0) = S$, а это означает, что m_0 «хороший» элемент. Стало быть, элемент m_0 ни «хороший», ни «плохой», а так как всякий элемент или «хороший» или «плохой», то получается абсурдная ситуация, которая и обнаруживает, что T не $\sim M$.

Но, если T^* есть множество всех одноэлементных подмножеств M, то, очевидно, $T^* \sim M$, а так как $T^* \subset T$, то теорема доказана.

Замечание. Пусть M конечное множество, состоящее из n элементов. Тогда множество T содержит 2^n элементов. В самом деле, T содержит одно пустое множество, C_n^1 одноэлементных множеств, C_n^2 двухэлементных множеств, и т. д., а всего в T будет входить

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

элементов. Отметим, что этот результат верен и для случаев, когда M пустое ($n = 0$), или одноэлементное ($n = 1$) множество, ибо в первом случае T состоит из одного M, а во втором из M и пустого множества.

В связи с этим естественно дать следующее определение.

Определение 4. Если множество M имеет мощность μ, а множество всех его частей T имеет мощность τ, то говорят, что $\tau = 2^\mu$.

Теорема 2 означает, что $2^\mu > \mu$.

Теорема 3. *Справедлива формула* $c = 2^a$.

Доказательство. Пусть T есть множество всех частей натурального ряда чисел N, а L множество всех последовательностей вида

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots), \quad a_k = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

Тогда (теорема 8, § 4) $\overline{\overline{T}}=2^a$, $\overline{L}=c$.

Возьмем произвольный элемент $N^* \in T$. N^* есть некоторое множество натуральных чисел. Соотнесем N^* последовательность $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ по такому правилу: если $k \in N^*$, то $a_k = 1$, а если $k \overline{\in} N^*$, то $a_k = 0$. Очевидно, мы получаем при этом взаимнооднозначное соответствие между T и L, что и доказывает теорему.

Из теорем 2 и 3 снова следует, что $c > a$.

Следующие две теоремы имеют большое значение.

Теорема 4. *Пусть $A \supset A_1 \supset A_2$. Если $A_2 \sim A$, то и $A_1 \sim A$.*

Доказательство. Пусть φ есть некоторое взаимнооднозначное соответствие между A и A_2. Каждому элементу A в этом соответствии отвечает некоторый элемент A_2.

В частности те элементы A_2, которые отвечают элементам A_1, образуют определенное множество $A_3 \subset A_2$.

Таким образом A_1 связано взаимнооднозначным соответствием с A_3. Но $A_2 \subset A_1$, значит те элементы A_3, которые при этом отвечают элементам A_2, образуют определенное множество $A_4 \subset A_3$.

Теперь, поскольку $A_3 \subset A_2$, а A_2 и A_4 связаны взаимнооднозначным соответствием φ, можно образовать множество $A_5 \subset A_4$ и состоящее из тех элементов A_4, которые отвечают элементам A_3.

Продолжая этот процесс, мы получим последовательность множеств

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset A_5 \supset \ldots$$

такую, что

$$A \sim A_2, \quad A_1 \sim A_3, \quad A_2 \sim A_4, \quad A_3 \sim A_5, \ldots$$

Отметим при этом, что справедливы и такие соотношения:

$$\left.\begin{array}{l} A - A_1 \sim A_2 - A_3, \\ A_1 - A_2 \sim A_3 - A_4, \\ A_2 - A_3 \sim A_4 - A_5, \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}, \qquad (*)$$

вытекающие из самого определения[1]) множеств A_n.

Пусть $D = AA_1A_2A_3 \ldots$ Легко видеть, что

$$A = \underline{(A - A_1)} + (A_1 - A_2) + \underline{\underline{(A_2 - A_3)}} + \\ + (A_3 - A_4) + \underline{\underline{(A_4 - A_5)}} + \ldots + D$$

$$A_1 = (A_1 - A_2) + \underline{(A_2 - A_3)} + (A_3 - A_4) + \underline{\underline{(A_4 - A_5)}} + \ldots + D,$$

причем отдельные слагаемые каждой из строк не пересекаются.

В силу (*) одинаково подчеркнутые слагаемые обеих сумм эквивалентны друг другу. Но прочие слагаемые этих сумм попарно тождественны, откуда и вытекает эквивалентность A и A_1.

---

[1]) Обращаем внимание читателя на то, что из соотношений $A^* \subset A$, $B^* \subset B$, $A^* \sim B^*$, $A \sim B$, *не* следует, что $A - A^* \sim B - B^*$.

Теорема 5 (**Э. Шрёдер — Ф. Бернштейн**). *Пусть A и B два множества. Если каждое из них эквивалентно некоторой части другого, то они эквивалентны между собой.*

Доказательство. Пусть $A \sim B^*$, $B^* \subset B$, $B \sim A^*$, $A^* \subset A$.

Установим взаимнооднозначное соответствие между B и A^*, при этом те элементы A^*, которые окажутся соответствующими элементам множества B^*, образуют некоторое множество A^{**} Очевидно $A \supset A^* \supset A^{**}$ и $A \sim A^{**}$ (ибо $A \sim B^*$, $B^* \sim A^{**}$) Отсюда, на основании теоремы 4, $A \sim A^*$, а так как $A^* \sim B$ то $A \sim B$.

Теоремы 4 и 5 имеют ряд важных следствий.

Следствие 1. *Если α и β две мощности, то соотношения*

$$\alpha = \beta, \quad \alpha < \beta, \quad \alpha > \beta$$

несовместимы.

Действительно, тот факт, что соотношение $\alpha = \beta$ исключает оба прочих, вполне очевиден.

Допустим теперь, что одновременно выполняются соотношения $\alpha < \beta$ и $\alpha > \beta$. Пусть A и B суть два множества мощностей α и β:

$$\overline{\overline{A}} = \alpha, \quad \overline{\overline{B}} = \beta.$$

Так как $\alpha < \beta$, то

1) A и B не эквивалентны;

2) $A \sim B^*$, где $B^* \subset B$.

Но из того, что $\alpha > \beta$, следует, что

3) $B \sim A^*$, где $A^* \subset A$.

Из 2) и 3) вытекает, что $A \sim B$, а это противоречит 1).

Следствие 2. *Если α, β, γ три мощности и $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$,* т. е. *отношение $<$ транзитивно.*

В самом деле, если A, B, C три множества мощностей α, β, γ, то $A \sim B^* \subset B$, $B \sim C^* \subset C$, откуда следует, что $A \sim C^{**} \subset \subset C$, где C^{**} есть множество тех элементов C^*, которые в соответствии между B и C^* отвечают элементам B^*.

Остается обнаружить, что A не $\sim C$.

Но если бы было $A \sim C$, то оказалось бы, что $C^{**} \sim C$, а тогда, по теореме 4, мы имели бы, что $C^* \sim C$, откуда $B \sim C$ и $\beta = \gamma$.

Замечание. *Из самого определения 2 вытекает, что если $A \sim B^* \subset B$, то либо $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, либо $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$.*

В связи с этим соотношение $A \sim B^* \subset B$ часто записывают так:

$$\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}.$$

С помощью этого обозначения теорему 5 можно формулировать так:

Если $\alpha \geqslant \beta$ *и* $\alpha \leqslant \beta$, *то* $\alpha = \beta$.

Если m и n два натуральных числа, то из трех соотношений

$$m = n, \quad m < n, \quad m > n$$

одно (и только одно) обязательно имеет место. В главе XIV мы докажем, что для любых мощностей α и β также обязательно выполняется одно из трех взаимно исключающих соотношений

$$\alpha = \beta, \quad \alpha < \beta, \quad \alpha > \beta.$$

Это свойство мощностей называется *трихотомией*.

Покажем применение теоремы 5 на следующем примере.

Теорема 6. *Множество* Φ *всех непрерывных функций, заданных на сегменте* $[0, 1]$, *имеет мощность* c.

Доказательство. Пусть $\Phi^* = \{\sin x + k\}$. Очевидно, $\Phi^* \subset \Phi$ и $\overline{\overline{\Phi^*}} = c$, откуда следует, что

$$\overline{\overline{\Phi}} \geqslant c. \tag{1}$$

Остается показать, что

$$\overline{\overline{\Phi}} \leqslant c. \tag{2}$$

С этой целью обозначим через H множество всех последовательностей вида $[u_1, u_2, u_3, \ldots]$, где u_k, независимо друг от друга, принимают все вещественные значения. В силу теоремы 7 § 4, $\overline{\overline{H}} = c$.

Перенумеруем все рациональные числа сегмента $[0, 1]$:

$$r_1, r_2, r_3, \ldots$$

и каждой функции $f(x) \in \Phi$ соотнесем последовательность

$$a_f = [f(r_1), f(r_2), f(r_3), \ldots].$$

Очевидно, $a_f \in H$. При этом, если непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$ не тождественны, то $a_f \neq a_g$.

Действительно, если бы было $a_f = a_g$, то равенство $f(x) = g(x)$ выполнялось бы для любого рационального значения x из $[0, 1]$, откуда, в силу непрерывности обеих функций, следовало бы, что это равенство верно для всякого x из $[0, 1]$, и функции $f(x)$ и $g(x)$ были бы тождественны.

Значит, множество Φ эквивалентно множеству $H^* = \{a_f\}$. Так как $H^* \subset H$ и $\overline{\overline{H}} = c$, то доказано соотношение (2), а с ним и теорема.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ I

1. Доказать, что множество точек разрыва монотонной функции разве лишь счетно.
2. Установить взаимнооднозначное соответствие между $(0, 1)$ и $[0, 1]$.
3. Доказать, что $f = 2^c$.
4. Доказать, что если $A = B + C$, $\overline{\overline{A}} = c$, то хоть одно из множеств B или C имеет мощность c.

5. Пусть $f(x)$ функция, обладающая тем свойством, что всякому x_0 отвечает такое $\delta > 0$, что как только $|x - x_0| < \delta$, так сейчас же $f(x) \geqslant f(x_0)$. Доказать, что множество значений $f(x)$ разве лишь счетно.

6. Показать, что в теоремах 4, 5, 6, 7 § 3 и 3, 4 § 4 можно откинуть условие отсутствия общих элементов в складываемых множествах.

7. Доказать формулу $AB + C = (A + C)(B + C)$. Обобщить ее.

8. Пусть $A_1, A_2, A_3, \ldots$ последовательность множеств. Обозначим через $\overline{A}$ множество элементов, принадлежащих бесконечному множеству множеств A_n, а через $\underline{A}$ множество элементов, не принадлежащих только конечному числу множеств A_n. Доказать, что $\overline{A} = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} A_k$, $\underline{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=n}^{\infty} A_k$.

9. Доказать, что если $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ и $\overline{\overline{A}} = c$, то хоть одно из множеств A_n имеет мощность c.

ГЛАВА II

ТОЧЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА

В этой главе мы будем заниматься множествами точек числовой прямой. Все множество вещественных чисел мы будем обозначать символом Z. Отметим, что все понятия, которые встречаются ниже, как-то: «точка», «сегмент», «интервал» и т. п., мы употребляем в чисто арифметическом смысле; говоря, например, что «точка y лежит правее точки x», мы имеем в виду, что $y > x$ и т. п.

§ 1. Предельная точка

Определение 1. Точка x_0 называется *предельной точкой*[1]) точечного множества E, если всякий интервал, содержащий эту точку, содержит хоть одну точку E, отличную от точки x_0.

Замечания: 1) Сама точка x_0 может принадлежать, а может и не принадлежать множеству E.

2) Если точка x_0 принадлежит множеству E, но не является его предельной точкой, то она называется *изолированной* точкой множества E.

3) Если x_0 есть предельная точка множества E, то всякий интервал (α, β), содержащий эту точку, содержит бесконечное множество точек E.

Докажем последнее замечание. Допустим, напротив, что интервал (α, β), содержащий x_0, содержит только конечное число точек E. Пусть отличные от x_0 точки множества $E \cdot (\alpha, \beta)$ суть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Обозначим через δ наименьшее из положительных чисел $|x_0 - \xi_1|$, $|x_0 - \xi_2|$, $\ldots$, $|x_0 - \xi_n|$, $x_0 - \alpha$, $\beta - x_0$ и рассмотрим интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Ни одна из точек ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ в него не попадает, а так как $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (\alpha, \beta)$, то интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ вообще не содержит точек E, отличных от x_0, а это противоречит тому, что x_0 предельная точка множества E.

К понятию предельной точки можно подойти и с другой точки зрения. С этой целью докажем следующее предложение.

Теорема 1. *Для того чтобы точка x_0 была предельной точкой множества E, необходимо и достаточно, чтобы из этого мно-*

---

[1]) Или *точкой сгущения*.

жества можно было выделить последовательность различных точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ такую, что

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Доказательство. Достаточность условия вполне очевидна. Докажем его необходимость.

Пусть x_0 есть предельная точка множества E. Выберем в интервале $(x_0-1,\ x_0+1)$ точку $x_1 \in E$, отличную от x_0.

Затем в интервале $(x_0-1/2,\ x_0+1/2)$ выберем точку $x_2 \in E$, отличную и от x_0 и от x_1 и т. д.

На n-м шагу процесса в интервале $(x_0-1/n,\ x_0+1/n)$ мы выбираем точку $x_n \in E$, отличную от $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

В результате из множества E выделена последовательность $\{x_n\}$, для которой, очевидно, будет $\lim x_n = x_0$.

Доказанная теорема позволяет высказать определение 1 в другой форме.

Определение 2. Точка x_0 называется *предельной точкой* множества E, если из этого множества можно выделить последовательность различных точек $x_1, x_2, x_3, \ldots$ такую, что

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Теорема 2 (Б. Больцано — К. Вейерштрасс). *Всякое бесконечное ограниченное множество E имеет хотя бы одну предельную точку (которая может и не принадлежать E).*

Доказательство. Так как множество E ограничено, то можно указать содержащий его сегмент $[a, b]$.

Положим, $c = \frac{a+b}{2}$ и рассмотрим сегменты $[a, c]$ и $[c, b]$. Не может оказаться, чтобы каждый из них содержал только конечное число точек E, ибо в этом случае и все множество E было бы конечным. Значит, хоть один из этих сегментов содержит бесконечное множество точек E. Обозначим его через $[a_1, b_1]$ (если оба сегмента $[a, c]$ и $[c, b]$ содержат бесконечное множество точек E, то через $[a_1, b_1]$ обозначаем только один из них, какой — безразлично).

Положим $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ и обозначим через $[a_2, b_2]$ тот из сегментов $[a_1, c_1]$ и $[c_1, b_1]$, на котором лежит бесконечное множество точек E (существование его устанавливается так же, как и выше).

Продолжая этот процесс, мы построим бесконечную последовательность вложенных сегментов

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots,$$

каждый из которых содержит бесконечное множество точек E.

Так как $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, то длина сегмента $[a_n, b_n]$ с возрастанием n стремится к нулю и, по известной теореме теории

пределов, существует точка x_0, общая всем сегментам $[a_n, b_n]$, причем $\lim a_n = \lim b_n = x_0$.

Покажем, что x_0 и есть предельная точка множества E. Для этого возьмем произвольный интервал (α, β), содержащий x_0. Очевидно, если n достаточно велико, то $[a_n, b_n] \subset (\alpha, \beta)$, так что в (α, β) находится бесконечное множество точек E, откуда и следует наше утверждение.

Заметим, что условие ограниченности множества E не может быть опущено без нарушения справедливости теоремы. Примером может служить множество N всех натуральных чисел. Оно хотя и бесконечно, но не имеет ни одной предельной точки.

В приложениях часто оказывается полезной другая форма теоремы Больцано — Вейерштрасса, в которой речь идет не о множествах, а о числовых последовательностях.

Мы говорим, что имеем дело с числовой последовательностью

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, \qquad (*)$$

если каждому n соотнесено определенное число x_n; при этом различные члены последовательности могут быть равны друг другу. Такова, например, последовательность

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$$

Если рассматривать ее как точечное множество, то это множество конечное, ибо состоит только из двух точек 0 и 1, как последовательность же она бесконечна.

Последовательность (*) называется *ограниченной*, если существует такое число K, что при всех n будет

$$|x_n| < K.$$

Упомянутая выше форма теоремы Больцано — Вейерштрасса такова:

Теорема 2*. *Из всякой ограниченной последовательности*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \qquad (*)$$

можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots \qquad (n_1 < n_2 < n_3 < \ldots).$$

Доказательство. Рассмотрим множество E членов последовательности (*). Если это множество конечно, то одна из его точек встречается в последовательности (*) бесконечно много раз, пусть эта точка ξ и пусть $x_{n_1} = x_{n_2} = x_{n_3} = \ldots = \xi$, тогда последовательность $\{x_{n_k}\}$ требуемая.

Если же указанное множество бесконечно, то к нему применима теорема Больцано — Вейерштрасса. Пусть x_0 есть предельная точка множества E, тогда из E выделяется последовательность

$$x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \ldots, \qquad (**)$$

сходящаяся к точке x_0, причем все члены ее, а тем более их индексы $m_1, m_2, m_3, \ldots$, различны.

Положим, $n_1 = m_1$ и обозначим через n_2 первое из чисел $m_1, m_2, m_3, \ldots$, которое окажется больше, чем n_1, затем обозначим через n_3 первое из этих чисел, которое больше, чем n_2, и т. д. В результате мы получим последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots$ с *возрастающими* индексами. Поскольку эта последовательность есть частичная для (**), то ясно, что $\lim x_{n_k} = x_0$. Теорема доказана.

§ 2. Замкнутые множества

Дадим определения целого ряда понятий, тесно связанных с понятием предельной точки.

Определения. Пусть E точечное множество.

1. Множество всех предельных точек E называется *производным множеством* для множества E и обозначается через E'.

2. Если $E' \subset E$, то множество E называется *замкнутым*.

3. Если $E \subset E'$, то множество E называется *плотным в себе*.

4. Если $E = E'$, то множество E называется *совершенным*.

5. Множество $E + E'$ называется *замыканием* множества E и обозначается через $\bar{E}$.

Таким образом, множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки. Плотное в себе множество лишено изолированных точек. Совершенное множество замкнуто и плотно в себе.

Иллюстрируем данные определения примерами.

Примеры.

1. $E = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$, $E' = \{0\}$. Множество не замкнуто и не плотно в себе.

2. $E = (a, b)$, $E' = [a, b]$. Множество плотно в себе, но не замкнуто.

3. $E = [a, b]$, $E' = [a, b]$. Множество совершенно.

4. $E = Z$, $E' = Z$, т. е. множество всех вещественных чисел совершенно.

5. $E = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots, 0\}$, $E' = \{0\}$; множество замкнуто, но не плотно в себе.

6. $E = R$ (множество всех рациональных чисел), $E' = Z$; множество плотно в себе, но не замкнуто.

7. $E = 0$, $E' = 0$, т. е. пустое множество совершенно.

8. E — конечное множество, $E' = 0$, т. е. конечное множество замкнуто, но не плотно в себе.

Ниже мы познакомимся с более сложными и интересными примерами замкнутых и совершенных множеств.

Теорема 1. *Производное множество E' любого точечного множества E замкнуто.*

Доказательство. Теорема тривиальна, если E' пусто. Пусть E' не пусто и x_0 есть предельная точка E'.

Возьмем произвольный интервал (α, β), содержащий точку x_0. По определению предельной точки, в этом интервале найдется точка $z \in E'$. Значит интервал (α, β) есть интервал, охватывающий предельную точку исходного множества E (рис. 5), а потому он содержит бесконечное множество точек E.

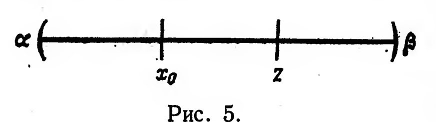


Рис. 5.

Итак, всякий интервал, содержащий точку x_0, содержит бесконечное множество точек E, так что точка x_0 есть предельная точка E. Иначе говоря, $x_0 \in E'$. Таким образом, множество E' содержит все свои предельные точки и, стало быть, замкнуто.

Теорема 2. *Если $A \subset B$, то $A' \subset B'$.*

Этот факт очевиден.

Теорема 3. *Справедлива формула*

$$(A+B)' = A' + B'.$$

Доказательство. Включение $A' + B' \subset (A+B)'$ вытекает из теоремы 2. Установим обратное включение

$$(A+B)' \subset A' + B'. \qquad (*)$$

Пусть $x_0 \in (A+B)'$. Тогда из $A+B$ выделяется последовательность различных точек $x_1, x_2, x_3, \ldots$, такая, что $\lim x_n = x_0$.

Если в этой последовательности найдется бесконечное множество точек, входящих в A, то x_0 будет предельной точкой множества A и $x_0 \in A' \subset A' + B'$. Если же среди точек x_n лишь конечное число принадлежит A, то $x_0 \in B' \subset A' + B'$. Таким образом, всегда $x_0 \in A' + B'$, откуда и следует (*), а значит и теорема.

Следствие 1. *Замыкание $\bar{E}$ любого множества E замкнуто.*

Действительно,

$$(\bar{E})' = (E + E')' = E' + (E')' \subset E' + E' = E' \subset \bar{E}.$$

Следствие 2. *Для того чтобы множество E было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы оно совпадало со своим замыканием:*

$$E = \bar{E}.$$

Достаточность этого условия вытекает из предыдущего следствия. Обратно, пусть множество E замкнуто, тогда $\bar{E} = E + E' \subset \subset E \subset \bar{E}$, откуда и следует, что $\bar{E} = E$.

Следующая теорема также вытекает из теоремы 3.

Теорема 4. *Сумма конечного числа замкнутых множеств есть множество замкнутое.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай двух слагаемых множеств $\Phi = F_1 + F_2$.

В силу теоремы 3, имеем $\Phi' = F_1' + F_2'$, но, так как $F_1' \subset F_1$, $F_2' \subset F_2$, то $\Phi' \subset \Phi$, откуда и следует теорема.

Общий случай исчерпывается способом математической индукции.

Замечание. *Сумма бесконечного множества замкнутых множеств может и не быть замкнутым множеством.*

В самом деле, пусть, например,

$$F_n = [1/n, 1] \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Тогда все F_n замкнуты, но их сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n = (0, 1]$$

не замкнута.

Для пересечения замкнутых множеств справедлива следующая теорема:

Теорема 5. *Пересечение любого множества замкнутых множеств есть множество замкнутое.*

Доказательство. Пусть замкнутые множества F_ξ отмечены для отличия друг от друга значком ξ, принимающим какое-нибудь множество значений, и $\Phi = \prod_\xi F_\xi$ их пересечение.

Тогда $\Phi \subset F_\xi$ при любом ξ, откуда следует, что $\Phi' \subset F'_\xi$ и тем более $\Phi' \subset F_\xi$. Так как это верно при любом ξ, то $\Phi' \subset \prod_\xi F_\xi$, т. е. $\Phi' \subset \Phi$, что и требовалось доказать.

Лемма. *Пусть множество E ограничено сверху (снизу) и $\beta = \sup E$ $(\alpha = \inf E)$; тогда $\beta \in \bar{E}$ $(\alpha \in \bar{E})$.*

Доказательство. Если $\beta \in E$, то и подавно $\beta \in \bar{E}$. Допустим же, что $\beta \overline{\in} E$. Так как при каждом $\varepsilon > 0$ существует такая точка $x \in E$, что $x > \beta - \varepsilon$, то любой интервал, содержащий точку β, содержит и точки множества E, которые, очевидно, отличны от β, ибо $\beta \overline{\in} E$. Значит, β есть предельная точка множества E и, стало быть, $\beta \in E' \subset \bar{E}$. Итак, всегда $\beta \in \bar{E}$.

Теорема 6. *В ограниченном сверху (снизу) замкнутом множестве F есть самая правая (самая левая) точка.*

Действительно, пусть $\beta = \sup F$. Тогда $\beta \in \bar{F} = F$.

Определение 6. Пусть E — точечное множество, а $\mathfrak{M}$ — некоторая система интервалов. Если для каждого $x \in E$ существует интервал $\delta \in \mathfrak{M}$ такой, что $x \in \delta$, то говорят, что множество E *покрыто* системой интервалов $\mathfrak{M}$.

Теорема 7 (Э. Борель). *Если замкнутое ограниченное множество F покрыто бесконечной системой интервалов $\mathfrak{M}$, то из последней можно извлечь конечную систему $\mathfrak{M}^*$, также покрывающую множество F.*

Доказательство. Докажем теорему от противного. Допустим, что из $\mathfrak{M}$ *нельзя* извлечь никакой конечной системы интервалов, покрывающей множество F (отсюда, между прочим, вытекает, что множество F бесконечно).

Заключим F в некоторый сегмент $[a, b]$ (что возможно, поскольку F ограничено) и положим $c = \frac{a+b}{2}$.

Не может оказаться, чтобы каждое из множеств $F\cdot[a, c]$ и $F\cdot[c, b]$ могло быть покрыто конечным числом интервалов системы $\mathfrak{M}$, ибо в этом случае и все множество F покрывалось бы конечным числом этих интервалов. Значит, хоть один из сегментов $[a, c]$ и $[c, b]$ содержит часть F, не могущую быть покрытой конечной частью $\mathfrak{M}$. Обозначаем через $[a_1, b_1]$ тот из этих сегментов, который содержит такую часть F. При этом, если оба сегмента $[a, c]$ и $[c, b]$ содержат части F, не могущие быть покрытыми конечной частью $\mathfrak{M}$, то через $[a_1, b_1]$ обозначаем только один из них, какой — безразлично. Ясно, что множество $F\cdot[a_1, b_1]$ бесконечно.

Положим теперь $c_1=\frac{a_1+b_1}{2}$ и обозначим через $[a_2, b_2]$ тот из сегментов $[a_1, b_1]$ и $[c_1, b_1]$, который содержит часть множества F, не могущую быть покрытой конечным числом интервалов системы $\mathfrak{M}$; в том, что хоть один из сегментов $[a_1, c_1]$ и $[c_1, b_1]$ этим свойством обладает, мы убеждаемся так же, как и выше (если они оба им обладают, то через $[a_2, b_2]$ мы обозначаем только один из них).

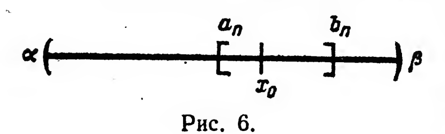


Рис. 6.

Продолжая этот процесс, мы построим последовательность вложенных сегментов $[a, b]\supset[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset\ldots$, обладающих тем свойством, что ни одно из множеств $F\cdot[a_n, b_n]$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ не может быть покрыто конечным числом интервалов системы $\mathfrak{M}$ (и, стало быть, каждое из этих множеств бесконечно).

Так как длина сегмента $[a_n, b_n]$, равная $\frac{b-a}{2^n}$, с возрастанием n стремится к нулю, то существует точка x_0, общая всем этим сегментам, причем $\lim a_n=\lim b_n=x_0$.

Покажем, что точка x_0 принадлежит нашему множеству F. С этой целью выберем в множестве $F\cdot[a_1, b_1]$ точку x_1, затем в (бесконечном) множестве $F\cdot[a_2, b_2]$ выберем точку x_2, отличную от x_1, затем в множестве $F\cdot[a_3, b_3]$ выберем точку x_3, отличную от x_1 и от x_2, и т. д.

В результате мы получим последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ различных точек множества F, причем $a_n\leqslant x_n\leqslant b_n$.

Но тогда, очевидно, $x_0=\lim x_n$, так что x_0 есть предельная точка множества F.

Но ведь множество F замкнуто, значит, действительно, $x_0\in F$.

Теперь уже легко закончить доказательство. Так как множество F покрыто системой $\mathfrak{M}$, то в системе $\mathfrak{M}$ существует интервал $\delta_0=(\alpha, \beta)$ такой, что $x_0\in\delta_0$.

Если n достаточно велико, то очевидно (рис. 6)

$$[a_n, b_n]\subset\delta_0,$$

и тем более

$$F\cdot[a_n, b_n]\subset\delta_0,$$

т. е. множество $F \cdot [a_n, b_n]$ покрывается *одним* интервалом из $\mathfrak{M}$, а это противоречит самому определению сегмента $[a_n, b_n]$, что и доказывает теорему.

Замечание. *Теорема перестает быть верной, если отбросить условие ограниченности или условие замкнутости множества F.*

В самом деле, рассмотрим, например, множество N всех натуральных чисел. Оно замкнуто (ибо $N' = 0$), но неограничено. Рассмотрим систему $\mathfrak{M}$ всех интервалов вида

$$\left(n - \frac{1}{3},\ n + \frac{1}{3}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

покрывающую множество N. Так как каждый из интервалов системы $\mathfrak{M}$ содержит *только одну* точку множества N, то ясно, что никакая конечная система этих интервалов не в состоянии покрыть *бесконечного* множества N. Итак, условие ограниченности существенно.

В качестве другого примера рассмотрим множество E всех чисел вида $1/n$

$$E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}.$$

Это множество ограничено, но не замкнуто.

Построим около каждой точки $1/n$ интервал δ_n, содержащий эту точку, но настолько малый, чтобы он не содержал никакой другой точки множества E, и обозначим через $\mathfrak{M}$ систему всех интервалов δ_n. Ясно, что система $\mathfrak{M}$ покрывает множество E, но те же соображения, что и в предыдущем примере, показывают, что E не покрывается никакой конечной частью $\mathfrak{M}$. Значит, условие замкнутости также существенно.

В заключение параграфа отметим одно свойство замкнутого множества, применение которого могло бы несколько сократить доказательство теоремы 7.

Теорема 8. *Пусть F замкнутое множество и*

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots \tag{*}$$

последовательность точек F. Если $\lim x_n = x_0$, то $x_0 \in F$.

В самом деле, если последовательность (*) содержит бесконечное множество различных точек, то x_0 есть предельная точка F и $x_0 \in F$, если же в последовательности (*) лишь конечное число различных точек, то, как легко понять, все члены последовательности, начиная с некоторого, совпадают с x_0 и $x_0 \in F$.

§ 3. Внутренние точки и открытые множества

Определение 1. Точка x_0 называется *внутренней точкой* множества F, если существует содержащий эту точку интервал (α, β), целиком содержащийся в множестве E:

$$x_0 \in (\alpha, \beta) \subset E.$$

Из самого определения ясно, что внутренняя точка множества E *принадлежит* этому множеству.

Определение 2. Множество E называется *открытым*, если все его точки суть внутренние точки.

Примеры.

1. Всякий интервал (a, b) есть открытое множество.
2. Множество Z всех вещественных чисел открыто.
3. Пустое множество 0 открыто.
4. Сегмент $[a, b]$ не есть открытое множество, ибо его концы не являются внутренними точками.

Теорема 1. *Сумма любого множества открытых множеств есть множество открытое.*

Доказательство. Пусть $S=\sum\limits_{\xi} G_{\xi}$, где все множества G_{ξ} открыты. Пусть $x_0 \in S$, тогда $x_0 \in G_{\xi_0}$ при некотором ξ_0. Так как G_{ξ_0} есть открытое множество, то существует такой интервал (α, β), что $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset G_{\xi_0}$, но тогда и подавно $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset S$, так что x_0 есть внутренняя точка S. Поскольку x_0 есть произвольная точка S, теорема доказана.

Следствие. *Любое множество, представимое в форме суммы интервалов, открыто.*

Теорема 2. *Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.*

Доказательство. Пусть $P=\prod\limits_{k=1}^{n} G_k$, где все G_k открыты. Если P пусто, теорема тривиальна. Допустим, что P не пусто, и пусть $x_0 \in P$.

Тогда $x_0 \in G_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ и для каждого k $(k=1, 2, \ldots, n)$ найдется интервал (α_k, β_k) такой, что

$$x_0 \in (\alpha_k, \beta_k) \subset G_k.$$

Положим, $\lambda=\max(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$; $\mu=\min(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, очевидно $x_0 \in (\lambda, \mu) \subset P$, т. е. x_0 есть внутренняя точка P.

Теорема доказана.

Замечание. *Пересечение бесконечного множества открытых множеств может и не быть открытым множеством.*

В самом деле, если

$$G_n=\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \qquad (n=1, 2, 3, \ldots),$$

то все G_n открыты, но пересечение их

$$\prod_{n=1}^{\infty} G_n=\{0\}$$

не есть открытое множество.

Определение 3. Пусть E и S два точечных множества. Если $E \subset S$, то множество $S - E$ называется *дополнением множества* E *до множества* S и обозначается так:

$$C_S E.$$

В частности, множество $C_Z E$ [где $Z = (-\infty, +\infty)$] называется просто *дополнением* множества E и обозначается через

$$CE.$$

С помощью понятия дополнения легко обнаружить связь между замкнутыми и открытыми множествами.

Теорема 3. *Если множество G открыто, то его дополнение CG замкнуто.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in G$, тогда существует такой интервал (α, β), что $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset G$.

Этот интервал вовсе не содержит точек CG, стало быть, x_0 не есть предельная точка множества CG, а потому точка, являющаяся предельной точкой множества CG, не может входить в G. Отсюда следует, что CG содержит все свои предельные точки.

Теорема 4. *Если множество F замкнуто, то его дополнение CF открыто.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in CF$. Тогда x_0 не является предельной точкой множества F и, следовательно, существует интервал (α, β), содержащий точку x_0 и не содержащий ни одной, отличной от x_0, точки F. Но так как и x_0 не входит в F, то в (α, β) вообще нет точек F, так что $(\alpha, \beta) \subset CF$ и x_0 есть внутренняя точка CF.

В качестве примера отметим, что каждое из взаимно дополнительных множеств Z и 0 одновременно и замкнуто и открыто.

Легко видеть, что 1) *если G открытое множество, а $[a, b]$ — содержащий его сегмент, то множество $[a, b] - G$ замкнуто* и что 2) *если F замкнутое множество, а (a, b) — содержащий его интервал, то множество $(a, b) - F$ открыто.*

Эти утверждения следуют из очевидных тождеств

$$[a, b] - G = [a, b] \cdot CG, \qquad (a, b) - F = (a, b) \cdot CF.$$

Напротив, если F замкнуто и $[a, b] \supset F$, то множество $[a, b] - F$ не является, вообще говоря, открытым. Пусть, например, $F = [0, 1]$ и $[a, b] = [0, 2]$, тогда $[a, b] - F = (1, 2]$.

В связи с этим полезно дать следующее определение.

Определение 4. Пусть E непустое ограниченное множество и $a = \inf E$, $b = \sup E$. Сегмент $S = [a, b]$ называется *наименьшим сегментом*, содержащим E.

Теорема 5. *Если S есть наименьший сегмент, содержащий ограниченное замкнутое множество F, то множество*

$$C_S F = [a, b] - F$$

открыто.

Доказательство. Очевидно, достаточно убедиться в справедливости тождества $C_S F = (a, b) \cdot CF$.

Пусть $x_0 \in C_S F$; это значит, что $x_0 \in [a, b]$, $x_0 \overline{\in} F$.

Но раз $x_0 \overline{\in} F$, то $x_0 \neq a$ и $x_0 \neq b$ (ибо по теореме 6 § 2 a и b входят в F). Значит $x_0 \in (a, b)$. Кроме того, x_0, очевидно, входит в CF, так что $C_S F \subset (a, b) \cdot CF$.

Обратное же включение очевидно. Теорема доказана.

§ 4. Расстояния и отделимость

Определение 1. Пусть x и y две точки числовой прямой. Число

$$|x - y|$$

называется *расстоянием между точками x и y* и обозначается через

$$\rho(x, y).$$

Очевидно, что $\rho(x, y) = \rho(y, x) \geqslant 0$, и что $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

Определение 2. Пусть x_0 некоторая точка и E непустое точечное множество. Точная нижняя граница расстояний между x_0 и точками множества E называется *расстоянием между точкой x и множеством E* и обозначается через $\rho(x_0, E)$ или $\rho(E, x_0)$

$$\rho(x_0, E) = \inf\{\rho(x_0, x)\} \qquad (x \in E).$$

Очевидно, $\rho(x_0, E)$ всегда существует и не отрицательно. Если $x_0 \in E$, то $\rho(x_0, E) = 0$, но обратное утверждение было бы неверно. Например, если $x_0 = 0$, а $E = (0, 1)$, то $\rho(x_0, E) = 0$, но $x_0 \overline{\in} E$.

Определение 3. Пусть A и B два непустых точечных множества. Точная нижняя граница расстояний между точками множества A и точками множества B называется *расстоянием между множествами A и B* и обозначается через $\rho(A, B)$

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y)\} \qquad (x \in A, \ y \in B).$$

Очевидно, что $\rho(A, B)$ существует всегда и что $\rho(A, B) = \rho(B, A) \geqslant 0$.

Если множества A и B пересекаются, то $\rho(A, B) = 0$, но обратное утверждение неверно. Например, если $A = (-1, 0)$, $B = (0, 1)$, то $\rho(A, B) = 0$, но $AB = 0$.

Заметим, что расстояние между точкой x_0 и множеством E есть не что иное, как расстояние между множеством E и множеством $\{x_0\}$, единственной точкой которого является x_0. Это замечание будет нам очень полезно.

Теорема 1. *Пусть A и B два непустых замкнутых множества, причем хоть одно из них ограничено. Тогда существуют такие точки*

$$x^* \in A, \quad y^* \in B,$$

что

$$\rho(x^*, y^*) = \rho(A, B).$$

Доказательство. По определению точной нижней границы, для каждого натурального n существуют две точки $x_n \in A$, $y_n \in B$ такие, что

$$\rho(A, B) \leqslant |x_n - y_n| < \rho(A, B) + \frac{1}{n}. \quad (1)$$

По условию одно из множеств A и B ограничено. Допустим, например, что это A. Тогда ограничена последовательность $\{x_n\}$ и по теореме Больцано — Вейерштрасса из нее выделяется сходящаяся подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots$

$$\lim x_{n_k} = x^*.$$

В силу замкнутости множества A, точка x^* должна принадлежать этому множеству, $x^* \in A$.

Рассмотрим последовательность $\{y_{n_k}\}$. Если $|x_{n_k}| < C$, то

$$|y_{n_k}| \leqslant |x_{n_k}| + |y_{n_k} - x_{n_k}| < C + \rho(A, B) + \frac{1}{n_k} \leqslant C + \rho(A, B) + 1.$$

Отсюда видно, что последовательность $\{y_{n_k}\}$ тоже ограничена, а значит и из нее выделяется подпоследовательность, имеющая предел

$$y_{n_{k_1}}, y_{n_{k_2}}, y_{n_{k_3}}, \ldots, \lim y_{n_{k_i}} = y^*.$$

При этом, благодаря замкнутости множества B, будет $y^* \in B$. Нетрудно видеть, что

$$|y^* - x^*| = \lim \left| y_{n_{k_i}} - x_{n_{k_i}} \right| = \rho(A, B),$$

чем и доказана теорема.

Покажем на примере, что теорема становится неверной, если оба множества A и B не ограничены.

Пусть $N = \{n\}$ и $M = \left\{n + \frac{1}{2n}\right\}$. Оба эти множества замкнуты ($N' = M' = 0$) и $\rho(N, M) = 0$, но так как $N \cdot M = 0$, то двух точек $x^* \in N$, $y^* \in M$, для которых было бы $\rho(x^*, y^*) = 0$, не существует. Ясно также, что если хоть одно из множеств A и B не замкнуто, то теорема также неверна, что видно хотя бы из примера $A = [1, 2)$, $B = [3, 5]$, где $\rho(A, B) = 1$.

Отметим несколько следствий доказанной теоремы.

Следствие 1. *Если A и B замкнуты, хоть одно из них ограничено и $\rho(A, B) = 0$, то A и B пересекаются.*

Следствие 2. *Пусть x_0 произвольная точка и F непустое замкнутое множество. Тогда в F есть точка x^*, для которой*

$$\rho(x_0, x^*) = \rho(x_0, F).$$

Следствие 3. *Если точка x_0 и замкнутое множество F таковы, что $\rho(x_0, F) = 0$, то $x_0 \in F$.*

Из доказанных результатов без труда выводится

Теорема 2. *Если замкнутое множество A непусто и отлично от всей прямой Z, то оно не может оказаться открытым.*

Доказательство. Пусть $A \neq 0$, $A \neq Z$, A замкнуто и A открыто. Тогда таково же и его дополнение $B = CA$. Пусть D отрезок, содержащий точки обоих множеств A и B. Обозначим через x и y точки, для которых $x \in AD$, $y \in BD$, $|x-y| = \rho(AD, BD) = d$, и положим $2z = x + y$. Тогда $z \in D$ и одно из соотношений $z \in AD$, $z \in BD$ выполняется. Пусть хотя бы $z \in AD$. Тогда $d = \rho(AD, BD) \leqslant |z-y| = d/2$, что нелепо, ибо $d > 0$.

Перейдем к установлению важной «теоремы отделимости». Предварительно докажем две простые леммы.

Лемма 1. *Пусть A непустое точечное множество и $d > 0$ — положительное число. Положим*[1])

$$B = Z(\rho(x, A) < d).$$

Тогда $A \subset B$ и B есть открытое множество.

Доказательство. Включение $A \subset B$ очевидно. Установим, что множество B открыто.

Пусть $x_0 \in B$. Тогда $\rho(x_0, A) < d$ и в A найдется такая точка x^*, что $\rho(x_0, x^*) < d$.

Положим $d - \rho(x_0, x^*) = h$ и покажем, что $(x_0 - h, x_0 + h)$ содержится в B. Отсюда будет следовать, что x_0 внутренняя точка B, а, стало быть, и то, что B открыто.

Возьмем произвольную точку $y \in (x_0 - h, x_0 + h)$. Тогда $|y - x_0| < h$, и так как $|x_0 - x^*| = d - h$, то

$$|y - x^*| \leqslant |y - x_0| + |x_0 - x^*| < h + (d - h) = d.$$

Значит, $\rho(y, x^*) < d$, и тем более $\rho(y, A) < d$, так что $y \in B$. Таким образом, действительно

$$(x_0 - h, x_0 + h) \subset B,$$

и лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть A_1 и A_2 два непустых множества, причем*

$$\rho(A_1, A_2) = r > 0.$$

Положим

$$B_1 = Z\left(\rho(x, A_1) < \frac{r}{2}\right), \quad B_2 = Z\left(\rho(x, A_2) < \frac{r}{2}\right).$$

Тогда

$$B_1 B_2 = 0.$$

Доказательство. Допустим, что $B_1 B_2 \neq 0$, и пусть $z \in B_1 B_2$. Тогда

$$\rho(z, A_1) < \frac{r}{2}, \quad \rho(z, A_2) < \frac{r}{2},$$

---

[1]) Смысл обозначения таков: «B есть множество тех точек x, для которых $\rho(x, A) < d$».

и найдутся точки $x_1 \in A_1$ и $x_2 \in A_2$ такие, что

$$|z-x_1|<\frac{r}{2}, \quad |z-x_2|<\frac{r}{2}, \text{ откуда } |x_1-x_2|<r$$

и, тем более, $\rho(A_1, A_2)<r$, что нелепо. Лемма доказана.

Теорема 3 (свойство отделимости). *Пусть F_1 и F_2 два не пересекающихся непустых замкнутых ограниченных множества. Существуют открытые множества G_1 и G_2 такие, что*

$$G_1 \supset F_1, \quad G_2 \supset F_2, \quad G_1G_2=0.$$

Доказательство. По следствию 1 теоремы 1 имеем $\rho(F_1, F_2)=r>0$. Остается положить

$$G_i=Z(\rho(x, F_i)<r/2) \quad (i=1, 2)$$

и применить леммы 1 и 2.

Заметим, между прочим, что условие ограниченности множеств F_1 и F_2 можно снять без нарушения справедливости теоремы, на чем мы, однако, не будем останавливаться. Напротив, условие замкнутости обоих множеств существенно, что видно хотя бы из примера $A=[0, 1)$, $B=[1, 2]$.

§ 5. Структура открытых и замкнутых ограниченных множеств

Определение 1. Пусть G открытое множество. Если интервал (a, b) содержится в G, но его концы этому множеству не принадлежат

$$(a, b) \subset G, \quad a \overline{\in} G, \quad b \overline{\in} G,$$

то мы будем называть этот интервал *составляющим интервалом*[1]) множества G.

Теорема 1. *Если G есть непустое ограниченное открытое множество, то каждая его точка принадлежит некоторому его составляющему интервалу.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in G$. Положим $F=[x_0, +\infty)\cdot CG$. Каждое из множеств $[x_0, +\infty)$ и CG замкнуто, а потому множество F также замкнуто. Кроме того, поскольку G ограничено, F не пусто. Наконец, ни одна точка множества F не лежит левее точки x_0, так что множество F ограничено снизу. В таком случае в этом множестве есть самая левая точка μ, причем, очевидно, $\mu \geqslant x_0$. Но $x_0 \in G$ и, стало быть, $x_0 \overline{\in} F$, так что $x_0 \neq \mu$, т. е. $x_0<\mu$.

Отметим далее, что $\mu \overline{\in} G$ (ибо $\mu \in F \subset CG$). Наконец, установим, что $[x_0, \mu) \subset G$. Допустим, напротив, что это не так. Тогда должна найтись такая точка y, что $y \in [x_0, \mu)$, $y \overline{\in} G$.

1) Этот термин вводится здесь впервые.

Но из этих соотношений вытекало бы, что $y \in F$, $y < \mu$, а это противоречит самому определению точки μ.

Итак, нами установлено существование точки μ со следующими тремя свойствами:

$$1)\ \mu > x_0,\ 2)\ \mu \overline{\in} G,\ 3)\ [x_0, \mu) \subset G.$$

Аналогично доказывается существование такой точки λ, что

$$1)\ \lambda < x_0,\ 2)\ \lambda \overline{\in} G,\ 3)\ (\lambda, x_0] \subset G.$$

Отсюда следует, что (λ, μ) есть составляющий интервал множества G, содержащий точку x_0, что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы следует и самое существование составляющих интервалов у каждого непустого ограниченного открытого множества.

Теорема 2. *Если (λ, μ) и (σ, τ) два составляющих интервала одного и того же открытого множества G, то они или тождественны, или не пересекаются.*

Доказательство. Допустим, что существует точка x, общая обоим интервалам (λ, μ) и (σ, τ): $\lambda < x < \mu$, $\sigma < x < \tau$.

Предположим, что $\tau < \mu$. Тогда, очевидно, $\tau \in (\lambda, \mu)$, но это явно невозможно, ибо $(\lambda, \mu) \subset G$, $\tau \overline{\in} G$. Значит $\mu \leqslant \tau$.

Но так как μ и τ совершенно равноправны, то по тем же соображениям $\tau \leqslant \mu$, а тогда $\tau = \mu$.

Аналогично устанавливается, что $\sigma = \lambda$, откуда следует, что интервалы (λ, μ) и (σ, τ) тождественны.

Следствие. *Множество различных составляющих интервалов непустого ограниченного открытого множества G конечно или счетно.*

Действительно, если мы выберем в каждом из этих интервалов по рациональной точке, то множество составляющих интервалов окажется поставленным во взаимнооднозначное соответствие с частью множества R всех рациональных чисел.

Все сказанное можно резюмировать в форме теоремы:

Теорема 3. *Каждое непустое ограниченное открытое множество G представимо в форме суммы конечного числа или счетного множества взаимно не налегающих интервалов, концы которых не принадлежат множеству G:*

$$G = \sum_k (\lambda_k, \mu_k) \qquad (\lambda_k \overline{\in} G,\ \mu_k \overline{\in} G).$$

Мы уже отмечали, что и обратно: всякое множество, представимое в форме интервалов, открыто.

Теорема 4. *Пусть G непустое ограниченное открытое множество и (a, b) — интервал, содержащийся в G. В таком случае среди составляющих интервалов множества G найдется такой, который содержит в себе интервал (a, b).*

Доказательство. Пусть $x_0 \in (a, b)$. Тогда $x_0 \in G$, и среди интервалов, составляющих множество G, найдется такой интервал (λ, μ), что $x_0 \in (\lambda, \mu)$.

Допустив, что $\mu < b$, мы получили бы, что $\mu \in (a, b)$, а это невозможно, потому что $\mu \overline{\in} G$. Значит, $b \leqslant \mu$.

Аналогично мы убедимся, что $\lambda \leqslant a$, а тогда $(a, b) \subset (\lambda, \mu)$, что и требовалось доказать.

Перейдем к изучению структуры замкнутых ограниченных множеств.

Пусть F такое множество и S наименьший сегмент, содержащий F. Как мы знаем, множество $C_S F$ открыто. Если это множество не пусто, то к нему применима теорема 3. Поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Непустое ограниченное замкнутое множество F или является сегментом, или получается из некоторого сегмента удалением конечного числа или счетного множества взаимно не налегающих интервалов, концы которых принадлежат множеству F.*

Совершенно ясно, что и обратно — всякое множество, получаемое из сегмента удалением некоторого множества интервалов, — замкнуто.

Отметим, что составляющие интервалы множества $C_S F$ называются *дополнительными* интервалами множества F.

Так как совершенное множество замкнуто, то и для него справедлива теорема 5. Остается выяснить, какие требования нужно наложить на дополнительные интервалы замкнутого множества, чтобы оно оказалось совершенным. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть F непустое ограниченное замкнутое множество и $S = [a, b]$ наименьший сегмгнт, содержащий F.*

Тогда

1. *Точка x_0, являющаяся общим концом двух дополнительных интервалов F, есть изолированная точка F.*

2. *Если точка a (или b) есть конец одного из дополнительных интервалов F, то она есть изолированная точка F.*

3. *Никаких других, кроме отмеченных в 1 и 2, изолированных точек F не имеет.*

Доказательство. Утверждения 1 и 2 очевидны. Докажем 3. Пусть x_0 есть изолированная точка F. Допустим сначала, что $a < x_0 < b$. По определению изолированной точки, существует содержащий эту точку интервал (α, β), в котором нет отличных от x_0 точек множества F, причем, очевидно, $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$.

Но тогда интервал (x_0, β) вовсе не содержит точек F, и, стало быть, $(x_0, \beta) \subset C_S F$. Согласно теореме 4, существует дополнительный интервал (λ, μ) множества F, содержащий интервал (x_0, β). Если бы было $\lambda < x_0$, то точка x_0 не принадлежала бы множеству F, поэтому необходимо, чтобы было $\lambda \geqslant x_0$. Но неравенство $\lambda > x_0$ противоречило бы тому, что $(x_0, \beta) \subset (\lambda, \mu)$.

Значит $\lambda = x_0$, т. е. x_0 является *левым концом* одного из дополнительных интервалов множества F.

Совершенно так же устанавливается, что x_0 служит и правым концом какого-то дополнительного интервала F, откуда и следует 3.

Случай $x_0 = a$ или $x_0 = b$ исчерпывается таким же образом.

Из этой теоремы вытекает следующая теорема:

Теорема 7. *Всякое непустое ограниченное совершенное множество P есть или сегмент, или получается из некоторого сегмента удалением конечного числа или счетного множества взаимно не налегающих интервалов, которые не имеют общих концов ни друг с другом, ни с исходным сегментом. Обратно, всякое множество, полученное этим способом, совершенно.*

Приведем интересный и важный пример совершенного множества.

Канторовы множества G_0 и P_0. Разделим сегмент $U = [0, 1]$ на три части точками 1/3 и 2/3 и удалим из него интервал (1/3, 2/3).

Рис. 7.

Каждый из двух оставшихся сегментов [0, 1/3] и [2/3, 1] разделим на три части (точками 1/9 и 2/9 для первого сегмента, и точками 7/9, 8/9 для второго) и удалим средние интервалы (1/9, 2/9), (7/9, 8/9). Далее делим на три равные части каждый из оставшихся четырех сегментов и удаляем из них средние интервалы (рис. 7). Этот процесс мы продолжаем неограниченно.

В результате из [0, 1] окажется удаленным открытое множество G_0, являющееся суммой счетного множества интервалов

$$G_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) + \left[\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) + \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right] + \ldots$$

Оставшееся множество P_0 оказывается (в силу теоремы 7) совершенным.

Множества G_0 и P_0 носят название канторовых множеств.

Нетрудно дать арифметическую характеристику этих множеств. С этой целью привлечем аппарат троичных дробей.

Какие точки попадают в первый из удаленных интервалов, т. е. в интервал (1/3, 2/3)? Ясно, что при разложении каждой из этих точек в троичную дробь $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ $(a_k = 0, 1, 2)$ необходимо окажется $a_1 = 1$.

Концы же этого интервала допускают каждый по два представления

$$\frac{1}{3} = \begin{cases} 0,100000\ldots \\ 0,022222\ldots \end{cases}; \quad \frac{2}{3} = \begin{cases} 0,12222\ldots \\ 0,20000\ldots \end{cases}$$

Все остальные точки сегмента [0, 1] при разложении в троичную дробь не могут иметь на первом месте после запятой единицу.

Итак, на первом шагу процесса построения множества G_0 из сегмента U удаляются те и только те точки, первый троичный знак которых необходимо есть 1.

Аналогично, мы установим, что на втором шагу удаляются те и только те точки, второй троичный знак которых необходимо есть единица, и т. д.

Поэтому после окончания процесса останутся неудаленными те и только те точки, которые *могут быть* изображены троичной дробью $0, a_1a_2a_3\ldots$, в которой ни одно из a_k не равно единице.

Короче говоря, множество G_0 состоит из точек, троичное разложение которых невозможно без помощи 1, а P_0 — из точек, для которых такое разложение возможно.

Следствие. *Канторово совершенное множество P_0 имеет мощность c.*

В самом деле

$$P_0 = \{0, a_1a_2a_3\ldots\}, \quad a_k = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases},$$

и дело сводится к следствию теоремы 8 § 4 гл. I.

Полученный результат показывает, что, кроме концов удаленных интервалов (которых есть только счетное множество), канторово множество P_0 содержит и другие точки. Примером такой «не концевой» точки служит любая дробь

$$0, a_1a_2a_3\ldots, \quad a_k = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases},$$

не содержащая 0 или 2 в периоде.

§ 6. Точки конденсации. Мощность замкнутого множества

В конце § 5 мы установили, что мощность канторова множества P_0 есть c. Оказывается, что это свойство присуще всем непустым совершенным множествам.

Теорема 1. *Всякое непустое совершенное множество P имеет мощность c.*

Доказательство. Пусть P непустое совершенное множество. Возьмем точку $x \in P$ и интервал δ, содержащий эту точку. Так как точка x не есть изолированная точка P, то множество $P\delta$ бесконечно.

Выберем в $P\delta$ две различные точки x_0 и x_1 и построим такие интервалы δ_0 и δ_1, чтобы при $i = 0, 1$ было:

$$1)\ x_i \in \delta_i, \quad 2)\ \delta_i \subset \delta, \quad 3)\ \bar{\delta}_0\bar{\delta}_1 = 0, \quad 4)\ m\delta_i < 1$$

($\bar{\delta}$ есть замыкание интервала δ, $m\delta$ есть длина δ).

Так как x_0 есть предельная точка множества P, то в интервале δ_0 есть бесконечное множество точек P. Выберем среди них

две различные точки $x_{0,0}$ и $x_{0,1}$ и построим такие интервалы $\delta_{0,0}$ и $\delta_{0,1}$, чтобы при $k=0,\ 1$ было

$$1)\ x_{0,k} \in \delta_{0,k},\quad 2)\ \delta_{0,k} \subset \delta_0,\quad 3)\ \bar{\delta}_{0,0} \cdot \bar{\delta}_{0,1} = 0,\quad 4)\ m\delta_{0,k} < \frac{1}{2}.$$

Аналогичное построение проделаем, исходя из точки x_1.

В результате у нас будут построены точки $x_{i,k}\ (i,\ k=0,\ 1)$ и интервалы $\delta_{i,k}$ такие, что

$$1)\ x_{i,k} \in P\delta_{i,k},\ 2)\ \delta_{i,k} \subset \delta_i,\ 3)\ \bar{\delta}_{i,k} \cdot \bar{\delta}_{i',k'} = 0,\ \text{если}\ (i,\ k) \neq (i',\ k'),$$
$$4)\ m\delta_{i,k} < \frac{1}{2}.$$

Продолжаем процесс построения дальше. После n-го шага у нас будут построены точки

$$x_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \qquad (i_k = 0,\ 1;\quad k = 1,\ 2,\ \ldots\ n)$$

и интервалы $\delta_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ такие, что

$$1)\ x_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \in P\delta_{i_1, i_2, \ldots, i_n},\ 2)\ \delta_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n} \subset \delta_{i_1, \ldots, i_{n-1}},$$
$$3)\ \bar{\delta}_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \cdot \bar{\delta}_{i'_1, i'_2, \ldots, i'_n} = 0\quad (\text{если}\ (i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_n) \neq (i'_1,\ i'_2,\ \ldots,\ i'_n)),$$
$$4)\ m\delta_{i_1, \ldots, i_n} < \frac{1}{n}.$$

Так как каждая точка $x_{i_1, \ldots, i_n}$ есть предельная точка множества P, то можно найти в множестве $P\delta^{i}_{1, \ldots, i_n}$ две различные точки $x_{i_1, \ldots, i_n, 0}$ и $x_{i_1, \ldots, i_n, 1}$ и построить интервалы $\delta_{i_1, \ldots, i_n, 0}$ и $\delta_{i_1, \ldots, i_n, 1}$ такие, что (при $i_{n+1} = 0,\ 1$)

$$1)\ x_{i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}} \subset \delta_{i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}},\ 2)\ \delta_{i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}} \subset \delta_{i_1, \ldots, i_n},$$
$$3)\ \bar{\delta}_{i_1, \ldots, i_n, 0} \cdot \bar{\delta}_{i_1, \ldots, i_n, 1} = 0,\ 4)\ m\delta_{i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}} < \frac{1}{n+1}.$$

Предположим, что этот процесс проведен для всех натуральных n.

Соотнесем каждой бесконечной последовательности

$$(i_1,\ i_2,\ i_3,\ \ldots) \qquad (i_k = 0,\ 1)$$

точку

$$z_{i_1, i_2, i_3, \ldots},$$

являющуюся единственной точкой пересечения последовательности вложенных сегментов

$$\bar{\delta}_{i_1} \cdot \bar{\delta}_{i_1, i_2} \cdot \bar{\delta}_{i_1, i_2, i_3} \cdots$$

Легко видеть, что точки $z_{i_1, i_2, i_3, \ldots}$ и $z_{i'_1, i'_2, i'_3, \ldots}$, отвечающие двум *различным* последовательностям

$$i_1,\ i_2,\ i_3,\ \ldots\ \text{и}\ i'_1,\ i'_2,\ i'_3,\ \ldots,$$

различны.

В самом деле, если n есть наименьшее из тех m, для которых $i_m \neq i'_m$, то

$$i_1 = i'_1, \quad i_2 = i'_2, \quad \ldots, \quad i_{n-1} = i'_{n-1}, \quad i_n \neq i'_n$$

и сегменты

$$\bar{\delta}_{i_1, \ldots, i_n} \text{ и } \bar{\delta}_{i'_1, \ldots, i'_n}$$

не пересекаются, откуда и следует, что

$$z_{i_1, i_2, i_3, \ldots} \neq z_{i'_1, i'_2, i'_3, \ldots}$$

Пусть $S = \{z_{i_1, i_2, i_3, \ldots}\}$. В силу теоремы 8, § 4, гл. I $\overline{\overline{S}} = c$. Но легко видеть, что $S \subset P$, откуда следует, что $\overline{\overline{P}} \geqslant c$.

С другой стороны, ясно, что $\overline{\overline{P}} \leqslant c$, откуда $\overline{\overline{P}} = c$, что и требовалось доказать.

Нашей ближайшей задачей будет перенесение полученного результата на произвольные замкнутые множества. Для этой цели полезно ввести (принадлежащее Э. Линделёфу) понятие «точки конденсации».

Определение. Точка x_0 называется *точкой конденсации* множества E, если всякий интервал (a, b), содержащий эту точку, содержит несчетное множество точек E.

Очевидно, что всякая точка конденсации какого-либо множества и подавно является его предельной точкой.

Теорема 2 (Э. Линделёф). *Если ни одна из точек множества E не является его точкой конденсации, то множество E разве лишь счетно.*

Доказательство. Назовем интервал (r, R) «правильным», если: 1) его концы r и R рациональны; 2) в этом интервале содержится разве лишь счетное множество точек множества E. Очевидно, что «правильных» интервалов существует разве лишь счетное множество, ибо вообще существует только счетное множество пар (r, R) рациональных чисел.

Установим, что каждая точка множества E (мы, естественно, предполагаем множество E непустым) содержится в некотором «правильном» интервале. Действительно, пусть $x \in E$. Так как x не есть точка конденсации множества E, то существует интервал (a, b), содержащий эту точку, и такой, что в нем имеется разве лишь счетное множество точек E. Если мы возьмем такие рациональные числа r и R, что $a < r < x < R < b$, то интервал (r, R) и будет «правильным» интервалом, содержащим точку x. Отсюда, кстати сказать, вытекает и самое существование «правильных» интервалов.

Перенумеруем все «правильные» интервалы $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$

Из доказанного только что предложения следует, что

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} E\delta_k.$$

В сумме, стоящей в правой части этого равенства, есть счетное множество слагаемых, каждое из которых, в свою очередь, разве лишь счетно. Отсюда и вытекает, что множество E также разве лишь счетно.

Следствие 1. *Если множество E несчетно, то существует хоть одна точка конденсации этого множества, принадлежащая ему.*

Интересно сопоставить это следствие с теоремой Больцано — Вейерштрасса. В то время как теорема Больцано — Вейерштрасса относится ко всякому бесконечному множеству, в настоящем следствии речь идет только о несчетных множествах. Зато здесь, в отличие от теоремы Больцано — Вейерштрасса, нет надобности требовать ограниченности множества E и, кроме факта существования точек конденсации, можно гарантировать существование таких точек конденсации, которые *входят* в множество E.

Следствие 2. *Пусть E точечное множество и P множество всех точек конденсации множества E. Тогда множество $E-P$ разве лишь счетно.*

Действительно, ни одна точка множества $E-P$, не будучи точкой конденсации E, и подавно не является точкой конденсации самого множества $E-P$.

Следствие 3. *Пусть множество E несчетно и P множество всех его точек конденсации. Тогда множество EP несчетно.*

В самом деле, $EP=E-(E-P)$, и дело сводится к теореме 10, § 3, гл. I.

Отметим, что следствие 3 покрывает собой следствие 1.

Теорема 3. *Пусть множество E несчетно. Тогда множество P всех точек конденсации множества E есть множество совершенное.*

Доказательство. Установим сначала замкнутость множества P. Пусть x_0 есть предельная точка этого множества. Возьмем произвольный интервал (a, b), содержащий точку x_0. В нем имеется хоть одна точка z множества P. Но тогда интервал (a, b), как интервал, содержащий точку конденсации множества E, содержит несчетное множество точек E. Так как (a, b) есть произвольный интервал, содержащий x_0, то x_0 оказывается точкой конденсации E и, стало быть, принадлежит P. Итак, множество P замкнуто.

Остается убедиться, что P не имеет изолированных точек. Пусть $x_0 \in P$ и (a, b) есть интервал, содержащий точку x_0. Тогда множество $Q=E\cdot(a, b)$ несчетно; а потому, в силу следствия 3 теоремы 2, в Q содержится несчетное множество точек конденсации множества Q. Но $Q \subset E$, а потому все точки конденсации множества Q суть и подавно точки конденсации E, так что в Q (а следовательно и в (a, b)) содержится несчетное множество точек P. Итак, любой интервал, содержащий точку x_0, содержит несчетное множество точек P, откуда следует, что $x_0 \in P'$. Теорема доказана.

Теорема 4 (Г. Кантор — И. Бендиксон). *Каждое несчетное замкнутое множество F представимо в форме*

$$F = P + D,$$

где P есть совершенное, а D разве лишь счетное множество.

Доказательство. В самом деле, если P есть множество точек конденсации множества F, то $P \subset F$ и $D = F - P$ разве лишь счетно.

Следствие. *Несчетное замкнутое множество имеет мощность c.*

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ II

1. Если $f(x)$ непрерывная функция, заданная на $[a, b]$, то множество точек, в которых $f(x) \geqslant c$, при любом c замкнуто.
2. Каждое замкнутое множество есть пересечение счетного множества открытых множеств.
3. Доказать, что интервал (a, b) нельзя представить в форме суммы счетного множества попарно непересекающихся замкнутых множеств.
4. Обобщить теорему отделимости на неограниченные замкнутые множества.
5. Доказать, что множество точек $[0, 1]$, десятичное разложение которых возможно без помощи цифры 7, совершенно.
6. Представить $[0, 1]$ в форме суммы c совершенных множеств без общих точек.
7. Доказать, что множество иррациональных чисел сегмента $[0, 1]$ нельзя представить в форме суммы счетного множества замкнутых множеств.
8. Построить на $[0, 1]$ функцию $\varphi(x)$, которая была бы разрывна в каждой рациональной и непрерывна в каждой иррациональной точке.
9. Доказать невозможность построения на $[0, 1]$ функции, непрерывной в каждой рациональной и разрывной в каждой иррациональной точке.
10. Если функция $f(x)$, заданная на $[a, b]$, такова, что множества $Z(f(x) \geqslant c)$ и $Z(f(x) \leqslant c)$, при любом c, замкнуты, то $f(x)$ непрерывна.
11. Если множество E покрыто произвольной системой интервалов $\mathfrak{M}$, то из последней можно выделить счетную подсистему $\mathfrak{M}^*$, покрывающую множество (Э. Линделёф).
12. Доказать, что множество внутренних точек любого множества открыто.

ГЛАВА III

ИЗМЕРИМЫЕ МНОЖЕСТВА

§ 1. Мера ограниченного открытого множества

В теории функций вещественной переменной большую роль играет понятие *меры* точечного множества, обобщающее понятие длины промежутка, площади прямоугольника, объема параллелепипеда и т. д. В этой главе мы изложим теорию измерения *линейных* ограниченных точечных множеств, принадлежащую А. Лебегу.

Так как наиболее простой структурой обладают открытые множества, то естественно начать именно с них.

Определение 1. *Мерой интервала* (a, b) называется его длина, т. е. $b-a$. Это число обозначается так:

$$m(a, b)=b-a.$$

Очевидно, что всегда $m(a, b)>0$.

Лемма 1. Если в интервале Δ содержится конечное число взаимно не налегающих интервалов $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, то

$$\sum_{k=1}^{n} m\delta_k \leqslant m\Delta.$$

Доказательство. Пусть $\Delta=(A, B)$, $\delta_k=(a_k, b_k)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

Не нарушая общности, можно считать, что интервалы δ_k перенумерованы в порядке возрастания левых концов, т. е. что $a_1<a_2<\ldots<a_n$.

Но тогда, очевидно, $b_k \leqslant a_{k+1}$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$, ибо иначе интервалы δ_k и δ_{k+1} налегали бы друг на друга. Поэтому сумма

$$Q=(B-b_n)+(a_n-b_{n-1})+\ldots+(a_2-b_1)+(a_1-A)$$

не отрицательна. Но очевидно, что $m\Delta=\sum_{k=1}^{n} m\delta_k+Q$, откуда и следует лемма.

Следствие. *Если на интервале Δ лежит счетное множество взаимно не налегающих интервалов δ_k $(k=1, 2, 3, \ldots)$, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} m\delta_k \leqslant m\Delta.$$

[Имея дело с положительным расходящимся рядом, мы приписываем ему сумму, равную $+\infty$; поэтому всякий положительный ряд имеет некоторую сумму. Неравенство $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < C$ (для положительного ряда) гарантирует его сходимость.]

Определение 2. *Мерой mG непустого открытого ограниченного множества G* называется сумма длин всех его составляющих интервалов δ_k:

$$mG = \sum_k m\delta_k.$$

(Не зная, конечно или счетно множество $\{\delta_k\}$, мы будем употреблять обозначение $\sum_k m\delta_k$, подразумевая, смотря по обстоятельствам, под этим символом $\sum_{k=1}^{n} m\delta_k$ или $\sum_{k=1}^{\infty} m\delta_k$.)

В силу вышеотмеченного следствия,

$$mG < +\infty.$$

Если множество G пусто, то мы, по определению, полагаем

$$mG = 0,$$

так что всегда $mG \geqslant 0$.

Если Δ есть интервал, содержащий в себе открытое множество G, то

$$mG \leqslant m\Delta,$$

что вытекает из того же следствия.

Пример (Канторово множество G_0). Построение Канторова множества G_0 состояло из ряда последовательных шагов.

На первом шагу брался интервал (1/3, 2/3) длины 1/3. На втором шагу к нему присоединялись два интервала: (1/9, 2/9) и (7/9, 8/9), длины 1/9 каждый.

На третьем шагу присоединялись еще четыре интервала, длины 1/27 каждый и т. д.

Таким образом

$$mG_0 = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots$$

Суммируя по известной формуле эту прогрессию, получаем

$$mG_0 = 1.$$

Теорема 1. *Пусть G_1 и G_2 два ограниченных открытых множества. Если $G_1 \subset G_2$, то*

$$mG_1 \leqslant mG_2.$$

Доказательство. Пусть δ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ и Δ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ суть, соответственно, составляющие интервалы множеств G_1 и G_2.

В силу теоремы 4, § 5, гл. II, каждый из интервалов δ_i содержится в одном (и только одном) из интервалов Δ_k.

Поэтому множество $\{\delta_i\}$ можно разбить на ряд взаимно не пересекающихся подмножеств $A_1, A_2, A_3, \ldots$, относя δ_i в A_k в том случае, когда $\delta_i \subset \Delta_k$.

Тогда, пользуясь известными свойствами двойных рядов, мы можем написать

$$mG_1 = \sum_i m\delta_i = \sum_k \left(\sum_{\delta_i \in A_k} m\delta_i \right).$$

Но, в силу следствия леммы 1,

$$\sum_{\delta_i \in A_k} m\delta_i \leqslant m\Delta_k, \quad \text{откуда} \quad mG_1 \leqslant \sum_k m\Delta_k = mG_2,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Мера открытого ограниченного множества G есть точная нижняя граница мер всевозможных открытых ограниченных множеств, содержащих G.*

Теорема 2. *Если открытое ограниченное множество G является суммой конечного числа или счетного множества взаимно не налегающих открытых множеств*

$$G = \sum_k G_k \quad (G_k G_{k'} = 0, \ k \neq k'),$$

то

$$mG = \sum_k mG_k.$$

Это свойство меры называется *полной аддитивностью.*

Доказательство. Пусть $\delta_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ суть составляющие интервалы множества G_k. Покажем, что каждый из них является составляющим интервалом суммы G.

В самом деле, то обстоятельство, что $\delta_i^{(k)} \subset G$, очевидно. Остается убедиться, что концы интервала $\delta_i^{(k)}$ не принадлежат G. Допустим, что, например, правый конец интервала $\delta_i^{(k)}$ принадлежит G. Тогда этот правый конец (обозначим его через μ) должен принадлежать какому-нибудь из слагаемых множеств. Пусть $\mu \in G_{k'}$. (Очевидно $k' \neq k$, ибо множеству G_k точка μ заведомо не принадлежит.) Но множество $G_{k'}$ открыто и, стало быть, точка μ принадлежит одному из составляющих интервалов этого множества $\mu \in \delta_{i'}^{(k')}$. Однако это влечет за собой то, что интервалы $\delta_i^{(k)}$ и $\delta_{i'}^{(k')}$ пересекаются, последнее же противоречит условию $G_k G_{k'} = 0$.

Итак, действительно, каждый из $\delta_i^{(k)}$ есть составляющий интервал множества G. С другой стороны, каждая точка G принадлежит хоть одному $\delta_i^{(k)}$. Наконец, все эти интервалы различны. Таким образом, множество

$$\left\{\delta_i^{(k)}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots; \quad k = 1, 2, \ldots)$$

есть множество всех составляющих интервалов суммы G.

Установив это, уже легко закончить доказательство:

$$mG = \sum_{i,\,k} m\delta_i^{(k)} = \sum_k \left(\sum_i m\delta_i^{(k)}\right) = \sum_k mG_k,$$

что и требовалось доказать.

Для того чтобы перенести теорему (соответственно изменив ее) на случай суммы пересекающихся слагаемых, нам понадобятся две простые леммы.

Лемма 2. *Пусть сегмент* $[P, Q]$ *покрыт конечной системой* H *интервалов* (λ, μ). *Тогда*

$$Q - P < \sum_H m(\lambda, \mu).$$

Доказательство. Выделим из системы H некоторую ее часть H^*, которая строится следующим образом: обозначим через (λ_1, μ_1) какой-нибудь из интервалов системы H, содержащих точку P

$$\lambda_1 < P < \mu_1$$

(хоть один такой интервал существует). Если окажется, что $\mu_1 > Q$, то интервал (λ_1, μ_1) и составляет требуемую систему H^*.

Если же $\mu_1 \leqslant Q$, то $\mu_1 \in [P, Q]$, и можно в системе H найти интервал (λ_2, μ_2), содержащий точку μ_1,

$$\lambda_2 < \mu_1 < \mu_2.$$

Если окажется, что $\mu_2 > Q$, то процесс окончен, и интервалы (λ_1, μ_1) и (λ_2, μ_2) и составляют систему H^*.

Если же $\mu_2 \leqslant Q$, то $\mu_2 \in [P, Q]$, и можно в системе H найти интервал (λ_3, μ_3), содержащий μ_2,

$$\lambda_3 < \mu_2 < \mu_3.$$

Если $\mu_3 > Q$, то процесс закончен, а если $\mu_3 \leqslant Q$, то продолжаем наш процесс.

Но ведь множество H по условию конечно, а наш процесс состоит в выделении из H все новых и новых интервалов, ибо

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \ldots$$

Поэтому процесс обязательно должен закончится, а конец его состоит в том, что какая-то из точек μ_k окажется лежащей правее точки Q.

Пусть $\mu_n > Q$, но $\mu_{n-1} \leqslant Q$, т. е. процесс заканчивается после n-го шага.

Тогда интервалы (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2), ..., (λ_n, μ_n) и составляют систему H^*. При этом $\lambda_{k+1} < \mu_k$ $(k = 1, 2, \ldots n-1)$.

Значит

$$\sum_{k=1}^{n} (\mu_k - \lambda_k) > \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) + (\mu_n - \lambda_n) = \mu_n - \lambda_1,$$

а так как $\mu_n - \lambda_1 > Q - P$, то $Q - P < \sum_{k=1}^{n} (\mu_k - \lambda_k)$, откуда и подавно

$$Q - P < \sum_{H} (\mu - \lambda).$$

Лемма 3. *Пусть интервал Δ есть сумма конечного или счетного множества открытых множеств*

$$\Delta = \sum_k G_k.$$

Тогда

$$m\Delta \leqslant \sum_k mG_k.$$

Доказательство. Пусть $\Delta = (A, B)$ и пусть составляющие интервалы множества G_k суть $\delta_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Возьмем положительное число $\varepsilon \left(0 < \varepsilon < \frac{B-A}{2}\right)$ и рассмотрим сегмент $[A + \varepsilon, B - \varepsilon]$, содержащийся в интервале Δ.

Этот сегмент покрыт системой интервалов $\delta_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots; k = 1, 2, \ldots)$. Применяя к этой системе теорему Бореля о конечном покрытии из § 2, гл. II, мы получим некоторую конечную систему

$$\delta_{i_s}^{(k_s)} \qquad (s = 1, 2, \ldots n),$$

покрывающую сегмент $[A + \varepsilon, B - \varepsilon]$. В силу предыдущей леммы, $B - A - 2\varepsilon < \sum_{s=1}^{n} m\delta_{i_s}^{(k_s)}$, откуда и подавно

$$B - A - 2\varepsilon < \sum_{i,k} m\delta_i^{(k)} = \sum_k \left(\sum_i m\delta_i^{(k)}\right) = \sum_k mG_k.$$

Так как число ε произвольно мало, то

$$B - A \leqslant \sum_k mG_k,$$

и лемма доказана.

Теорема 3. *Если открытое ограниченное множество G является суммой конечного числа или счетного множества открытых множеств G_k, $G = \sum_k G_k$, то*

$$mG \leqslant \sum_k mG_k.$$

Доказательство. Пусть Δ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ суть составляющие интервалы суммы G. Тогда $mG = \sum_i m\Delta_i$.

Но $\Delta_i = \Delta_i \sum_k G_k = \sum_k (\Delta_i G_k)$, откуда, в силу леммы 3, $m\Delta_i \leqslant \sum_k m(\Delta_i G_k)$ и, стало быть,

$$mG \leqslant \sum_i \left[\sum_k m(\Delta_i G_k)\right] = \sum_k \left[\sum_i m(\Delta_i G_k)\right]. \qquad (*)$$

С другой стороны $G_k = G_k \cdot \sum_i \Delta_i = \sum_i (\Delta_i G_k)$.

При этом (что является здесь основным) отдельные слагаемые правой части взаимно *не пересекаются* (потому что $\Delta_i \Delta_{i'} = 0$ при $i \neq i'$). Значит, мы находимся в условиях применимости теоремы 2, а потому

$$\sum_i m(\Delta_i G_k) = mG_k. \qquad (*_*)$$

Сопоставляя (*) и ($*_*$), мы и получаем теорему.

§ 2. Мера ограниченного замкнутого множества

Пусть F непустое ограниченное замнутое множество и S наименьший сегмент, содержащий множество F. Как известно (теорема 5, § 3, гл. II), множество $C_S F$ открыто и потому имеет определенную меру $m[C_S F]$. Это дает возможность установить следующее определение.

Определение 1. *Мерой непустого ограниченного замкнутого множества* F называется число

$$mF = B - A - m[C_S F],$$

где $S = [A, B]$ есть наименьший сегмент, содержащий множество F.

Для пустого замкнутого множества меру определять не нужно, ибо такое множество открыто и мерой его мы уже условились считать число 0. Кроме того (по теореме 2 § 4 гл. II), непустое замкнутое ограниченное множество не может оказаться открытым множеством, так что нет надобности ставить вопрос о связи определений меры открытого и замкнутого множества.

Рассмотрим некоторые примеры.

1. $F = [a, b]$. В этом случае, очевидно, $S = [a, b]$ и $C_S F = 0$, так, что $m[a, b] = b - a$, т. е. *мера сегмента равна его длине.*

2. F есть сумма конечного числа попарно не пересекающихся сегментов $F = [a_1, b_1] + [a_2, b_2] + \ldots + [a_n, b_n]$.

Можно считать, что сегменты перенумерованы в порядке возрастания левых концов; тогда, очевидно,

$$b_k < a_{k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots n-1),$$

откуда следует, что

$$S = [a_1, b_n], \qquad C_S F = (b_1, a_2) + (b_2, a_3) + \ldots + (b_{n-1}, a_n).$$

Стало быть,

$$mF = b_n - a_1 - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - b_k) = \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k),$$

т. е. *мера суммы конечного числа попарно не пересекающихся сегментов равна сумме длин этих сегментов.*

3. Пусть $F = P_0$ (Канторово совершенное множество). В этом случае $S = [0, 1]$ и $C_S F = G_0$, откуда

$$mP_0 = 1 - 1 = 0,$$

т. е. *Канторово совершенное множество P_0 имеет меру нуль.* Этот факт интересно сопоставить с тем, что мощность множества P_0 есть c.

Теорема 1. *Мера ограниченного замкнутого множества F не отрицательна.*

Доказательство. Действительно, если пользоваться обозначениями определения 1, то очевидно $C_S F \subset (A, B)$, и по теореме 1, § 1, $m[C_S F] \leqslant m(A, B) = B - A$, откуда и следует, что $mF \geqslant 0$.

Лемма. *Пусть F ограниченное замкнутое множество, содержащееся в интервале Δ, тогда*

$$mF = m\Delta - m[C_\Delta F].$$

Доказательство. Множество $C_\Delta F$ — открыто, так что лемма имеет смысл. Пусть $\Delta = (A, B)$, а наименьший сегмент, содержащий множество F, есть $S = [a, b]$ (рис. 8).

Тогда легко видеть, что $C_\Delta F = C_\Delta S + C_S F$.



Рис. 8.

Оба слагаемые правой части открыты и взаимно не налегают. Значит, по свойству аддитивности меры (теорема 2, § 1) будет $m[C_\Delta F] = m[C_\Delta S] + m[C_S F]$.

Но, очевидно, $C_\Delta S = (A, a) + (b, B)$, откуда

$$m[C_\Delta S] = (a - A) + (B - b),$$

и следовательно,

$$m[C_\Delta F] = (B - A) - (b - a) + m[C_S F],$$

что и доказывает лемму.

Теорема 2. *Пусть F_1 и F_2 два ограниченных замкнутых множества. Если $F_1 \subset F_2$, то $mF_1 \leqslant mF_2$.*

Доказательство. Пусть Δ есть интервал, содержащий множество F_2. Тогда легко проверить, что $C_\Delta F_1 \supset C_\Delta F_2$, и, стало

быть, $m[C_\Delta F_1] \geqslant m[C_\Delta F_2]$, так что дело сводится к предыдущей лемме.

Следствие. *Мера ограниченного замкнутого множества F есть точная верхняя граница мер всевозможных замкнутых множеств, содержащихся* в F.

Теорема 3. *Пусть F замкнутое множество, а G открытое ограниченное множество. Если $F \subset G$, то $mF \leqslant mG$.*

Доказательство. Пусть Δ есть интервал, содержащий множество G. Легко видеть, что $\Delta = G + C_\Delta F$, откуда, в силу теоремы 3, § 1, получаем, что $m\Delta \leqslant mG + m[C_\Delta F]$, и дело сводится к лемме.

Теорема 4. *Мера открытого ограниченного множества G есть точная верхняя граница мер всевозможных замкнутых множеств, содержащихся в G.*

Доказательство. В силу предыдущей теоремы, mG есть верхняя граница мер замкнутых множеств $F \subset G$, и надо доказать, что меры этих замкнутых множеств могут быть сколь угодно близки к mG.

Пусть составляющие интервалы множества G суть (λ_k, μ_k) $(k = 1, 2, \ldots)$, так что $mG = \sum (\mu_k - \lambda_k)$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем столь большое натуральное n, чтобы оказалось $\sum_{k=1}^{n} (\mu_k - \lambda_k) > mG - \frac{\varepsilon}{2}$.

Затем для каждого k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ найдем такой сегмент $[\alpha_k, \beta_k]$, чтобы было

$$[\alpha_k, \beta_k] \subset (\lambda_k, \mu_k), \quad m[\alpha_k, \beta_k] > m(\lambda_k, \mu_k) - \frac{\varepsilon}{2n},$$

(для чего достаточно взять такое η_k, что

$$0 < \eta_k < \min\left[\frac{\mu_k - \lambda_k}{2}, \frac{\varepsilon}{4n}\right],$$

и положить $\alpha_k = \lambda_k + \eta_k$, $\beta_k = \mu_k - \eta_k$). Положим, наконец,

$$F_0 = \sum_{k=1}^{n} [\alpha_k, \beta_k].$$

Тогда, очевидно, $F_0 \subset G$, F_0 замкнуто, и

$$mF_0 = \sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \alpha_k) > \sum_{k=1}^{n} (\mu_k - \lambda_k) - \frac{\varepsilon}{2} > mG - \varepsilon.$$

Так как ε произвольно мало, то теорема доказана.

Теорема 5. *Мера замкнутого ограниченного множества F есть точная нижняя граница мер всевозможных открытых ограниченных множеств, содержащих F.*

Доказательство. Как и выше, достаточно показать, что можно построить открытое ограниченное множество, содержащее множество F и имеющее меру, сколь угодно близкую к mF.

С этой целью возьмем интервал Δ, содержащий множество F, и рассмотрим открытое множество $C_\Delta F$. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, мы можем (в силу теоремы 4) найти замкнутое множество Φ такое, что $\Phi \subset C_\Delta F$, $m\Phi > m[C_\Delta F] - \varepsilon$.

Положим $G_0 = C_\Delta \Phi$. Легко видеть, что G_0 есть открытое множество, содержащее F. Вместе с тем

$$mG_0 = m\Delta - m\Phi < m\Delta - m[C_\Delta F] + \varepsilon = mF + \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть ограниченное замкнутое множество F есть сумма конечного числа взаимно не пересекающихся замкнутых множеств*

$$F = \sum_{k=1}^{n} F_k \quad (F_k F_{k'} = 0, \quad k \neq k').$$

Тогда

$$mF = \sum_{k=1}^{n} mF_k.$$

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть случай двух слагаемых $F = F_1 + F_2$ $(F_1 F_2 = 0)$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и подберем два ограниченных открытых множества G_1 и G_2 так, чтобы оказалось

$$G_i \supset F_i, \qquad mG_i < mF_i + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (i = 1, 2),$$

что возможно в силу предыдущей теоремы.

Положим $G = G_1 + G_2$.

Тогда G есть открытое ограниченное множество, содержащее множество F. Значит,

$$mF \leqslant mG \leqslant mG_1 + mG_2 < mF_1 + mF_2 + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε, отсюда следует, что

$$mF \leqslant mF_1 + mF_2. \qquad (*)$$

С другой стороны, в силу теоремы отделимости, существуют такие открытые множества B_1 и B_2, что

$$B_i \supset F_i \quad (i = 1, 2), \quad B_1 B_2 = 0.$$

Отметив это, возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое открытое ограниченное множество G, что $G \supset F$, $mG < mF + \varepsilon$.

Тогда множества $B_1 G$ и $B_2 G$ суть открытые ограниченные взаимно не пересекающиеся множества, содержащие, соответственно, множества F_1 и F_2.

Значит,

$$mF_1 + mF_2 \leqslant m(B_1 G) + m(B_2 G) = m[B_1 G + B_2 G]$$

(здесь мы воспользовались аддитивностью меры для открытых множеств). Но $B_1G + B_2G \subset G$, откуда

$$mF_1 + mF_2 \leqslant mG < mF + \varepsilon$$

и в силу произвольности ε,

$$mF_1 + mF_2 \leqslant mF. \qquad (*_*)$$

Сопоставляя (*) и ($*_*$), получим

$$mF = mF_1 + mF_2,$$

что и требовалось доказать.

§ 3. Внешняя и внутренняя меры ограниченного множества

Определение 1. *Внешней мерой m^*E ограниченного множества E* называется точная нижняя граница мер всевозможных открытых ограниченных множеств, содержащих множество E:

$$m^*E = \inf_{G \supset E} \{mG\}.$$

Очевидно, для всякого ограниченного множества E существует внешняя мера, причем $0 \leqslant m^*E < +\infty$.

Определение 2. *Внутренней мерой m_*E ограниченного множества E* называется точная верхняя граница мер всевозможных замкнутых множеств, содержащихся в множестве E:

$$m_*E = \sup_{F \subset E} \{mF\}.$$

Очевидно, что всякое ограниченное множество E имеет внутреннюю меру, причем $0 \leqslant m_*E < +\infty$.

Теорема 1. *Если G есть открытое ограниченное множество, то*

$$m^*G = m_*G = mG.$$

Теорема вытекает из следствия теоремы 1, § 1 и теоремы 4, § 2.

Теорема 2. *Если F есть замкнутое ограниченное множество, то*

$$m^*F = m_*F = mF.$$

Теорема вытекает из следствия теоремы 2 и теоремы 5, § 2.

Теорема 3. *Для всякого ограниченного множества E*

$$m_*E \leqslant m^*E.$$

Доказательство. Пусть G ограниченное открытое множество, содержащее множество E. Какое бы замкнутое подмножество F множества E ни взять, будет $F \subset G$ и, в силу теоремы 3, § 2, $mF \leqslant mG$. Отсюда $m_*E \leqslant mG$. Но так как это верно для всякого открытого ограниченного множества G, содержащего E, то $m_*E \leqslant m^*E$, что и требовалось доказать.

Теорема 4. Пусть A и B суть ограниченные множества. Если $A \subset B$, то

$$m_*A \leqslant m_*B, \quad m^*A \leqslant m^*B.$$

Доказательство. Оба неравенства доказываются аналогично. Остановимся для примера на первом из них.

Пусть S есть множество, состоящее из мер всевозможных замкнутых подмножеств множества A, а T такое же множество для множества B. Тогда $m_*A = \sup S$, $m_*B = \sup T$.

Пусть F есть замкнутое подмножество A, тогда и подавно F является подмножеством множества B. Отсюда следует, что $S \subset T$, и теорема вытекает из того известного факта, что точная верхняя граница подмножества какого-либо множества не превосходит точной верхней границы самого этого множества.

Теорема 5. Если ограниченное множество E есть сумма конечного числа или счетного множества множеств E_k

$$E = \sum_k E_k, \quad \text{то} \quad m^*E \leqslant \sum_k m^*E_k.$$

Доказательство. Теорема тривиальна в случае расходимости ряда $\sum m^*E_k$. Предположим, что этот ряд сходится. Взяв произвольное $\varepsilon > 0$, мы можем найти такие открытые ограниченные множества G_k, что

$$G_k \supset E_k, \quad mG_k < m^*E_k + \frac{\varepsilon}{2^k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Назовем через Δ какой-нибудь интервал, содержащий множество E. Тогда $E \subset \Delta \sum\limits_k G_k$, откуда, в силу теоремы 3, § 1,

$$m^*E \leqslant m\left[\Delta \sum_k G_k\right] = m\left[\sum_k \Delta G_k\right] \leqslant \sum_k m(\Delta G_k) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_k mG_k \leqslant \sum_k m^*E_k + \varepsilon,$$

и теорема вытекает из произвольности числа ε.

Теорема 6. Если ограниченное множество E есть сумма конечного числа или счетного множества взаимно не налегающих множеств E_k

$$E = \sum_k E_k \qquad (E_k E_{k'} = 0, \ k \neq k'),$$

то

$$m_*E \geqslant \sum_k m_*E_k.$$

Доказательство. Рассмотрим первые n множеств $E_1, E_2, \ldots$ $\ldots, E_n$. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие замкнутые множества F_k, что

$$F_k \subset E_k, \quad mF_k > m_*E_k - \frac{\varepsilon}{n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Множества F_k попарно не пересекаются и сумма их $\sum_{k=1}^{n} F_k$ замкнута. Отсюда, применяя теорему 6, § 2, получим

$$m_*E \geqslant m\left[\sum_{k=1}^{n} F_k\right] = \sum_{k=1}^{n} mF_k > \sum_{k=1}^{n} m_*E_k - \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\sum_{k=1}^{n} m_*E_k \leqslant m_*E$.

Этим теорема доказана для случая конечного числа слагаемых множеств. Если же этих множеств имеется счетное множество, то, опираясь на произвольность числа n, мы установим сходимость ряда $\sum m_*E_k$ и неравенство $\sum_{k=1}^{\infty} m_*E_k \leqslant m_*E$.

Легко видеть, что теорема перестает быть справедливой, если отбросить условие отсутствия общих точек у множеств E_k. Например, если $E_1 = [0, 1]$, $E_2 = [0, 1]$, $E = E_1 + E_2$, то $m_*E = 1$, $m_*E_1 + m_*E_2 = 2$.

Теорема 7. *Пусть E ограниченное множество. Если Δ есть интервал, содержащий это множество, то*

$$m^*E + m_*[C_\Delta E] = m\Delta.$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое замкнутое множество F, что $F \subset C_\Delta E$, $mF > m_*[C_\Delta E] - \varepsilon$.

Если мы положим $G = C_\Delta F$, то множество G будет открытым ограниченным множеством, содержащим множество E, откуда, с помощью леммы § 2, находим

$$m^*E \leqslant mG = m\Delta - mF < m\Delta - m_*[C_\Delta E] + \varepsilon.$$

Отсюда, в силу произвольности ε, следует, что

$$m^*E + m_*[C_\Delta E] \leqslant m\Delta.$$

Для того чтобы получить обратное неравенство

$$m^*E + m_*[C_\Delta E] \geqslant m\Delta, \tag{*}$$

приходится рассуждать тоньше.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем такое открытое ограниченное множество G_0, что $G_0 \supset E$, $mG_0 < m^*E + \frac{\varepsilon}{3}$.

Назовем концы интервала Δ через A и B и построим такой содержащийся в Δ интервал (a, b), что

$$A < a < A + \frac{\varepsilon}{3}, \quad B - \frac{\varepsilon}{3} < b < B.$$

Сделав это, положим $G = \Delta G_0 + (A, a) + (b, B)$.

Множество G открыто, ограничено, содержит E и таково, что $mG < m^*E + \varepsilon$.

Но кроме того (и это здесь основное) множество $F=C_\Delta G$ оказывается *замкнутым*, что вытекает из легко проверяемого тождества $F=[a, b]\cdot CG$.

Так как $F\subset C_\Delta E$, то $m_*[C_\Delta E]\geqslant mF=m\Delta - mG > m\Delta - m^*E-\varepsilon$. Отсюда, в силу произвольности ε, следует неравенство (*), а с ним и теорема.

Следствие. *В обозначениях теоремы будет*

$$m^*[C_\Delta E]-m_*[C_\Delta E]=m^*E-m_*E.$$

В самом деле, если мы переменим роли множеств E и $C_\Delta E$, то получим, что $m^*[C_\Delta E]+m_*E=m\Delta$, откуда

$$m^*[C_\Delta E]+m_*E=m^*E+m_*[C_\Delta E],$$

а это равносильно доказываемому утверждению.

§ 4. Измеримые множества

Определение. Ограниченное множество E называется *измеримым*, если его внешняя и внутренняя меры равны друг другу:

$$m^*E=m_*E.$$

Их общее значение называется *мерой множества* E и обозначается через mE:

$$mE=m^*E=m_*E.$$

Этот способ определения понятия меры принадлежит Лебегу, в связи с чем иногда измеримое множество называют множеством «измеримым в смысле Лебега», или, короче, «измеримым (L)».

Если множество E неизмеримо, то о его мере нельзя говорить, и символ mE для нас лишен смысла. В частности, неизмеримыми мы считаем все неограниченные множества. [1])

Теорема 1. *Открытое ограниченное множество измеримо и его вновь определенная мера совпадает с мерой, введенной в* § 1.

Этот результат есть непосредственное следствие теоремы 1, § 3. Точно также из теоремы 2, § 3 вытекает следующая теорема:

Теорема 2. *Замкнутое ограниченное множество измеримо и его вновь определенная мера совпадает с введенной в* § 2.

Из следствия теоремы 7, § 3 вытекает:

Теорема 3. *Если E есть ограниченное множество, содержащееся в интервале Δ, то множества E и $C_\Delta E$ одновременно измеримы или нет.*

Из сопоставления теорем 5 и 6, § 3 следует:

---

[1]) В гл. XVII понятие измеримости обобщается на некоторые н е о г р а н и ч е н н ы е множества.

Теорема 4. *Если ограниченное множество E есть сумма конечного числа или счетного множества измеримых множеств, попарно не имеющих точек,*

$$E=\sum_k E_k \qquad (E_kE_{k'}=0,\ k\neq k'),$$

то множество E измеримо и

$$mE=\sum_k mE_k.$$

Доказательство вытекает из следующей цепи неравенств:

$$\sum_k mE_k=\sum_k m_*E_k\leqslant m_*E\leqslant m^*E\leqslant\sum_k m^*E_k=\sum_k mE_k.$$

Доказанное свойство меры называется ее *полной аддитивностью*.

В последней теореме существенно было, что отдельные слагамые попарно не пересекаются. Избавимся от этого ограничения, пока, впрочем, для случая конечного числа слагаемых множеств.

Теорема 5. *Сумма конечного числа измеримых множеств есть измеримое множество.*

Доказательство. Пусть $E=\sum_{k=1}^{n} E_k$, причем множества E_k $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ измеримы.

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и построим для каждого k такое замкнутое множество F_k и такое открытое ограниченное множество G_k, чтобы было

$$F_k\subset E_k\subset G_k,\quad mG_k-mF_k<\frac{\varepsilon}{n}\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Сделав это, положим $F=\sum_{k=1}^{n} F_k$, $G=\sum_{k-1}^{n} G_k$.

Очевидно, что множество F замкнуто, а G открыто и ограничено, и что $F\subset E\subset G$, откуда следует, что

$$mF\leqslant m_*E\leqslant m^*E\leqslant mG. \qquad (*)$$

Но множество $G-F$ открыто (ибо его можно представить в форме $G\cdot CF$) и ограничено. Значит, это множество измеримо. Множество F также измеримо, а потому, поскольку

$$G=F+(G-F)$$

и множества F и $G-F$ не пересекаются, можно применить предыдущую теорему, что дает $mG=mF+m(G-F)$, откуда

$$m(G-F)=mG-mF.$$

Аналогично мы установим, что

$$m(G_k-F_k)=mG_k-mF_k\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Отметим теперь легко проверяемое включение

$$G-F \subset \sum_{k=1}^{n} (G_k - F_k).$$

Все входящие сюда множества открыты и ограничены, так что, на основании теорем § 1, мы имеем

$$m(G-F) \leqslant \sum_{k=1}^{n} m(G_k - F_k),$$

или

$$mG - mF \leqslant \sum_{k=1}^{n} [mG_k - mF_k] < \varepsilon.$$

Отсюда и из (*) вытекает, что $m^*E - m_*E < \varepsilon$, а так как ε сколь угодно мало, то

$$m^*E = m_*E.$$

Теорема 6. *Пересечение конечного числа измеримых множеств измеримо.*

Доказательство. Пусть $E = \prod_{k=1}^{n} E_k$, причем множества E_k измеримы. Назовем через Δ какой-нибудь интервал, содержащий все множества E_k. Легко проверить, что $C_\Delta E = \sum_{k=1}^{n} C_\Delta E_k$.

Но множества $C_\Delta E_k$ измеримы одновременно с множествами E_k, откуда, в силу теоремы 5, следует измеримость множества $C_\Delta E$, а с ним и множества E, что и требовалось доказать.

Теорема 7. *Разность двух измеримых множеств измерима.*

Доказательство. Пусть $E = E_1 - E_2$, где множества E_1 и E_2 измеримы. Назовем через Δ какой-нибудь интервал, содержащий оба множества E_1 и E_2. Тогда $E = E_1 \cdot C_\Delta E_2$ и дело сводится к предыдущей теореме.

Теорема 8. *Если в условиях теоремы 7 будет $E_1 \supset E_2$, то*

$$mE = mE_1 - mE_2.$$

Доказательство. Очевидно $E_1 = E + E_2 \quad (EE_2 = 0)$, откуда, в силу теоремы 4, $mE_1 = mE + mE_2$, что равносильно теореме.

Теорема 9. *Если ограниченное множество E является суммой счетного множества измеримых множеств, то E измеримо.*

Доказательство. Пусть $E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$.

Введем множества A_k $(k = 1, 2, \ldots)$, полагая

$$A_1 = E_1, \quad A_2 = E_2 - E_1, \ \ldots, \ A_k = E_k - (E_1 + \ldots + E_{k-1}), \ \ldots$$

Легко проверить, что $E=\sum_{k=1}^{\infty} A_k$. При этом все множества A_k измеримы и попарно не пересекаются (в последнем вся суть доказательства), так что дело свелось к теореме 4.

Условие ограниченности множества E (которое в теореме 5 выполнялось само собой) отбросить нельзя, как видно хотя бы из примера $E_k=[0, k]$, где сумма $\sum_{k=1}^{\infty} E_k=[0, +\infty)$ неизмерима.

Теорема 10. *Пересечение счетного множества измеримых множеств измеримо.*

Доказательство. Пусть $E=\prod_{k=1}^{\infty} E_k$, где все множества E_k измеримы. Так как $E \subset E_1$, то множество E ограничено. Обозначим через Δ какой-нибудь интервал, содержащий это множество, и положим $A_k=\Delta E_k \quad (k=1, 2, 3, \ldots)$.

Тогда

$$E=\Delta E=\Delta \prod_{k=1}^{\infty} E_k=\prod_{k=1}^{\infty} (\Delta E_k)=\prod_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Легко проверить, что $C_\Delta E=\sum_{k=1}^{\infty} C_\Delta A_k$, и дело сводится к теоремам 3 и 9.

В заключение установим две теоремы, играющие важную роль в теории функций.

Теорема 11. *Пусть множества $E_1, E_2, E_3, \ldots$ измеримы. Если*

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$$

и если сумма $E=\sum_{k=1}^{\infty} E_k$ ограничена, то

$$mE=\lim_{n\to\infty} [mE_n].$$

Доказательство. Легко видеть, что множество E можно представить в форме

$$E=E_1+(E_2-E_1)+(E_3-E_2)+(E_4-E_3)+\ldots,$$

где отдельные слагаемые попарно не пересекаются. Отсюда, в силу теорем 4 и 8, следует, что

$$mE=mE_1+\sum_{k=1}^{\infty} m(E_{k+1}-E_k)=mE_1+\sum_{k=1}^{\infty} [mE_{k+1}-mE_k].$$

На основании самого определения суммы бесконечного ряда, последнее равенство можно переписать так

$$mE=\lim_{n\to\infty} \left\{mE_1+\sum_{k=1}^{n-1} [mE_{k+1}-mE_k]\right\},$$

а это равносильно теореме, ибо

$$mE_1 + \sum_{k=1}^{n-1} [mE_{k+1} - mE_k] = mE_n.$$

Теорема 12. *Пусть $E_1, E_2, E_3, \ldots$ суть измеримые множества, и $E = \prod_{k=1}^{\infty} E_k$. Если $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$, то*

$$mE = \lim_{n \to \infty} [mE_n].$$

Доказательство. Эту теорему легко свести к предыдущей. Действительно, обозначив через Δ какой-нибудь интервал, содержащий множество E_1, мы будем иметь

$$C_\Delta E_1 \subset C_\Delta E_2 \subset C_\Delta E_3 \subset \ldots, \qquad C_\Delta E = \sum_{k=1}^{\infty} C_\Delta E_k.$$

В силу теоремы 11 мы получаем, что

$$m(C_\Delta E) = \lim_{n \to \infty} [m(C_\Delta E_n)],$$

что можно представить и так:

$$m\Delta - mE = \lim_{n \to \infty} [m\Delta - mE_n],$$

а это равносильно теореме.

§ 5. Измеримость и мера как инварианты движения

Пусть даны два множества A и B, состоящие из объектов любой природы. Если указано правило, которое каждому элементу a множества A ставит в соответствие один и только один элемент b множества B, то говорят, что установлено *однозначное отображение* множества A в множество B. При этом не предполагается, что каждый элемент множества B оказывается соотнесенным какому-нибудь элементу из A. Понятие отображения есть прямое обобщение понятия функции. В связи с этим элемент $b \in B$, отвечающий элементу $a \in A$, часто обозначают через $f(a)$ и пишут $b = f(a)$.

Если $b = f(a)$, то мы будем называть элемент b *образом* элемента a, а элемент a *прообразом* элемента b. При этом один элемент b может иметь несколько прообразов.

Пусть A^* есть часть множества A, а B^* есть множество образов всех элементов A^* (иначе говоря, если $a \in A^*$, то $f(a) \in B^*$, и если $b \in B^*$, то существует хоть один элемент $a \in A^*$ такой, что $f(a) = b$). В таком случае множество B^* называется *образом* множества A^*, что записывают так: $B^* = f(A^*)$.

При этом множество A^* называется *прообразом* множества B^*.

Установив эти общие понятия, перейдем к рассмотрению одного важного специального вида отображений.

Определение 1. Однозначное отображение $\varphi(x)$ числовой прямой Z в себя называется *движением*, если расстояние между образами любых двух точек прямой равно расстоянию между самими этими точками:

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|=|x-y|.$$

Иначе говоря, движением называется такое отображение множества Z в множество Z, которое не изменяет расстояний между точками Z.

В определение понятия движения не включено требование, чтобы каждая точка Z служила образом какой-нибудь точки, а также требование, чтобы *разные* точки Z имели *разные* же образы. Однако оба эти обстоятельства имеют место. Убедимся в этом пока для одного из них.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(x)$ *есть движение. Если* $x \neq y$, *то* $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Действительно, в этом случае $|\varphi(x)-\varphi(y)|=|x-y| \neq 0$.

Теорема 2. a) *Если* $A \subset B$, *то* $\varphi(A) \subset \varphi(B)$.

b) $\varphi\left(\sum\limits_{\xi} E_{\xi}\right)=\sum\limits_{\xi} \varphi(E_{\xi})$

c) $\varphi\left(\prod\limits_{\xi} E_{\xi}\right)=\prod\limits_{\xi} \varphi(E_{\xi})$

d) *Если* Λ *пустое множество, то* $\varphi(\Lambda)=\Lambda$.

Доказательство предоставляется читателю; укажем лишь на то, что при доказательстве c) используется теорема 1.

Легко проверить, что следующие три отображения являются движениями:

I. $\varphi(x)=x+d$ (*сдвиг*),

II. $\varphi(x)=-x$ (*зеркальное отражение*),

III. $\varphi(x)=-x+d$.

Чрезвычайно важным является то, что этими тремя (собственно — двумя, ибо III охватывает II) типами исчерпываются все возможные движения в Z.

Теорема 3. *Если* $\varphi(x)$ *есть движение, то либо*

$$\varphi(x)=x+d,$$

либо

$$\varphi(x)=-x+d.$$

Доказательство. Положим, $\varphi(0)=d$. Тогда для всякого x будет $|\varphi(x)-d|=|x|$ и, стало быть,

$$\varphi(x)=(-1)^{\sigma(x)}x+d \qquad [\sigma(x)=0,\ 1].$$

Функция $\sigma(x)$ определена для всякого $x \neq 0$. Нашей задачей является установление того, что $\sigma(x)$ есть постоянная величина.

Пусть x и y две точки, причем $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq y$. Тогда

$$\varphi(x) - \varphi(y) = (-1)^{\sigma(x)} x - (-1)^{\sigma(y)} y,$$

или

$$\varphi(x) - \varphi(y) = (-1)^{\sigma(x)} [x - (-1)^{\rho} y],$$

где $\rho = \sigma(y) - \sigma(x)$ имеет одно из трех значений $\rho = 1, 0, -1$.

Пользуясь определением движения, можно утверждать, что $|x - (-1)^{\rho} y| = |x - y|$.

Отсюда, либо $x - (-1)^{\rho} y = x - y$, либо же $x - (-1)^{\rho} y = -x + y$.

Но второй случай невозможен, ибо он приводит к тому, что $2x = y[1 + (-1)^{\rho}]$, откуда (при $\rho = \pm 1$) $x = 0$, или (при $\rho = 0$) $x = y$, а это противоречит условию.

Значит, остается первый случай, который дает, что $\rho = 0$, т. е. $\sigma(x) = \sigma(y)$.

Значит, для всех $x \neq 0$ функция $\sigma(x)$ имеет одно и то же значение $\sigma(x) = \sigma$ $(\sigma = 0, 1)$, так что $\varphi(x) = (-1)^{\sigma} x + d$.

Поскольку это равенство, очевидно, остается в силе и для $x = 0$, теорема доказана.

Следствие. *При движении каждая точка $y \in Z$ служит образом некоторой точки $x \in Z$,* т. е. $\varphi(Z) = Z$.

Действительно, если $\varphi(x) = (-1)^{\sigma} x + d$, то прообразом точки y служит точка $x = (-1)^{\sigma}(y - d)$.

Если $\varphi(x) = (-1)^{\sigma} x + d$ есть некоторое движение, то движение

$$\varphi^{-1}(x) = (-1)^{\sigma}(x - d)$$

называется *обратным* движением. Эти два движения связаны соотношениями

$$\varphi[\varphi^{-1}(x)] = \varphi^{-1}[\varphi(x)] = x.$$

Иначе говоря, если точка x в движении φ имеет образом точку y, то в движении φ^{-1} точка y имеет образом точку x. Весьма важным является то, что для всякого движения *существует* обратное ему движение.

Теорема 4. *При движении:* a) *всякий интервал переходит в интервал той же меры, причем концами интервала-образа служат образы концов интервала-прообраза;*

b) *образ ограниченного множества есть ограниченное же множество.*

Доказательство. Пусть $\Delta = (a, b)$ есть некоторый интервал. Тогда при движении $\varphi(x) = x + d$ образом интервала Δ служит интервал $(a + d, b + d)$, а при движении $\varphi(x) = -x + d$ — интервал $(d - b, d - a)$. В обоих случаях $m\varphi(\Delta) = b - a = m\Delta$.

Чтобы доказать b), обозначим через E какое-нибудь ограниченное множество. Если Δ есть интервал, содержащий множество E, то $\varphi(E) \subset \varphi(\Delta)$, так что $\varphi(E)$ ограничено. Можно рассуждать

и так: если для всех x из E будет $|x|<k$, то для всех y из $\varphi(E)$ будет $|y|<k+|d|$.

Теорема 5. *При движении:* a) *замкнутое множество переходит в замкнутое множество;*

b) *открытое множество переходит в открытое множество.*

Доказательство. a) Пусть $\varphi(F)$ есть образ замкнутого множества F. Обозначим через y_0 какую-либо предельную точку множества $\varphi(F)$ и найдем последовательность $\{y_n\}$, для которой

$$\lim y_n = y_0, \quad y_n \in \varphi(F).$$

Пусть $x_0 = \varphi^{-1}(y_0), \quad x_n = \varphi^{-1}(y_n)$.

Тогда $x_n \in F$. Но $|x_n - x_0| = |y_n - y_0|$, так что $x_n \to x_0$ и, в силу замкнутости F, $x_0 \in F$, откуда $y_0 = \varphi(x_0) \in \varphi(F)$.

Значит $\varphi(F)$ есть замкнутое множество.

b) Пусть G есть открытое множество. Положим $F = CG$. Тогда F есть замкнутое множество и $G + F = Z, \quad G \cdot F = 0$.

Отсюда, в силу теоремы 2 и следствия теоремы 3,

$$\varphi(G) + \varphi(F) = Z, \quad \varphi(G) \cdot \varphi(F) = 0,$$

т. е. $\varphi(G)$ является дополнением замкнутого множества $\varphi(F)$ и, стало быть, открыто.

Теорема 6. *Мера открытого ограниченного множества не меняется при движении.*

Доказательство. Пусть G открытое ограниченное множество. Тогда и $\varphi(G)$ есть открытое ограниченное множество. Обозначим через δ_k $(k = 1, 2, 3 \ldots)$ составляющие интервалы множества G. На основании теоремы 4, составляющими интервалами множества $\varphi(G)$ служат интервалы $\varphi(\delta_k)$, причем легко проверить, что этими интервалами исчерпываются все составляющие интервалы множества $\varphi(G)$. Отсюда: $m\varphi(G) = \sum\limits_k m\varphi(\delta_k) = \sum\limits_k m\delta_k = mG$, что и требовалось доказать.

Теорема 7. *Движение не изменяет ни внешней, ни внутренней меры ограниченного множества.*

Доказательство. a) Пусть E ограниченное множество. Взяв произвольное $\varepsilon > 0$, найдем такое открытое ограниченное множество G, чтобы было $G \supset E, \quad mG < m^*E + \varepsilon$.

В таком случае $\varphi(G)$ есть открытое ограниченное множество, содержащее множество $\varphi(E)$. Стало быть

$$m^*\varphi(E) \leqslant m\varphi(G) = mG < m^*E + \varepsilon.$$

В силу произвольности числа ε, отсюда следует, что $m^*\varphi(E) \leqslant m^*E$, так что при движении внешняя мера ограниченного множества не увеличивается. Но тогда она и не уменьшается, ибо иначе обратное движение привело бы к увеличению внешней меры.

Итак:

$$m^*\varphi(E) = m^*E.$$

b) Обозначим через Δ какой-нибудь интервал, содержащий множество E. Тогда $\varphi(\Delta)$ есть интервал, содержащий множество $\varphi(E)$. Положим, далее, $A = C_\Delta E$.

Соотношения $E + A = \Delta$, $EA = 0$ дают, что

$$\varphi(E) + \varphi(A) = \varphi(\Delta), \qquad \varphi(E) \cdot \varphi(A) = 0,$$

так что $\varphi(E)$ есть дополнение множества $\varphi(A)$ относительно интервала $\varphi(\Delta)$. Отсюда, в силу теоремы 7, § 3,

$$m^* \varphi(A) + m_* \varphi(E) = m\varphi(\Delta)$$

и, на основании уже доказанной части теоремы и теоремы 4,

$$m^* A + m_* \varphi(E) = m\Delta.$$

Значит $m_* \varphi(E) = m\Delta - m^* (C_\Delta E)$, и снова применяя теорему 7, § 3, мы находим, что

$$m_* \varphi(E) = m_* E.$$

Следствие. *При движении измеримое множество переходит в измеримое множество той же меры.*

Определение 2. Множества A и B называются *конгруэнтными*, если существует движение, в котором одно из них переходит в другое.

С помощью этого термина доказанные результаты можно высказать в такой форме.

Теорема 8. *Конгруэнтные множества имеют одинаковые внешнюю и внутреннюю меры. Множество, конгруэнтное измеримому множеству, измеримо и имеет ту же меру.*

§ 6. Класс измеримых множеств

В §§ 4 и 5 мы изучали свойства самих измеримых множеств, здесь же мы остановимся на некоторых свойствах всего класса измеримых множеств.

Теорема 1. *Всякое ограниченное счетное множество измеримо и мера его равна нулю.*

Доказательство. Пусть ограниченное множество E состоит из точек $x_1, x_2, x_3, \ldots$

Обозначим через E_k одноэлементное множество, состоящее из точки x_k. Очевидно E_k есть измеримое множество меры нуль, и теорема следует из равенства $E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$ и теоремы 4, § 4.

Как показывает пример канторова совершенного множества P_0, доказанная теорема не допускает обращения.

Определение 1. Если множество E представимо в форме суммы счетного множества замкнутых множеств

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} F_k,$$

то говорят, что *E есть множество типа F_σ.*

Определение 2. Если множество E представимо в форме пересечения счетного множества открытых множеств

$$E = \prod_{k=1}^{\infty} G_k,$$

то говорят, что *E есть множество типа G_δ*.

Из теорем 9 и 10, § 4 следует

Теорема 2. *Всякое ограниченное множество типа F_σ или типа G_δ измеримо.*

Доказательство. Относительно множества типа F_σ это очевидно, ибо из ограниченности суммы множеств вытекает ограниченность слагаемых, а так как последние замкнуты, то и измеримы.

Если E есть ограниченное множество типа G_δ, то, обозначив через Δ какой-нибудь интервал, содержащий множество E, мы сможем представить E в форме пересечения измеримых множеств $E = \prod_{k=1}^{\infty} (\Delta G_k)$, после чего измеримость множества E становится очевидной.

Определение 3. Если множество E может быть получено, исходя из замкнутых и открытых множеств, с помощью применения конечного числа или счетного множества операций сложения и пересечения, то множество E называется *борелевым множеством*. Ограниченное борелево множество называется *измеримым* (B).

Например, множества типа F_σ и типа G_δ суть борелевы множества.

Рассуждая как при доказательстве теоремы 2, установим, что верна следующая теорема.

Теорема 3. *Множество, измеримое* (B), *измеримо* (L).

Обратная теорема неверна: существуют примеры множеств измеримых (L) и неизмеримых (B). Первый эффективный пример такого множества был построен безвременно умершим московским математиком М. Я. Суслиным (1894 — 1919). Суслин открыл чрезвычайно важный и обширный класс так называемых A-множеств, каждое из которых (при условии ограниченности) измеримо (L). Этот класс содержит в себе класс всех борелевых множеств, но существенно шире его.

Интересно выяснить, существуют ли вообще ограниченные множества, неизмеримые (L)? Прямым счетом этого вопроса решить нельзя, как показывает следующая теорема.

Теорема 4. *Множество M всех измеримых множеств имеет ту же мощность, что и множество всех точечных множеств,* т. е. 2^c.

Доказательство. Прежде всего ясно, что $\overline{\overline{M}} \leqslant 2^c$.

С другой стороны, возьмем какое-либо измеримое множество E меры нуль и мощности c (например, канторово множество P_0) и обозначим через S множество всех его подмножеств. Так как

всякая часть множества меры нуль также имеет внешнюю меру нуль и, стало быть, измерима, то $S \subset M$, а поскольку $\overline{\overline{S}} = 2^c$, то ясно, что $\overline{\overline{M}} \geqslant 2^c$.

Теорема доказана.

Тем не менее, имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Существуют ограниченные неизмеримые множества.*

Для доказательства этого факта приведем следующий пример.

Пример неизмеримого множества. Разобьем все точки сегмента $[-1/2, +1/2]$ на классы, относя две точки x и y в один класс, тогда и только тогда, когда разность их $x-y$ есть число *рациональное.* Это можно сделать следующим образом: соотнесем каждой точке $x \in [-1/2, +1/2]$ класс $K(x)$, состоящий из тех точек сегмента $[-1/2, +1/2]$, которые имеют вид $x+r$, где r — рациональное число. В частности $x \in K(x)$.

Покажем, что различные[1]) классы $K(x)$ и $K(y)$ не пересекаются между собою. Действительно, предположим, что они пересекаются и пусть $z \in K(x)K(y)$. Тогда $z = x + r_x = y + r_y$, где r_x и r_y рациональные числа, откуда $y = x + r_x - r_y$.

Теперь, если $t \in K(y)$, то

$$t = y + r = x + (r_x - r_y + r) = x + r',$$

так что $t \in K(x)$ и $K(y) \subset K(x)$. Аналогично мы установим, что $K(x) \subset K(y)$ и тогда окажется, что $K(x) = K(y)$, т. е. $K(x)$ и $K(y)$ представляют собою один и тот же класс, вопреки предположению, что это различные классы.

Множество всех построенных таким образом классов и дает нам требуемое разбиение.

Сделав это, выберем из каждого класса по одной точке и обозначим через A множество выбранных точек.

Множество A неизмеримо.

Чтобы доказать это, перенумеруем все рациональные точки сегмента $[-1, +1]$:

$$r_0 = 0, \ r_1, \ r_2, \ r_3, \ \ldots$$

и обозначим через A_k множество, получаемое из множества A сдвигом

$$\varphi_k(x) = x + r_k.$$

(Иначе говоря, если $x \in A$, то $x + r_k \in A_k$, и если $x \in A_k$, то $x - r_k \in A$).

В частности, $A_0 = A$. Все множества A_k конгруэнтны друг с другом, а потому (теорема 8, § 5)

$$m_* A_k = m_* A = \alpha, \quad m^* A_k = m^* A = \beta \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

---

[1]) «Различные» в смысле теории множеств, т. е. такие, что $K(x) \neq K(y)$. Напротив, вполне возможно, что $K(x) = K(y)$, хотя $x \neq y$, и тогда эти классы *не* различны.

Убедимся, что

$$\beta > 0. \tag{1}$$

Для этого заметим, что

$$\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right] \subset \sum_{k=0}^{\infty} A_k. \tag{2}$$

Действительно, если $x \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$, то x попадает в один из классов произведенного выше разбиения. Если представитель этого класса в множестве A есть x_0, то разность $x - x_0$ есть число рациональное и притом, очевидно, принадлежащее сегменту $[-1, +1]$, откуда $x - x_0 = r_k$ и $x \in A_k$. Итак, (2) доказано.

Но тогда (теорема 5, § 3)

$$1 = m^*\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right] \leqslant m^*\left[\sum_{k=0}^{\infty} A_k\right] \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} m^* A_k,$$

т. е.

$$1 \leqslant \beta + \beta + \beta + \ldots,$$

откуда и следует (1).

С другой стороны, легко показать, что

$$\alpha = 0. \tag{3}$$

Для этого прежде всего убедимся, что при $n \neq m$

$$A_n A_m = 0. \tag{4}$$

В самом деле, если бы точка z входила в $A_n A_m$, то точки $x_n = z - r_n$, $x_m = z - r_m$ были бы (очевидно, различными) точками множества A, т. е. представителями двух различных классов, чего быть не может, ибо их разность $x_n - x_m = r_m - r_n$ есть число рациональное. Итак, (4) доказано.

С другой стороны, легко видеть, что при любом k

$$A_k \subset \left[-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right]$$

(ибо, если $x \in A_k$, то $x = x_0 + r_k$, где $|x_0| \leqslant 1/2$, $|r_k| \leqslant 1$), так что

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \subset \left[-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right]. \tag{5}$$

Из (5) и (4), в силу теоремы 6, § 3 следует, что

$$3 = m_*\left[-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right] \geqslant m_*\left[\sum_{k=0}^{\infty} A_k\right] \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} m_* A_k,$$

откуда

$$\alpha+\alpha+\alpha+\ldots\leqslant 3 \text{ и } \alpha=0.$$

Сопоставляя (1) и (3), получим $m_*A<m^*A$, что и доказывает неизмеримость множества A.

Замечание. Если бы мы с самого начала разбили на классы не сегмент $[-1/2, +1/2]$, а произвольное измеримое множество E положительной меры, то, буквально повторяя проведенное рассуждение, пришли бы к неизмеримому множеству $A\subset E$. Итак, *всякое множество положительной меры содержит неизмеримую часть.*

§ 7. Общие замечания о проблеме меры

Отрицательный результат, полученный в конце § 6, наводит на мысль, что самое мероопределение Лебега плохо, и приводит к естественному вопросу, нельзя ли как либо улучшить его.

Для ответа на этот вопрос прежде всего нужно точно сформулировать проблему, которую желательно разрешить.

Задачу измерения точечных множеств можно ставить двумя способами.

I. Трудная задача теории измерения. [1]) Требуется каждому ограниченному множеству E приписать неотрицательное число μE — его меру, так, чтобы были удовлетворены следующие требования:

1. Если $E=[0, 1]$, то $\mu E=1$.
2. Если множества A и B конгруэнтны, то $\mu A=\mu B$.
3. Если множество E есть сумма конечного числа или *счетного* множества взаимно не налегающих множеств E_k ($k=1, 2, 3, \ldots$), то

$$\mu E=\sum_k \mu E_k \text{ (полная аддитивность меры).}$$

Мы сформулировали задачу для случая множеств линейных, т. е. для одномерного пространства R_1. Ее можно было бы поставить и для плоскости R_2 и вообще для n-мерного пространства R_n, только в требовании 1 нужно было бы говорить не о сегменте $[0, 1]$, а о квадрате $[0, 1; 0, 1]$ или вообще об n-мерном единичном кубе.

Однако легко показать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Трудная задача теории измерения неразрешима даже в пространстве R_1.*

Доказательство. В примере неизмеримого множества, приведенном в § 6, мы построили взаимно не налегающие и попарно конгруэнтные множества $A_0, A_1, A_2, \ldots$ такие, что

$$\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]\subset\sum_{k=0}^{\infty}A_k\subset\left[-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right].$$

Если бы трудная задача измерения была разрешима, то оказалось бы, что

$$\mu\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\mu A_k\leqslant\mu\left[-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right].$$

[1]) Термины «трудная», «легкая» задачи измерения не являются общепринятыми. Я ввожу их лишь для краткости формулировок, хотя и не считаю вполне удачными.

Но сегмент $[-1/2, +1/2]$ конгруэнтен сегменту $[0, 1]$, кроме того (для любого k)

$$\mu A_k = \mu A = \sigma$$

и, наконец, множество $[-3/2, +3/2]$ ограничено, откуда

$$1 \leqslant \sigma + \sigma + \sigma + \ldots < +\infty,$$

что невозможно ни при $\sigma > 0$, ни при $\sigma = 0$.

Теорема доказана.

В связи с этим ставится

II. **Легкая задача теории измерения**, которая формулируется почти так же, как и трудная задача, с тем единственным отличием, что требование 3 ставится только для случая конечного числа слагаемых множеств, т. е. вместо полной аддитивности меры требуется лишь конечная ее аддитивность.

Относительно этой задачи мы приведем без доказательства следующие результаты.

Теорема 2 (С. Банах). *Легкая задача теории измерения разрешима для пространств R_1 и R_2, но не единственным образом.*

Теорема 3 (Ф. Хаусдорф). *Для пространства R_n, где $n \geqslant 3$, легкая задача теории измерения неразрешима.*

Различие между этими результатами объясняется тем, что понятие конгруэнтности, входящее в формулировку задачи, существенно связано с понятием движения. Так как в пространстве с бо́льшим числом измерений группа движений гораздо обширнее, то вполне естественно, что создать инвариант такой группы труднее.

В заключение приведем некоторые соображения, до известной степени «оправдывающие» мероопределение Лебега.

Пусть мы имеем некоторое решение легкой задачи теории измерения. Тогда из соотношения $A \subset B$ вытекает, что $\mu A \leqslant \mu B$ (принцип монотонности), ибо $\mu B = \mu A + \mu(B - A)$. Отсюда сразу следует, что мера μE всякого множества E, состоящего только из одной точки, равна нулю, ибо на сегменте $[0, 1]$ можно указать сколь угодно большое число «множеств», конгруэнтных E.

В свою очередь, отсюда вытекает, что мера μ любого конечного множества равна нулю, а также что $\mu(a, b) = \mu(a, b] = \mu[a, b) = \mu[a, b]$.

Далее, соотношение

$$[0, 1] = \left[0, \frac{1}{n}\right] + \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}, 1\right]$$

показывает, что

$$\mu\left[0, \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{n},$$

откуда ясно, что мера μ сегмента $[a, b]$ с рациональной длиной равна $b - a$. Пользуясь принципом монотонности, легко установить, что равенство $\mu[a, b] = b - a$ верно для любого сегмента $[a, b]$.

Но тогда ясно, что для любого открытого ограниченного множества G с конечным числом составляющих интервалов будет $\mu G = mG$, если же составляющих интервалов счетное множество, то $\mu G \geqslant mG$.

Наиболее естественными способами решения легкой задачи теории измерения будут те способы, при которых мера μ открытого ограниченного множества G равна сумме длин его составляющих интервалов (из сказанного выше ясно, что достаточно потребовать лишь того, чтобы было $\mu G \leqslant \sum\limits_k \mu\delta_k$ и то только для случая бесконечного множества интервалов). Из доказательства теоремы Банаха можно усмотреть, что такие способы решения действительно существуют (таким образом, мы принимаем это без доказательства). Если мы назовем такие способы «регулярными», то легко докажем следующую теорему.

Теорема 4. При всяком регулярном способе решения легкой задачи теории измерения мера μE измеримого множества E равна его лебеговой мере mE.

Доказательство. Из определения регулярного способа ясно, что мера μG открытого множества G равна его лебеговой мере mG. Но тогда для всякого замкнутого ограниченного множества F также будет $\mu F = mF$.

Если теперь ограниченное множество E содержит замкнутое множество F и содержится в открытом ограниченном множестве G, то, в силу принципа монотонности, $mF \leqslant \mu F \leqslant mG$, откуда $m_* E \leqslant \mu E \leqslant m^* E$ и теорема доказана.

§ 8. Теорема Витали

Определение. Пусть E есть точечное множество, а M — некоторая система (не вырождающихся в точки) сегментов. Если для всякой точки $x \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такой сегмент $d \in M$, что $x \in d$, $md < \varepsilon$, то мы будем говорить, что *множество E покрывается системой M в смысле Витали.*

Иначе говоря, множество E покрыто в смысле Витали системой M, если всякая точка E содержится в сколь угодно малых сегментах этой системы.

В теории функций многочисленные приложения имеет следующая теорема.

Теорема 1 (Д. Витали). *Если ограниченное множество E покрыто в смысле Витали системой сегментов M, то из последней можно выделить такое конечное или счетное множество сегментов $\{d_k\}$, что*

$$d_k d_i = 0 \quad (k \neq i), \qquad m^* \left[E - \sum_k d_k\right] = 0.$$

Иначе говоря, сегменты d_k попарно не пересекаются и покрывают множество E с точностью до множества меры нуль.

Мы изложим принадлежащее С. Банаху доказательство этой замечательной теоремы.

Доказательство. Возьмем какой-нибудь интервал Δ, содержащий множество E (оно ограничено!), и удалим из M те сегменты, которые не содержатся целиком в Δ. Легко понять, что система M_0, состоящая из оставшихся сегментов (т. е. тех сегментов исходной системы M, которая целиком содержится в Δ) также покрывает множество E в смысле Витали.

Заметив это, возьмем какой-нибудь сегмент $d_1 \in M_0$. Если $E \subset d_1$, то вопрос исчерпан. В противном случае, мы будем продолжать выделять из M_0 один сегмент за другим, руководствуясь следующим правилом. Пусть сегменты

$$d_1, \; d_2, \; \ldots, \; d_n \tag{1}$$

уже построены и попарно не пересекаются. Если $E \subset \sum_{k=1}^{n} d_k$, то процесс выделения сегментов закончен и теорема доказана. Если же

$$E - \sum_{k-1}^{n} d_k \neq 0, \tag{2}$$

то положим $F_n = \sum_{k=1}^{n} d_k$, $G_n = \Delta - F_n$ и рассмотрим все те сегменты системы M_0, которые содержатся в открытом множестве G_n. В силу (2) такие сегменты заведомо существуют и их длины ограничены (хотя бы числом $m\Delta$). Обозначим через k_n точную верхнюю границу длин этих сегментов и обозначим через d_{n+1} тот из них, для которого[1])

$$md_{n+1} > \frac{1}{2} k_n. \tag{3}$$

Ясно, что сегмент d_{n+1} не пересекается ни с одним из сегментов (1).

Если процесс построения сегментов $d_1, d_2, d_3, \ldots$ не обрывается после конечного числа шагов (в каковом случае доказательство было бы завершено), то он приводит к последовательности

$$d_1,\ d_2,\ d_3,\ \ldots \tag{4}$$

попарно не пересекающихся сегментов. Мы покажем, что это и есть искомая последовательность, т. е. что

$$m^*(E - S) = 0, \tag{5}$$

где $S = \sum_{k=1}^{\infty} d_k$.

С этой целью построим для каждого k сегмент D_k, имеющий ту же середину, что и сегмент d_k, но в пять раз бо́льшую длину, $mD_k = 5md_k$. Легко видеть, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} mD_k < +\infty. \tag{6}$$

Действительно, сегменты d_k не пересекаются и содержатся в Δ, так что

$$\sum_{k=1}^{\infty} md_k \leqslant m\Delta, \tag{7}$$

откуда и следует (6).

Поэтому для доказательства соотношения (5) достаточно обнаружить, что при любом i будет

$$E - S \subset \sum_{k=i}^{\infty} D_k. \tag{8}$$

Пусть $x \in E - S$. Тогда $x \in G_i$ и (поскольку G_i открыто) существует такой сегмент d системы M_0, что $x \in d \subset G_i$.

Однако не может оказаться, чтобы при всех n было

$$d \subset G_n, \tag{9}$$

---

[1]) Так как сегменты системы M не вырождаются в точки, то $k_n > 0$.

ибо отсюда следовало бы, что при всех n

$$md \leqslant k_n < 2md_{n+1},$$

а это невозможно, так как [в силу (7)] $md_n \to 0$. Значит, при некоторых n соотношение (9) не выполняется, а выполняется, стало быть, соотношение

$$d \cdot F_n \neq 0. \tag{10}$$

Мы будем считать, что n есть *наименьшее* из чисел, удовлетворяющих соотношению (10). Так как $d \cdot F_i = 0$, а $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \ldots$, то ясно, что $n > i$.

Из определения n вытекает, что $d \cdot F_{n-1} = 0$, а отсюда, в свою очередь, проистекают два следствия: во-первых,

$$d \cdot d_n \neq 0, \tag{11}$$

а во-вторых, $d \subset G_{n-1}$ и, стало быть,

$$md \leqslant k_{n-1} < 2md_n. \tag{12}$$

Но из (11) и (12) с очевидностью следует, что $d \subset D_n$ и, тем более, $d \subset \sum\limits_{k=i}^{\infty} D_k$. Значит, $x \in \sum\limits_{k=i}^{\infty} D_k$, откуда следует (8), и теорема доказана.

В приложениях иногда бывает полезна несколько измененная форма теоремы Витали.

Теорема 2 (Д. Витали). *В условиях теоремы 1, для всякого $\varepsilon > 0$ существует конечная система $d_1, d_2, \ldots, d_n$ взаимно не налегающих сегментов системы M, для которой*

$$m^*\left(E - \sum_{k=1}^{n} d_k\right) < \varepsilon.$$

Доказательство. Обозначим через Δ какой-нибудь интервал, содержащий множество E, и выбросим из M все сегменты, которые не содержатся в интервале Δ. Если оставшаяся система есть M_0, то, очевидно, она также покрывает множество E в смысле Витали. Применим теорему 1 к системе M_0 и построим систему $\{d_k\}$ взаимно не налегающих сегментов системы M_0, для которой

$$m^*\left[E - \sum_k d_k\right] = 0.$$

Если система $\{d_k\}$ конечна, то теорема доказана. Если же эта система бесконечна, то, очевидно, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} md_k \leqslant m\Delta$ и можно найти столь большое n, что $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} md_k < \varepsilon$.

Но легко видеть, что

$$E - \sum_{k=1}^{n} d_k \subset \left[E - \sum_{k=1}^{\infty} d_k \right] + \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k, \qquad (13)$$

откуда

$$m^* \left[E - \sum_{k=1}^{n} d_k \right] < \varepsilon,$$

ибо внешняя мера первого слагаемого правой части (13) равна нулю.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ III

Доказать, что:

1. В каждом совершенном множестве есть совершенное подмножество меры нуль.

2. Если A измеримое множество положительной меры, то в нем существуют такие точки x и y, расстояние между которыми рационально.

3. Для измеримости ограниченного множества E необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовало такое замкнутое множество $F \subset E$, что $m^*(E - F) < \varepsilon$. (Признак Валле-Пуссена.)

4. Для каждого ограниченного множества E можно построить такие множества A и B, что $A \subset E \subset B$, A типа F_σ, B типа G_δ и $mA = m_*E$, $mB = m^*E$.

5. Если A и B два измеримых множества без общих точек, то для любого множества E будет

$$m^*[E(A+B)] = m^*(EA) + m^*(EB), \quad m_*[E(A+B)] = m_*(EA) + m_*(EB).$$

6. Для того чтобы ограниченное множество E было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы для любого ограниченного множества A было $m^*A = m^*(AE) + m^*(A \cdot CE)$ (признак Каратеодори).

7. Множество E называется нигде не плотным, если любой интервал содержит точки множества CE'. Построить нигде не плотное ограниченное совершенное множество положительной меры.

8. Построить содержащееся в $U = [0, 1]$ измеримое множество E так, чтобы для любого интервала $\Delta \subset U$ было $m(\Delta \cdot E) > 0$, $m(\Delta \cdot CE) > 0$.

9. Если $E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$, $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$ и E ограничено, то при $n \to \infty$ будет $m^*E_n \to m^*E$.

10. При всяком способе решения легкой задачи теории измерения мера ограниченного счетного множества равна нулю.

ГЛАВА IV

ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Определение и простейшие свойства измеримой функции

Если каждому x из множества E поставлено в соответствие некоторое число $f(x)$, то мы будем говорить, что на множестве E задана функция $f(x)$. При этом мы допускаем и бесконечные значения функции, лишь бы они имели определенный знак, т. е. вводим «несобственные» числа $-\infty$ и $+\infty$. Эти числа связаны между собой и с любым конечным числом a неравенствами

$$-\infty < a < +\infty,$$

и мы устанавливаем для них следующие законы действий:

$$+\infty \pm a = +\infty, \quad +\infty + (+\infty) = +\infty, \quad +\infty - (-\infty) = +\infty,$$
$$-\infty \pm a = -\infty, \quad -\infty + (-\infty) = -\infty, \quad -\infty - (+\infty) = -\infty,$$
$$|+\infty| = |-\infty| = +\infty, \quad +\infty \cdot a = a \cdot (+\infty) = +\infty,$$
$$-\infty \cdot a = a \cdot (-\infty) = -\infty, \quad \text{если } a > 0,$$
$$+\infty \cdot a = a \cdot (+\infty) = -\infty,$$
$$-\infty \cdot a = a \cdot (-\infty) = +\infty, \quad \text{если } a < 0$$
$$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0,$$
$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$
$$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty,$$
$$\frac{a}{\pm\infty} = 0.$$

Здесь a обозначает вещественное конечное число. Символы

$$+\infty - (+\infty), \quad -\infty - (-\infty), \quad +\infty + (-\infty), \quad -\infty + (+\infty).$$
$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{a}{0}$$

мы считаем лишенными смысла.[1])

Имея дело с функцией $f(x)$, заданной на множестве E, мы будем символом

$$E(f > a)$$

---

[1]) Обычно символам $0 \cdot (\pm\infty)$ и $(\pm\infty) \cdot 0$ также не приписывают смысла. Нам кажется более удобным считать их равными нулю.

обозначать множество тех x из множества E, для которых выполнено неравенство $f(x) > a$.

Аналогичным образом вводятся символы

$$E(f \geqslant a), \quad E(f = a), \quad E(f \leqslant a), \quad E(a < f \leqslant b)$$

и т. п. Если множество, на котором задана функция $f(x)$, обозначено какой-либо другой буквой, например A или B, то мы соответственно будем писать

$$A(f > a), \quad B(f > a)$$

и т. п.

Определение 1. Функция $f(x)$, заданная на множестве E, называется *измеримой*, если измеримо это множество E и если при любом конечном a измеримо множество

$$E(f > a).$$

В связи с тем, что здесь речь идет о множествах, измеримых в смысле Лебега, часто (желая подчеркнуть именно это обстоятельство) говорят об измеримой (L) функции. Если же E и все множества $E(f > a)$ измеримы (B), то и $f(x)$ называется измеримой (B) функцией.

Теорема 1. *Всякая функция, заданная на множестве меры нуль, измерима.*

Это утверждение очевидно.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ есть измеримая функция, заданная на множестве E. Если A есть измеримое подмножество E, то $f(x)$, рассматриваемая только для $x \in A$, измерима.* [1])

Действительно, $A(f > a) = A \cdot E(f > a)$.

Теорема 3. *Пусть $f(x)$ задана на измеримом множестве E, представимом в форме суммы конечного числа или счетного множества измеримых множеств E_k:*

$$E = \sum_k E_k.$$

Если $f(x)$ измерима на каждом из множеств E_k, то она измерима и на E.

В самом деле, $E(f > a) = \sum\limits_k E_k(f > a)$.

Определение 2. Две функции $f(x)$ и $g(x)$, заданные на одном и том же множестве E, называются *эквивалентными*, если

$$mE(f \neq g) = 0.$$

Обозначать эквивалентность функций $f(x)$ и $g(x)$ принято так:

$$f(x) \sim g(x).$$

---

[1]) Вместо этого, несколько громоздкого, способа речи мы будем говорить, что $f(x)$ измерима на множестве A.

Определение 3. Пусть некоторое обстоятельство S имеет место для всех точек какого-нибудь множества E, кроме точек, входящих в подмножество E_0 множества E. Если $mE_0=0$, то говорят, что S имеет место *почти везде* на множестве E, или *почти для всех* точек E.

В частности, множество исключительных точек E_0 может быть и пустым.

Теперь можно сказать, что две функции, заданные на множестве E, эквивалентны, если они равны почти везде на E.

Теорема 4. *Если $f(x)$ есть измеримая функция, заданная на множестве E, а $g(x) \sim f(x)$, то $g(x)$ также измерима.*

Доказательство. Пусть $A=E(f \neq g)$, $B=E-A$. Тогда $mA=0$, так что B измеримо. Значит функция $f(x)$ измерима на множестве B. Но на множестве B функции $f(x)$ и $g(x)$ неотличимы, так что и $g(x)$ измерима на B. Поскольку $g(x)$ измерима и на A (ибо $mA=0$), она измерима на $E=A+B$.

Теорема 5. *Если для всех точек измеримого множества E будет $f(x)=c$, то функция $f(x)$ измерима.*

Действительно,

$$E(f>a)=\begin{cases} E, & \text{если} \quad a<c. \\ 0, & \text{если} \quad a \geqslant c. \end{cases}$$

Заметим, что в этой теореме c может быть и бесконечным.

Функция $f(x)$, заданная на сегменте $[a, b]$, называется *ступенчатой*, если $[a, b]$ можно разложить точками

$$c_0=a<c_1<c_2<\ldots<c_n=b$$

на конечное число частей, внутри которых (т. е. в интервалах (c_k, c_{k+1}) при $k=0, 1, \ldots, n-1$) функция $f(x)$ *постоянна*. Легко понять, что из теоремы 5 вытекает

Следствие. *Ступенчатая функция измерима.*

Теорема 6. *Если $f(x)$ есть измеримая функция, заданная на множестве E, то при любом a измеримы множества*

$$E(f \geqslant a), \quad E(f=a), \quad E(f \leqslant a), \quad E(f<a).$$

Доказательство. Легко проверить, что

$$E(f \geqslant a)=\prod_{n=1}^{\infty} E\left(f>a-\frac{1}{n}\right),$$

откуда следует измеримость множества $E(f \geqslant a)$. Измеримость прочих множеств вытекает из соотношений:

$$E(f=a)=E(f \geqslant a)-E(f>a), \quad E(f \leqslant a)=E-E(f>a),$$
$$E(f<a)=E-E(f \geqslant a).$$

Замечание. Легко показать, что *если хоть одно из множеств*

$$E(f \geqslant a), \quad E(f \leqslant a), \quad E(f<a) \tag{1}$$

оказывается измеримым при всяком a, то функция $f(x)$ измерима на множестве E (которое также предполагается измеримым).

Действительно, тождество $E(f>a)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(f\geqslant a+\frac{1}{n}\right)$ показывает, например, что $f(x)$ измерима, если измеримы все множества $E(f\geqslant a)$. Сходным образом устанавливаются и остальные утверждения. Таким образом, в определении измеримой функции можно заменить множество $E(f>a)$ любым из множеств (1).

Теорема 7. *Если функция $f(x)$, заданная на множестве E, измерима, а k конечное число, то измеримы и функции* 1) $f(x)+k$, 2) $kf(x)$, 3) $|f(x)|$, 4) $f^2(x)$, *и если $f(x)\neq 0$, то измерима и функция* 5) $\frac{1}{f(x)}$.

Доказательство. 1) Измеримость функции $f(x)+k$ вытекает из соотношения $E(f+k>a)=E(f>a-k)$.

2) Измеримость функции $kf(x)$ при $k=0$ следует из теоремы 5. Для прочих k измеримость следует из очевидных соотношений

$$E(kf>a)=\begin{cases} E(f>a/k), & \text{если } k>0,\\ E(f<a/k), & \text{если } k<0.\end{cases}$$

3) Функция $|f(x)|$ измерима потому, что

$$E(|f|>a)=\begin{cases} E, & \text{если } a<0,\\ E(f>a)+E(f<-a), & \text{если } a\geqslant 0.\end{cases}$$

4) Аналогично, из того, что

$$E(f^2>a)=\begin{cases} E, & \text{если } a<0,\\ E(|f|>\sqrt{a}), & \text{если } a\geqslant 0,\end{cases}$$

вытекает измеримость функции $f^2(x)$.

5) Наконец, при $f(x)\neq 0$ имеем

$$E\left(\frac{1}{f}>a\right)=\begin{cases} E(f>0), & \text{если } a=0,\\ E(f>0)\cdot E(f<1/a), & \text{если } a>0,\\ E(f>0)+E(f<0)\cdot E(f<1/a), & \text{если } a<0,\end{cases}$$

откуда и следует измеримость $\frac{1}{f(x)}$.

Теорема 8. *Функция $f(x)$, заданная и непрерывная на сегменте $E=[A, B]$, измерима.*

Доказательство. Прежде всего установим, что множество

$$F=E(f\leqslant a)$$

замкнуто. Действительно, если x_0 есть предельная точка этого множества и $x_n\to x_0$ $(x_n\in F)$, то $f(x_n)\leqslant a$ и, в силу непрерывности $f(x)$, будет $f(x_0)\leqslant a$, т. е. $x_0\in F$, что и устанавливает замкнутость множества F.

Но тогда множество $E(f>a)=E-E(f\leqslant a)$ измеримо, и теорема доказана.

Из самого определения измеримой функции следует, что функция, заданная на неизмеримом множестве, неизмерима.

Однако легко обнаружить существование неизмеримой функции, заданной на измеримом множестве.

Определение 4. Пусть M есть подмножество сегмента $E=[A, B]$. Функция $\varphi_M(x)$, равная единице на множестве M и нулю на множестве $E-M$, называется *характеристической функцией* множества M.

Теорема 9. *Множество M и его характеристическая функция φ_M одновременно измеримы или нет.*

Доказательство. Если функция $\varphi_M(x)$ измерима, то измеримость множества M вытекает из соотношения

$$M=E(\varphi_M>0).$$

Обратно, если M есть измеримое множество, то соотношения

$$E(\varphi_M>a)=\begin{cases} 0, \text{ если } a\geqslant 1, \\ M, \text{ если } 0\leqslant a<1, \\ E, \text{ если } a<0, \end{cases}$$

устанавливают измеримость функции $\varphi_M(x)$.

Отсюда, между прочим, весьма просто получаются примеры разрывных измеримых функций.

§ 2. Дальнейшие свойства измеримых функций

Лемма. *Если на множестве E заданы две измеримые функции $f(x)$ и $g(x)$, то множество $E(f>g)$ измеримо.*

Действительно, если мы перенумеруем все рациональные числа $r_1, r_2, r_3, \ldots$, то легко проверим справедливость соотношения

$$E(f>g)=\sum_{k=1}^{\infty} E(f>r_k)\,E(g<r_k),$$

откуда и следует лемма.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ суть конечные измеримые функции, заданные на множестве E. Тогда измерима каждая из функций* 1) $f(x)-g(x)$, 2) $f(x)+g(x)$, 3) $f(x)\cdot g(x)$, *и если $g(x)\neq 0$, то измерима также функция* 4) $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Доказательство. 1) Функция $a+g(x)$ измерима при любом a. Значит (на основании леммы), множество $E(f>a+g)$ измеримо, а так как $E(f-g>a)=E(f>a+g)$, то измерима функция $f(x)-g(x)$.

2) Измеримость суммы $f(x)+g(x)$ следует из того, что

$$f(x)+g(x)=f(x)-[-g(x)].$$

3) Измеримость произведения $f(x)g(x)$ вытекает из тождества

$$f(x)g(x)=\frac{1}{4}\{[f(x)+g(x)]^2-[f(x)-g(x)]^2\}$$

и теоремы 7, § 1.

4) Наконец, измеримость частного $\frac{f(x)}{g(x)}$ есть следствие тождества

$$\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}.$$

Эта теорема показывает, что действия арифметики, будучи применены к измеримым функциям, не выводят нас за пределы этого класса функций. Следующая теорема устанавливает сходный результат относительно уже не арифметической операции — предельного перехода.

Теорема 2. *Пусть на множестве E задана последовательность измеримых функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... Если в каждой точке $x\in E$ существует (конечный или бесконечный) предел*

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x),$$

то функция $F(x)$ измерима.

Доказательство. Фиксируем произвольное a и введем в рассмотрение множества

$$A_m^{(k)}=E\left(f_k>a+\frac{1}{m}\right),\quad B_m^{(n)}=\prod_{k=n}^{\infty}A_m^{(k)}.$$

Эти множества, очевидно, измеримы, и для доказательства теоремы достаточно проверить, что

$$E(F>a)=\sum_{n,\,m}B_m^{(n)}.$$

Займемся же проверкой этого тождества.

Пусть $x_0\in E(F>a)$, тогда $F(x_0)>a$, и найдется такое натуральное m, что $F(x_0)>a+1/m$. Поскольку же $f_k(x)\to F(x_0)$, то найдется такое n, что при $k\geqslant n$ будет

$$f_k(x_0)>a+\frac{1}{m}.$$

Иначе говоря, $x_0\in A_m^{(k)}$ при всех $k\geqslant n$, а тогда $x_0\in B_m^{(n)}$ и тем более $x_0\in\sum_{n,\,m}B_m^{(n)}$. Отсюда следует, что $E(F>a)\subset\sum_{n,\,m}B_m^{(n)}$.

Теперь остается установить обратное включение

$$\sum_{n,\,m}B_m^{(n)}\subset E(F>a),\tag{*}$$

и теорема будет доказана.

Пусть $x_0 \in \sum_{n,\, m} B_m^{(n)}$. Тогда $x_0 \in B_m^{(n)}$ при некоторых фиксированных n и m. Это значит, что $x_0 \in A_m^{(k)}$ для $k \geqslant n$. Иначе говоря, при $k \geqslant n$ будет $f_k(x_0) > a + 1/m$.

Устремляя k к бесконечности и переходя в последнем неравенстве к пределу, получим, что $F(x_0) \geqslant a + 1/m$, откуда ясно, что $F(x_0) > a$, т. е. $x_0 \in E(F > a)$. Этим и доказано включение (*). Доказанная теорема допускает следующее обобщение.

Теорема 3. *Пусть на множестве E заданы измеримые функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... и некоторая функция $F(x)$. Если соотношение*

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = F(x) \tag{α}$$

выполняется почти везде на E, то функция $F(x)$ измерима.

Доказательство. Обозначим через A множество тех точек $x \in E$, в которых соотношение (α) не имеет места (в этих точках предела $\lim f_n(x)$ может вовсе не существовать). По условию, $mA = 0$ и $F(x)$ измерима на множестве A. По теореме 2 она измерима и на множестве $E - A$, а тогда она измерима на всем множестве E.

§ 3. Последовательности измеримых функций. Сходимость по мере

В этом параграфе нам придется рассматривать множества вида $E(|f-g| \geqslant \sigma)$, $E(|f-g| < \sigma)$, где $f(x)$ и $g(x)$ суть функции, заданные на множестве E, а σ некоторое положительное число. При этом точки, в которых обе функции $f(x)$ и $g(x)$ принимают бесконечные значения одного знака, строго говоря, не входят ни в одно из этих множеств, поскольку в этих точках разность $f(x) - g(x)$ лишена смысла. Так как указанное обстоятельство представляет известные неудобства, то мы раз и навсегда условимся эти точки относить к множеству $E(|f-g| \geqslant \sigma)$. [1]) При таком соглашении, очевидно

$$E = E(|f-g| \geqslant \sigma) + E(|f-g| < \sigma)$$

и слагаемые правой части не пересекаются.

Теорема 1 (А. Лебег). *Пусть на измеримом множестве E задана последовательность измеримых и почти везде конечных функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ..., которая почти во всех точках E*

---

[1]) Это соглашение имеет довольно случайный характер. Но так как в дальнейшем мы рассматриваем только почти везде конечные функции, а множества $E(|f-g| \geqslant \sigma)$ будут интересовать нас только с точки зрения их меры, то в конце концов безразлично, как поступить с множеством

$$E(f = \pm\infty) + E(g = \pm\infty),$$

ибо мера его равна нулю.

сходится к почти везде конечной функции $f(x)$. *Тогда, каково бы ни было* $\sigma > 0$, *будет*

$$\lim_{n\to\infty} [mE(|f_n - f| \geqslant \sigma)] = 0.$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что в силу теоремы 3, § 2, предельная функция $f(x)$ также измерима и, стало быть, измеримы те множества, о которых идет речь.

Положим

$$A = E(|f| = +\infty), \quad A_n = E(|f_n| = +\infty), \quad B = E(f_n \text{ не } \to f)$$

$$Q = A + \sum_{n=1}^{\infty} A_n + B.$$

Очевидно,

$$mQ = 0. \tag{1}$$

Пусть, далее,

$$E_k(\sigma) = E(|f_k - f| \geqslant \sigma), \quad R_n(\sigma) = \sum_{k=n}^{\infty} E_k(\sigma), \quad M = \prod_{n=1}^{\infty} R_n(\sigma).$$

Все эти множества измеримы.

Так как $R_1(\sigma) \supset R_2(\sigma) \supset R_3(\sigma) \supset \ldots$, то, в силу теоремы 12, § 4, гл. III, при $n \to \infty$ будет

$$mR_n(\sigma) \to mM. \tag{2}$$

Убедимся в том, что

$$M \subset Q. \tag{3}$$

В самом деле, если $x_0 \overline{\in} Q$, то $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x_0) = f(x_0)$, причем все числа $f_1(x_0)$, $f_2(x_0)$, ... и их предел $f(x_0)$ — конечны. Значит, найдется такое n, что для $k \geqslant n$ будет $|f_k(x_0) - f(x_0)| < \sigma$.

Иначе говоря, $x_0 \overline{\in} E_k(\sigma)$ $(k \geqslant n)$, а потому $x_0 \overline{\in} R_n(\sigma)$ и тем более $x_0 \overline{\in} M$, откуда и следует (3).

Но тогда, в силу (1), $mM = 0$, и (2) принимает вид

$$mR_n(\sigma) \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{4}$$

Этим и доказана теорема, ибо $E_n(\sigma) \subset R_n(\sigma)$.

Замечание. Отметим, что нами установлен результат (4), более сильный, чем то, что мы хотели доказать. Ниже, при доказательстве теоремы Д. Ф. Егорова, нам придется воспользоваться именно этим более сильным результатом.

Доказанная теорема дает повод установить следующее [1])

Определение. Пусть на измеримом множестве E задана последовательность измеримых и почти везде конечных функций

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots \tag{*}$$

[1]) Принадлежащее венгерскому математику Ф. Риссу.

и измеримая и почти везде конечная функция $f(x)$. Если, каково бы ни было положительное число σ, оказывается, что

$$\lim_{n\to\infty} [mE(|f_n - f| \geqslant \sigma)] = 0,$$

то говорят, что *последовательность* (*) *сходится к функции* $f(x)$ *по мере*.

Мы будем, следуя Г. М. Фихтенгольцу, обозначать сходимость по мере символом

$$f_n(x) \Rightarrow f(x).$$

С помощью понятия сходимости по мере можно формулировать теорему Лебега так.

Теорема 1*. *Если последовательность функций сходится почти везде, то она сходится и по мере к той же предельной функции.*

Следующий пример показывает, что эта теорема необратима.

Пример. Определим на полусегменте $[0, 1)$ для каждого натурального k группу из k функций: $f_1^{(k)}(x)$, $f_2^{(k)}(x)$, ..., $f_k^{(k)}(x)$, полагая

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right), \\ 0, & x \overline{\in} \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right). \end{cases}$$

[В частности, $f_1^{(1)}(x) \equiv 1$ на $[0, 1)$. Нумеруя все построенные функции подряд одним значком, мы получим последовательность

$$\varphi_1(x) = f_1^{(1)}(x), \quad \varphi_2(x) = f_1^{(2)}(x), \quad \varphi_3(x) = f_2^{(2)}(x), \quad \varphi_4(x) = f_1^{(3)}(x), \ldots$$

Легко видеть, что последовательность функций $\varphi_n(x)$ сходится по мере к нулю. В самом деле, если $\varphi_n(x) = f_i^{(k)}(x)$, то при любом $\sigma > 0$ будет

$$E(|\varphi_n| \geqslant \sigma) = \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right),$$

и мера этого множества, равная $1/k$, стремится к нулю с возрастанием n. [1])

Вместе с тем, соотношение $\varphi_n(x) \to 0$ не выполняется ни в одной точке промежутка $[0, 1)$. Действительно, если $x_0 \in [0, 1)$, то для всякого k найдется такое i, что $x_0 \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right)$, так что $f_i^{(k)}(x_0) = 1$. Иначе говоря, как далеко мы ни продвинемся вдоль ряда чисел $\varphi_1(x_0)$, $\varphi_2(x_0)$, $\varphi_3(x_0)$, ..., мы всегда будем встречать в этом ряду числа, равные 1, что и доказывает наше утверждение.

Таким образом, понятие сходимости по мере есть понятие, существенно более общее, чем понятие сходимости почти везде и тем более, чем понятие сходимости везде.

---

[1]) Мы считаем, что $\sigma \leqslant 1$, ибо иначе множество $E(|\varphi_n| \geqslant \sigma)$ пусто и все становится тривиальным.

Естественно спросить, в какой степени соотношение

$$f_n(x) \Rightarrow f(x)$$

определяет функцию $f(x)$, т. е. единственна ли предельная функция при сходимости по мере.

Теоремы 2 и 3 позволяют ответить на этот вопрос.

Теорема 2. *Если последовательность функций $f_n(x)$ сходится по мере к функции $f(x)$, то эта же последовательность сходится по мере ко всякой функции $g(x)$, эквивалентной функции $f(x)$.*

Доказательство. При любом $\sigma > 0$ будет

$$E(|f_n - g| \geqslant \sigma) \subset E(f \neq g) + E(|f_n - f| \geqslant \sigma),$$

откуда (поскольку $mE(f \neq g) = 0$)

$$mE(|f_n - g| \geqslant \sigma) \leqslant mE(|f_n - f| \geqslant \sigma),$$

что и доказывает теорему.

Теорема 3. *Если последовательность функций $f_n(x)$ сходится по мере к двум функциям $f(x)$ и $g(x)$, то эти предельные функции эквивалентны.*

Доказательство. Легко проверить, что при $\sigma > 0$ будет

$$E(|f - g| \geqslant \sigma) \subset E\left(|f_n - f| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right) + E\left(|f_n - g| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right), \qquad (*)$$

ибо точка, не входящая в правую часть этого соотношения, и подавно не может входить и в левую часть. Но соотношения

$$f_n \Rightarrow f, \quad f_n \Rightarrow g$$

показывают, что мера правой части (*) стремится к нулю с возрастанием n, откуда ясно, что $mE(|f - g| \geqslant \sigma) = 0$.

Но так как

$$E(f \neq g) \subset \sum_{n=1}^{\infty} E\left(|f - g| \geqslant \frac{1}{n}\right), \text{[1]}$$

то $f \sim g$, что и требовалось доказать.

Теоремы 2 и 3 показывают, что, желая восстановить свойство единственности предельной функции для сходимости по мере, мы должны были бы условиться считать эквивалентные функции за тождественные. Это обычно и делается в *метрических* вопросах теории функций, т. е. в тех вопросах, где все свойства функций изучаются с помощью меры множеств, на которых функция обладает или не обладает тем или другим свойством. В интегральном исчислении мы найдем много примеров подобного подхода к вещам.

---

[1]) Было бы неверно употребить здесь знак = вместо знака $\subset$. Например, те точки, в которых $f(x) = g(x) = +\infty$, в левую часть не входят, но мы условились их включать во все множества вида $E(|f - g| \geqslant \sigma)$.

Хотя сходимость по мере общée сходимости почти везде, имеет место все же следующая теорема.

Теорема 4 (Ф. Рисс). *Пусть $\{f_n(x)\}$ последовательность функций, которая сходится по мере к функции $f(x)$. В таком случае существует подпоследовательность*

$$f_{n_1}(x),\ f_{n_2}(x),\ f_{n_3}(x),\ \ldots \qquad (n_1 < n_2 < n_3 < \ldots),$$

сходящаяся к функции $f(x)$ почти везде. [1])

Доказательство. Возьмем последовательность положительных чисел $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \ldots$, для которой $\lim \sigma_k = 0$.

Пусть, далее, $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \ldots$ $(\eta_k > 0)$ есть сходящийся положительный ряд.

Теперь мы можем построить требуемую последовательность индексов

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots \qquad (*)$$

следующим образом: обозначим через n_1 натуральное число, для которого

$$mE(|f_{n_1} - f| \geqslant \sigma_1) < \eta_1.$$

Такое число обязательно существует, ибо

$$mE(|f_n - f| \geqslant \sigma_1) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Затем через n_2 обозначим то натуральное число, для которого

$$mE(|f_{n_2} - f| \geqslant \sigma_2) < \eta_2, \qquad n_2 > n_1.$$

Вообще через n_k мы обозначаем такое число, что

$$mE(|f_{n_k} - f| \geqslant \sigma_k) < \eta_k, \qquad n_k > n_{k-1}.$$

Последовательность (*), таким образом, построена.

Теперь установим, что почти везде на множестве E будет

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x) = f(x). \qquad (*_*)$$

Действительно, пусть

$$R_i = \sum_{k=i}^{\infty} E(|f_{n_k} - f| \geqslant \sigma_k), \quad Q = \prod_{i=1}^{\infty} R_i.$$

Так как $R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \ldots$, то (теорема 12, § 4, гл. III)

$$mR_i \to mQ.$$

С другой стороны, очевидно, что $mR_i < \sum_{k=i}^{\infty} \eta_k$, так что $mR_i \to 0$ и, стало быть, $mQ = 0$.

---

[1]) Формулируя теорему, мы считаем само собою ясным, что имеют место все оговорки, сделанные при определении сходимости по мере, как-то: измеримость множества E, на котором заданы функции, измеримость самих функций и т. п.

Остается проверить, что соотношение $(*_*)$ имеет место для всех x из множества $E-Q$.

Пусть $x_0 \in E-Q$. Тогда $x_0 \overline{\in} R_{i_0}$. Иначе говоря, при $k \geqslant i_0$

$$x_0 \overline{\in} E(|f_{n_k} - f| \geqslant \sigma_k),$$

и, следовательно,

$$|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| < \sigma_k \qquad (k \geqslant i_0)$$

и, поскольку $\sigma_k \to 0$, ясно, что $f_{n_k}(x_0) \to f(x_0)$.

Теорема доказана.

Теорема Лебега дала повод к установлению понятия сходимости по мере. С другой стороны, с помощью этой же теоремы можно установить весьма важную теорему Д. Ф. Егорова. [1])

Теорема 5 (Д. Ф. Егоров). *Пусть на измеримом множестве E задана последовательность измеримых и почти везде конечных функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ..., почти везде сходящаяся к измеримой и почти везде конечной функции $f(x)$:*

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x). \qquad (*)$$

В таком случае, для любого $\delta > 0$ существует такое измеримое множество $E_\delta \subset E$, что:

1) $mE_\delta > mE - \delta$;

2) *на множестве E_δ стремление $(*)$ происходит равномерно.*

Доказательство. При доказательстве теоремы Лебега было установлено, что при любом $\sigma > 0$ будет

$$mR_n(\sigma) \underset{n \to \infty}{\to} 0, \qquad (1)$$

где $R_n(\sigma) = \sum_{k=n}^{\infty} E(|f_k - f| \geqslant \sigma)$.

Заметив это, возьмем сходящийся положительный ряд

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \ldots \qquad (\eta_i > 0)$$

и стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \ldots, \quad \lim \sigma_i = 0.$$

В силу (1), можно каждому натуральному i соотнести такое натуральное n_i, что $mR_{n_i}(\sigma_i) < \eta_i$.

Сделав это, найдем такое i_0, что $\sum_{i=i_0}^{\infty} \eta_i < \delta$ (где δ число, фигурирующее в формулировке теоремы), и положим $e = \sum_{i=i_0}^{\infty} R_{n_i}(\sigma_i)$.

Очевидно,

$$me < \delta.$$

---

[1]) В менее общих предположениях этот результат был установлен и К. Северини.

Пусть $E_\delta = E - e$. Установим, что множество E_δ требуемое. Неравенство $mE_\delta > mE - \delta$ ясно, так что остается убедиться в равномерности стремления

$$f_n(x) \to f(x)$$

на множестве E_δ.

Пусть $\varepsilon > 0$. Найдем i такое, что $i \geqslant i_0$, $\sigma_i < \varepsilon$, и покажем, что при $k \geqslant n_i$ и при всех $x \in E_\delta$ будет

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

откуда и будет следовать теорема.

Если $x \in E_\delta$, то $x \overline{\in} e$. Значит, в частности, $x \overline{\in} R_{n_i}(\sigma_i)$.

Иначе говоря, при $k \geqslant n_i$

$$x \overline{\in} E(|f_k - f| \geqslant \sigma_i),$$

так что

$$|f_k(x) - f(x)| < \sigma_i \qquad (k \geqslant n_i),$$

и тем более

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (k \geqslant n_i).$$

Теорема доказана, ибо n_i зависит только от ε, но не от x.

§ 4. Структура измеримых функций

При изучении какой-нибудь функции сам собою встает вопрос о точном или приближенном представлении ее с помощью функций более простой природы.

Таковы, например, алгебраические вопросы о разложении многочлена на множители или рациональной дроби на простейшие. Таков же вопрос о разложении непрерывной функции в степенной или тригонометрический ряд и т. п.

В этом параграфе мы устанавливаем различные теоремы о приближении измеримых функций функциями непрерывными, т. е. решаем сходный вопрос для измеримых функций. Эти теоремы позволят нам найти основное структурное свойство измеримой функции, выражаемое теоремой 4.

Теорема 1. *Пусть на множестве E задана измеримая, почти везде конечная функция $f(x)$. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует измеримая ограниченная функция $g(x)$, такая, что $mE(f \neq g) < \varepsilon$.*

Доказательство. Положим

$$A_k = E(|f| > k), \quad Q = E(|f| = +\infty).$$

По условию, $mQ = 0$. Ввиду очевидных соотношений

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots, \quad Q = \prod_{k=1}^{\infty} A_k$$

будет (теорема 12, § 4, гл. III) при $k \to \infty$

$$mA_k \to mQ = 0.$$

Значит, найдется такое k_0, что $mA_{k_0} < \varepsilon$.

Определим на множестве E функцию $g(x)$, полагая

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in E - A_{k_0}, \\ 0 & \text{при } x \in A_{k_0}. \end{cases}$$

Эта функция измерима и, кроме того, ограничена, поскольку $|g(x)| \leqslant k_0$. Наконец, $E(f \neq g) = A_{k_0}$, что и доказывает теорему.

Доказанная теорема означает, что всякая измеримая и почти везде конечная функция становится *ограниченной*, если пренебречь множеством сколь угодно малой меры.

Определение. Пусть функция $f(x)$ задана на множестве E и $x_0 \in E$, причем $f(x_0) \neq \pm\infty$. Говорят, что *функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 в двух случаях: 1) если x_0 есть изолированная точка E; 2) если $x_0 \in E'$ и соотношения $x_n \to x_0$, $x_n \in E$ влекут соотношение

$$f(x_n) \to f(x_0).$$

Если $f(x)$ непрерывна в каждой точке множества E, то говорят, что она непрерывна на этом множестве.

Лемма 1. *Пусть множества $F_1, F_2, \ldots, F_n$ замкнуты и попарно не пересекаются. Если функция $\varphi(x)$, заданная на множестве*

$$F = \sum_{k=1}^{n} F_k,$$

постоянна на каждом из множеств F_k, то она непрерывна на множестве F.

Доказательство. Пусть $x_0 \in F'$ и $x_i \to x_0$, $x_i \in F$.

В силу замкнутости множества F точка x_0 принадлежит этому множеству и, стало быть, найдется такое m, что $x_0 \in F_m$.

Но множества F_k попарно не пересекаются. Значит, если $k \neq m$, то $x_0 \overline{\in} F_k$ и, в силу замкнутости множества F_k, точка x_0 не является и предельной точкой этого множества.

Отсюда следует, что в последовательности $\{x_i\}$ может быть только конечное число точек, принадлежащих множеству F_k при $k \neq m$. Отметим все члены последовательности, которые входят в одно из множеств $F_1, \ldots, F_{m-1}, F_{m+1}, \ldots, F_n$, и пусть x_{i_0}, последний из них. Тогда при $i > i_0$ необходимо будет $x_i \in F_m$, т. е. при $i > i_0$ оказывается $\varphi(x_i) = \varphi(x_0)$, а это и доказывает лемму.

Лемма 2. *Пусть F есть замкнутое множество, содержащееся в сегменте $[a, b]$. Если функция $\varphi(x)$ задана и непрерывна на множестве F, то можно определить на $[a, b]$ функцию $\psi(x)$ со следующими свойствами:*

1) $\psi(x)$ *непрерывна;*
2) *если $x \in F$, то $\psi(x) = \varphi(x)$;*
3) $\max|\psi(x)| = \max|\varphi(x)|$.

Доказательство. Обозначим через $[\alpha, \beta]$ наименьший сегмент, содержащий множество F. Если бы требуемая функция $\psi(x)$ была уже построена на сегменте $[\alpha, \beta]$, то достаточно было бы дополнить ее определение, полагая

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(\alpha), & \text{если } x \in [a, \alpha), \\ \varphi(\beta), & \text{если } x \in (\beta, b], \end{cases}$$

чтобы получить требуемую функцию уже на всем сегменте $[a, b]$.

Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $[a, b]$ и есть наименьший сегмент, содержащий множество F.

Если $F = [a, b]$, то теорема тривиальна. Будем считать, что $F \neq [a, b]$. Тогда множество $[a, b] - F$ состоит из конечного или счетного множества взаимно не налегающих интервалов, концы которых принадлежат F (дополнительных интервалов множества F).

Зададим функцию $\psi(x)$, полагая ее равной $\varphi(x)$ в точках множества F и линейной на всех дополнительных интервалах.[1]

Убедимся в непрерывности этой функции. Непрерывность ее в каждой точке множества $[a, b] - F$ очевидна. Пусть x_0 есть точка множества F. Мы покажем, что функция $\psi(x)$ непрерывна в этой точке *слева* (непрерывность справа устанавливается совершенно аналогично).

Если точка x_0 служит правым концом какого-нибудь дополнительного интервала, то непрерывность функции $\psi(x)$ в этой точке слева очевидна.

Пусть же x_0 не является правым концом никакого дополнительного интервала и пусть $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ последовательность точек, стремящихся к x_0.

Если $x_n \in F$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, то, используя непрерывность на множестве F функции $\varphi(x)$, имеем $\psi(x_n) = \varphi(x_n) \to \varphi(x_0) = \psi(x_0)$. Поэтому можно считать, что $x_n \overline{\in} F$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

В таком случае точка x_1 попадает в какой-то дополнительный интервал (λ_1, μ_1), причем $\mu_1 < x_0$ (ибо x_0 не служит правым концом дополнительного интервала). Пусть

$$\lambda_1 < x_k < \mu_1 \quad (k = 1, 2, \ldots, n_1) \; x_{n_1+1} > \mu_1.$$

Тогда x_{n_1+1} попадает в другой дополнительный интервал (λ_2, μ_2) причем снова $\mu_2 < x_0$. Продолжая это рассуждение, мы приходим к последовательности (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2), (λ_3, μ_3), ... дополнительных интервалов, расположенных в порядке номеров слева направо и таких, что

$$x_k \in (\lambda_i, \mu_i) \quad (k = n_{i-1} + 1, \ldots, n_i).$$

Соотношение $x_{n_i} < \mu_i < x_0$ показывает, что $\mu_i \to x_0$, а из того, что $\mu_{i-1} \leqslant \lambda_i < x_0$, ясно, что и $\lambda_i \to x_0$.

Но λ_i и μ_i входят в F, так что

$$\lim \psi(\lambda_i) = \lim \psi(\mu_i) = \psi(x_0).$$

[1]) Точнее, на з а м ы к а н и я х этих интервалов.

Ввиду того, что значения линейной функции в каком-нибудь интервале лежат между ее значениями на концах этого интервала, ясно, что и $\lim \psi(x_n) = \psi(x_0)$.

Итак, непрерывность функции $\psi(x)$ доказана.

Из самого ее построения видно, что она совпадает с $\varphi(x)$ на множестве F.

Наконец, по известной теореме Вейерштрасса, среди значений непрерывной на сегменте функции $|\psi(x)|$ есть наибольшее — $\max|\psi(x)|$. Легко видеть, что этот максимум достигается именно в точке, принадлежащей множеству F, ибо на дополнительных интервалах функция $\psi(x)$ линейна. Поэтому $\max|\psi(x)| = \max|\varphi(x)|$.

Лемма доказана полностью.

Теорема 2 (Э. Борель). *Пусть на сегменте $[a, b]$ задана измеримая и почти везде конечная функция $f(x)$. Каковы бы ни были числа $\sigma > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует непрерывная на $[a, b]$ функция $\psi(x)$, для которой*

$$mE(|f - \psi| \geqslant \sigma) < \varepsilon.$$

Если при этом $|f(x)| \leqslant K$, то можно и $\psi(x)$ выбрать так, что $|\psi(x)| \leqslant K$.

Доказательство. Предположим сначала, что $|f(x)| \leqslant K$, т. е. что функция $f(x)$ ограничена.

Фиксируя произвольные $\sigma > 0$ и $\varepsilon > 0$, найдем столь большое натуральное m, что $K/m < \sigma$, и построим множества

$$E_i = E\left(\frac{i-1}{m}K \leqslant f < \frac{i}{m}K\right) \quad (i = 1-m,\ 2-m,\ \ldots,\ m-1)$$

$$E_m = E\left(\frac{m-1}{m}K \leqslant f \leqslant K\right).$$

Эти множества измеримы, попарно не пересекаются и

$$[a, b] = \sum_{i=1-m}^{m} E_i.$$

Построим для каждого i замкнутое множество $F_i \subset E_i$ с мерой $mF_i > mE_i - \frac{\varepsilon}{2m}$ и положим $F = \sum_{i=1-m}^{m} F_i$.

Ясно, что $[a, b] - F = \sum_i (E_i - F_i)$, откуда $m[a, b] - mF < \varepsilon$.

Зададим теперь на множестве F функцию $\varphi(x)$, полагая

$$\varphi(x) = \frac{i}{m}K \quad \text{при} \quad x \in F_i \quad (i = 1-m, \ldots, m).$$

В силу леммы 1 эта функция непрерывна на множестве F, $|\varphi(x)| \leqslant K$ и, наконец, при $x \in F$ будет $|f(x) - \varphi(x)| < \sigma$.

Остается применить лемму 2. Это приводит к непрерывной функции $\psi(x)$, совпадающей на множестве F с функцией $\varphi(x)$,

причем $|\psi(x)| \leqslant K$. Поскольку $E(|f-\psi| \geqslant \sigma) \subset [a, b]-F$, ясно, что функция $\psi(x)$ требуемая.

Итак, для ограниченной функции теорема доказана.

Допустим теперь, что $f(x)$ не ограничена. Тогда, пользуясь теоремой 1, можно построить такую ограниченную функцию $g(x)$, что $mE(f \neq g) < \varepsilon/2$.

Применяя уже доказанную часть теоремы к функции $g(x)$, мы найдем такую непрерывную функцию $\psi(x)$, что

$$mE(|g-\psi| \geqslant \sigma) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но легко видеть, что

$$E(|f-\psi| \geqslant \sigma) \subset E(f \neq g) + E(|g-\psi| \geqslant \sigma),$$

так что функция $\psi(x)$ решает задачу.

Следствие. *Для всякой измеримой и почти везде конечной функции $f(x)$, заданной на сегменте $[a, b]$, существует последовательность непрерывных функций $\psi_n(x)$, сходящаяся по мере к функции $f(x)$.*

В самом деле, взяв две стремящиеся к нулю последовательности

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \ldots, \qquad \sigma_n \to 0,$$
$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \ldots, \qquad \varepsilon_n \to 0,$$

построим для каждого n такую непрерывную функцию $\psi_n(x)$, что

$$mE(|f-\psi_n| \geqslant \sigma_n) < \varepsilon_n.$$

Легко видеть, что $\psi_n(x) \Rightarrow f(x)$.

Действительно, какое бы $\sigma > 0$ ни взять, для $n \geqslant n_0$ будет $\sigma_n < \sigma$, а для таких n

$$E(|f-\psi_n| \geqslant \sigma) \subset E(|f-\psi_n| \geqslant \sigma_n),$$

откуда и следует наше утверждение.

Применив к последовательности $\{\psi_n(x)\}$ теорему Ф. Рисса из § 3, мы приходим к последовательности непрерывных функций $\{\psi_{n_k}(x)\}$, которая сходится к функции $f(x)$ почти везде.

Иначе говоря, установлена

Теорема 3 (М. Фреше). *Для всякой измеримой и почти везде конечной функции $f(x)$, заданной на сегменте $[a, b]$, существует последовательность непрерывных функций, сходящаяся к $f(x)$ почти везде.*

С помощью этой теоремы легко устанавливается весьма замечательная и важная

Теорема 4 (Н. Н. Лузин). *Пусть $f(x)$ измеримая и почти везде конечная функция, заданная на $[a, b]$. Каково бы ни было $\delta > 0$, существует такая непрерывная функция $\varphi(x)$, что*

$$mE(f \neq \varphi) < \delta.$$

Если, в частности, $|f(x)| \leqslant K$, то и $|\varphi(x)| \leqslant K$.

Доказательство. Пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ... есть та последовательность непрерывных функций, о которой шла речь в теореме Фреше. Пользуясь теоремой Д. Ф. Егорова, мы найдем такое множество E_δ, что $mE_\delta > b - a - \frac{\delta}{2}$, причем на множестве E_δ равномерно относительно x будет $\varphi_n(x) \to f(x)$.

Отсюда, в силу известной теоремы анализа, функция $f(x)$ непрерывна на множестве E_δ [1]) (в смысле определения, данного в начале параграфа. Не следует понимать это так, что функция $f(x)$, рассматриваемая на $[a, b]$, непрерывна в каждой точке множества E_δ. Нужно вовсе отказаться от рассмотрения $f(x)$ вне множества E_δ).

Найдем замкнутое подмножество F множества E_δ с мерой $mF > mE_\delta - \frac{\delta}{2}$.

Если функцию $f(x)$ рассматривать только на множестве F, то она, очевидно, оказывается непрерывной на этом множестве.

Применяя лемму 2, мы приходим к непрерывной функции $\varphi(x)$, заданной на $[a, b]$ и совпадающей с $f(x)$ на множестве F.

Значит, $E(f \neq \varphi) \subset [a, b] - F$, и мера этого множества меньше δ, так что $\varphi(x)$ есть требуемая функция.

Если, в частности, $|f(x)| \leqslant K$, то это неравенство верно и для тех x, которые входят в F, а тогда, в силу той же леммы 2, и $|\varphi(x)| \leqslant K$.

Теорема доказана.

Теорему Н. Н. Лузина можно сформулировать и так: *измеримая и почти везде конечная функция становится непрерывной, если пренебречь множеством сколь угодно малой меры.* Некоторые авторы [2]) принимают это важное свойство за самое определение понятия измеримой функции. Нетрудно установить равносильность обоих определений; второе менее формально и сразу показывает, что понятие измеримой функции тесно связано с понятием функции непрерывной.

§ 5. Теоремы Вейерштрасса

В предыдущем параграфе мы установили ряд теорем об аппроксимации измеримой функции с помощью функций непрерывных. Можно пойти дальше и вместо непрерывных функций говорить о многочленах.

Для этой цели нам понадобится, важная и сама по себе, теорема Вейерштрасса. Мы изложим ее, следуя С. Н. Бернштейну.

***Лемма 1.** При всяком x будет*

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1. \tag{1}$$

[1]) В курсах анализа теорема доказывается для случая функций, заданных на сегменте, но доказательство сохраняет силу и для функций, заданных на любом множестве.

[2]) См., например: П. С. Александров и А. Н. Колмогоров, Введение в теорию функций действительного переменного, 1938 г.

Действительно, полагая в формуле бинома Ньютона $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ $a=x$, $b=1-x$, получаем формулу (1).

Лемма 2. *При всех вещественных x будет*

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{n}{4}. \tag{2}$$

Доказательство. Продифференцируем по z тождество

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k = (1+z)^n \tag{3}$$

и умножим результат на z:

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k z^k = nz(1+z)^{n-1}. \tag{4}$$

Дифференцируя (4) и умножая результат на z, получим

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k z^k = nz(1+nz)(1+z)^{n-2}. \tag{5}$$

Положим в (3), (4) и (5) $z = x/(1-x)$ и умножим полученные тождества на $(1-x)^n$. Это дает

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1, \tag{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx, \tag{7}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x+nx). \tag{8}$$

Умножим (6) на n^2x^2, (7) на $-2nx$, (8) на 1 и все сложим:

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

Для доказательства леммы достаточно отметить, что при всех вещественных x будет[1] $x(1-x) \leqslant 1/4$.

Определение 1. Пусть $f(x)$ конечная функция, заданная на сегменте $[0, 1]$. Многочлен

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \tag{9}$$

называется *многочленом Бернштейна* для функции $f(x)$.

Теорема 1 (С. Н. Бернштейн). *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[0, 1]$, то при $n \to \infty$ равномерно относительно x будет*

$$B_n(x) \to f(x). \tag{10}$$

---

[1]) В самом деле, $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 \geqslant 0$. Стало быть, $1 \geqslant 4x(1-x)$.

Доказательство. Пусть $M = \max |f(x)|$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем такое $\delta > 0$, что $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$, как только $|x'' - x'| < \delta$.

Сделав это, возьмем произвольное $x \in [0, 1]$. Из (1) следует, что $f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$, откуда

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \tag{11}$$

Разобьем все числа $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ на две категории A и B, так что

$$k \in A, \text{ если } \left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta, \qquad k \in B, \text{ если } \left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \delta.$$

Если $k \in A$, то $\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| < \varepsilon$, и, на основании леммы 1,

$$\sum_A \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \varepsilon \sum_A C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \varepsilon. \tag{12}$$

Если же $k \in B$, то $\frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2} \geqslant 1$, откуда, в силу леммы 2,

$$\sum_B \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \cdot C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{2M}{n^2\delta^2} \sum_B (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} < \frac{M}{2n\delta^2}. \tag{13}$$

Сопоставляя (11), (12) и (13), находим, что для любого $x \in [0, 1]$

$$|B_n(x) - f(x)| < \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}.$$

Значит, при $n > \frac{M}{2\varepsilon\delta^2}$ будет $|B_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Теорема 2 (К. Вейерштрасс). *Пусть $f(x)$ функция непрерывная на сегменте $[a, b]$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $P(x)$, что при всех $x \in [a, b]$*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Если $[a, b] = [0, 1]$, то теорема непосредственно вытекает из теоремы Бернштейна. Пусть $[a, b] \neq [0, 1]$. Рассмотрим следующую функцию от аргумента y: $f[a + y(b-a)]$.

Эта функция задана и непрерывна на сегменте $[0, 1]$. Найдем такой многочлен $Q(y)$, что при $y \in [0, 1]$

$$|f[a + y(b-a)] - Q(y)| < \varepsilon.$$

Если $x \in [a, b]$, то $\frac{x-a}{b-a} \in [0, 1]$ и, стало быть,

$$\left| f(x) - Q\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right| < \varepsilon.$$

Поэтому многочлен $P(x)=Q\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ требуемый.

С помощью теоремы Вейерштрасса можно теоремы Бореля и Фреше (но не Лузина!) формулировать иначе. Например, теорему Фреше можно высказать в такой форме.

Теорема 3 (М. Фреше). *Для всякой измеримой и почти везде конечной функции $f(x)$, заданной на $[a, b]$, существует последовательность многочленов, сходящаяся к $f(x)$ почти везде.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ есть последовательность непрерывных функций, сходящаяся почти везде к $f(x)$. Если $P_n(x)$ такой многочлен, что для всех $x \in [a, b]$

$$|P_n(x)-\varphi_n(x)|<\frac{1}{n},$$

то последовательность $\{P_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ в любой точке x, где $\varphi_n(x) \to \to f(x)$, что и доказывает теорему.

Предоставляем читателю соответственно изменить теорему Бореля (с сохранением оценки $|P_n(x)| \leqslant \sup |f(x)|$!).

В тесной связи с доказанной теоремой Вейерштрасса находится другая теорема того же автора об аппроксимации *периодических* непрерывных функций с помощью тригонометрических многочленов.

Определение 2. *Тригонометрическим многочленом n-го порядка* называется функция

$$T(x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx+b_k \sin kx).$$

Если $b_1=\ldots=b_n=0$, то тригонометрический многочлен $T(x)$ называется *четным.*

Лемма 3. a) *Функция $\cos^k x$ представима четным тригонометрическим многочленом.*

b) *Если $T(x)$ тригонометрический многочлен, то $T(x)\sin x$ также есть тригонометрический многочлен.*

c) *Если $T(x)$ тригонометрический многочлен, то $T(x+a)$ также есть тригонометрический многочлен.*

Доказательство предоставляем читателю.

Лемма 4. *Если функция $f(x)$ задана и непрерывна на сегменте $[0, \pi]$, то для всякого $\varepsilon>0$ существует такой четный тригонометрический многочлен $T(x)$, что при всех $x \in [0, \pi]$ будет*

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(\arccos y)$.

Эта функция задана и непрерывна на сегменте $[-1, +1]$.

Поэтому найдется многочлен $\sum_{k=0}^{n} a_k y^k$ такой, что при всех $y \in [-1, +1]$

$$\left|f(\arccos y)-\sum_{k=0}^{n} a_k y^k\right|<\varepsilon.$$

Пусть теперь $x \in [0, \pi]$. Тогда $\cos x \in [-1, +1]$ и, стало быть,

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n} a_k \cos^k x\right|<\varepsilon.$$

Остается заметить, что в силу леммы 3 (a) функция $\sum_{k=0}^{n} a_k \cos^k x$ есть четный тригонометрический многочлен.

Следствие. *Если четная функция $f(x)$ имеет период 2π и непрерывна на всей оси, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой тригонометрический многочлен, что при всех вещественных x будет $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$.*

Действительно, на сегменте $[0, \pi]$ этому неравенству можно удовлетворить *четным* тригонометрическим многочленом $T(x)$, так что неравенство само собой удовлетворяется и при $x \in [-\pi, 0]$, а тогда, благодаря периодичности разности $f(x) - T(x)$, оно удовлетворяется везде.

Теорема 4 (К. Вейерштрасс). *Пусть $f(x)$ непрерывная периодическая функция периода 2π. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такой тригонометрический многочлен $T(x)$, что при всех x будет*

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. В силу следствия леммы 4 для *четных* функций

$$f(x) + f(-x), \quad [f(x) - f(-x)] \sin x$$

найдутся такие тригонометрические многочлены $T_1(x)$ и $T_2(x)$, что

$$f(x) + f(-x) = T_1(x) + \alpha_1(x), \quad [f(x) - f(-x)] \sin x = T_2(x) + \alpha_2(x),$$

где $|\alpha_1(x)| < \varepsilon/2$, $|\alpha_2(x)| < \varepsilon/2$.

Умножая первое из этих равенств на $\sin^2 x$, а второе на $\sin x$, складывая и деля на 2, получаем

$$f(x) \sin^2 x = T_3(x) + \beta(x) \quad \left(|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

где $T_3(x)$ снова есть некоторый тригонометрический многочлен.

Здесь функция $f(x)$ была любой непрерывной периодической функцией. Значит, такое же равенство справедливо для функции $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$:

$$f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin^2 x = T_4(x) + \gamma(x) \quad \left(|\gamma(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Заменяя здесь x на $x + \pi/2$, получим

$$f(x) \cos^2 x = T_5(x) + \delta(x) \quad \left(|\delta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

откуда

$$f(x) = T_3(x) + T_5(x) + \beta(x) + \delta(x),$$

т. е. полином $T_3(x) + T_5(x)$ требуемый.

Сейчас эту теорему мы не будем связывать с теорией измеримых функций, но ниже она будет нам весьма полезна.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

1. Если $f_n(x) \Rightarrow f(x)$, $g_n(x) \Rightarrow g(x)$, то $f_n(x) + g_n(x) \Rightarrow f(x) + g(x)$.

2. Если $f_n(x) \Rightarrow f(x)$, а $g(x)$ измерима и почти везде конечна, то $f_n(x) g(x) \Rightarrow f(x) g(x)$.

3. Распространить теорему Егорова на случай последовательности функций, которая в каждой точке множества E стремится к $+\infty$.

4. Существует ряд многочленов $p_1(x) + p_2(x) + p_3(x) \ldots$, обладающий следующим свойством: какую бы непрерывную на произвольном сегменте $[a, b]$ функцию $f(x)$ ни взять, можно так сгруппировать члены ряда (не меняя их порядка), чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left[p_{n_k+1}(x) + \ldots + p_{n_{k+1}}(x)\right]$ сходился к $f(x)$ равномерно на $[a, b]$.

5. Для того чтобы последовательность измеримых и почти везде конечных функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... сходились по мере, необходимо и достаточно,

чтобы всякой паре чисел $\sigma > 0$ и $\varepsilon > 0$ отвечало такое N, что при $n > N$ и $m > N$ будет $mE(|f_n - f_m| \geqslant \sigma) < \varepsilon$ (Ф. Рисс).

6. В теоремах Бореля и Фреше можно вместо непрерывных функций говорить о тригонометрических многочленах (если основной сегмент есть $[-\pi, +\pi]$).

7. Точная верхняя граница счетного множества измеримых функций есть измеримая функция.

8. Если при любом фиксированном n и при $k \to \infty$ будет

$$f_k^{(n)}(x) \Rightarrow f^{(n)}(x),$$

а при $n \to \infty$ будет

$$f^{(n)}(x) \Rightarrow f(x),$$

то из множества $\left\{f_k^{(n)}(x)\right\}$ можно извлечь последовательность, сходящуюся по мере к $f(x)$.

9. Предыдущий результат не верен, если всюду в его формулировке заменить сходимость по мере на сходимость в обычном смысле.

10. Пусть $f(t)$ измеримая и почти везде конечная функция, заданная на сегменте $E = [a, b]$. Доказать существование такой *убывающей* функции $g(t)$, заданной на $[a, b]$, которая при всех вещественных x удовлетворяет соотношению $mE(g > x) = mE(f > x)$.

11. Пусть $f(t)$ измеримая и почти везде конечная функция, заданная на сегменте $E = [a, b]$. Доказать существование и единственность такого числа h, что

$$mE(f \geqslant h) \geqslant \frac{b-a}{2}, \quad mE(f \geqslant H) < \frac{b-a}{2}, \quad \text{при} \quad H > h,$$

(Л. В. Канторович).

ГЛАВА V

ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА ОТ ОГРАНИЧЕННОЙ ФУНКЦИИ

§ 1. Определение интеграла Лебега

Классическое определение интеграла, данное О. Коши и развитое Б. Риманом, состоит, как известно, в следующем: рассматривается конечная функция $f(x)$, заданная на сегменте $[a, b]$; этот сегмент разбивается на части точками

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

в каждой части $[x_k, x_{k+1}]$ выбирается точка ξ_k и составляется риманова сумма

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Если сумма σ при стремлении к нулю числа

$$\lambda = \max(x_{k+1} - x_k)$$

стремится к конечному пределу I, не зависящему ни от способа дробления $[a, b]$, ни от выбора точек ξ_k, то этот предел I называется интегралом Римана функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Иногда, желая подчеркнуть, что речь идет именно о римановом интеграле, пишут

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Функции, для которых интеграл Римана существует, называются интегрируемыми в смысле Римана или, короче, интегрируемыми (R). Для интегрируемости (R) функции $f(x)$ необходимо, чтобы она была ограниченной.

Еще Коши установил, что всякая непрерывная функция интегрируема (R). Существуют также и разрывные функции, интегрируемые (R). В частности, такова любая разрывная монотонная функция.

Легко построить, однако, ограниченную функцию, которая не будет интегрируемой (R). Рассмотрим, например, *функцию Дирихле* $\psi(x)$, которая определяется на сегменте $[0, 1]$ следующим образом:

$$\psi(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Легко видеть, что эта функция не интегрируема (R), ибо сумма σ обращается в 0, если все точки ξ_k иррациональны и $\sigma=1$, если все ξ_k рациональны.

Таким образом, риманово определение интеграла страдает существенными недостатками — даже очень простые функции оказываются неинтегрируемыми.

Нетрудно разобраться в причинах этого обстоятельства.

Дело заключается в следующем: при составлении сумм Римана σ мы дробим сегмент $[a, b]$ на мелкие части $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ (обозначим их через $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$), в каждой части e_k берем точку ξ_k и, составив сумму $\sigma=\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\, me_k$, требуем, чтобы она имела предел, не зависящий от выбора точек ξ_k в множествах e_k. Иначе говоря, каждая точка x из множества e_k может быть взята за ξ_k, а варьирование этой точки не должно заметно влиять на значение суммы σ. А это возможно лишь в том случае, когда варьирование точки ξ_k мало изменяет величину $f(\xi_k)$. Но что же объединяет между собой различные точки x множества e_k? Их объединяет то, что они близки друг другу, ибо e_k есть малый сегмент $[x_k, x_{k+1}]$.

Если функция $f(x)$ непрерывна, то достаточная близость абсцисс x влечет за собой и близость соответствующих значений функции и мы вправе ждать, что изменение точки ξ_k в пределах множества e_k мало влияет на величину суммы σ, но для функции разрывной это вовсе не так.

Иначе можно сказать, что множества e_k составлены так, что только для непрерывных функций значение $f(\xi_k)$ можно считать нормальным представителем других значений функции на e_k.

Таким образом, самое определение риманова интеграла можно считать вполне оправданным лишь для функций непрерывных, для прочих же функций оно выглядит довольно случайным. Ниже мы убедимся, что для интегрируемости (R) необходимо, чтобы рассматриваемая функция не была «слишком разрывной».

Желая обобщить понятие интеграла на более широкие классы функций, Лебег предложил другой процесс интегрирования, в котором точки x объединяются в множества e_k не по случайному признаку своей близости на оси Ox, а по признаку достаточной близости соответствующих значений функции. С этой целью Лебег разбивает на части не сегмент $[a, b]$, расположен-

ный на оси абсцисс, а сегмент $[A, B]$, лежащий на оси ординат и включающий все значения функции $f(x)$:

$$A = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = B.$$

Если составить множества e_k так: $e_k = E(y_k \leqslant f < y_{k+1})$, то ясно, что различным точкам $x \in e_k$ и в самом деле отвечают близкие значения функции, хотя, в отличие от римановского процесса, сами точки x могут быть весьма далеки друг от друга.

В частности, хорошим представителем значений функции на множестве e_k может служить, например, y_k, так что естественно положить в основу понятия интеграла сумму $\sum\limits_{k=0}^{n-1} y_k m e_k$.

Перейдем теперь к точному изложению вопроса.

Пусть на измеримом множестве E задана измеримая ограниченная функция $f(x)$, причем

$$A < f(x) < B. \tag{1}$$

Разобьем сегмент $[A, B]$ на части точками

$$y_0 = A < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = B$$

и соотнесем каждому полусегменту $[y_k, y_{k+1})$ множество

$$e_k = E(y_k \leqslant f < y_{k+1}) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Легко проверить четыре свойства множеств e_k:

1) Множества e_k попарно не пересекаются: $e_k e_{k'} = 0$ $(k \neq k')$.

2) Эти множества измеримы.

3) $E = \sum\limits_{k=0}^{n-1} e_k$.

4) $mE = \sum\limits_{k=0}^{n-1} m e_k$.

Введем теперь *нижнюю и верхнюю суммы Лебега* s и S:

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} y_k m e_k, \quad S = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} m e_k.$$

Если мы положим $\lambda = \max(y_{k+1} - y_k)$, то будем иметь

$$0 \leqslant S - s \leqslant \lambda m E. \tag{2}$$

Основное свойство сумм Лебега выражает

Лемма. *Пусть некоторому способу дробления сегмента $[A, B]$ отвечают суммы Лебега s_0 и S_0. Если мы добавим новую точку дробления $\bar{y}$ и снова найдем суммы Лебега s и S, то окажется $s_0 \leqslant s$, $S \leqslant S_0$.*

Иначе говоря, от добавления новых точек деления нижняя сумма не уменьшается, а верхняя не увеличивается.

Доказательство. Допустим, что

$$y_i < \bar{y} < y_{i+1}. \tag{3}$$

Тогда при $k \neq i$ полусегменты $[y_k, y_{k+1})$, а с ними и множества e_k, фигурируют и в новом способе дробления. Полусегмент же $[y_i, y_{i+1})$ при переходе к новому способу заменяется двумя полусегментами $[y_i, \bar{y})$, $[\bar{y}, y_{i+1})$, в связи с чем и множество e_i разбивается на два множества

$$e'_i = E(y_i \leqslant f < \bar{y}), \quad e''_i = E(\bar{y} \leqslant f < y_{i+1}).$$

Очевидно, что $e_i = e'_i + e''_i$, $e'_i e''_i = 0$, так что

$$me_i = me'_i + me''_i. \tag{4}$$

Из сказанного ясно, что сумма s получается из суммы s_0 заменой слагаемого $y_i me_i$ двумя слагаемыми $y_i me'_i + \bar{y} me''_i$, откуда, в связи с (3) и с (4), и следует, что $s \geqslant s_0$.

Для верхних сумм рассуждение аналогично.

Следствие. *Ни одна нижняя сумма* s *не больше ни одной верхней суммы* S.

Доказательство. Рассмотрим два каких-нибудь способа дробления I и II, сегмента $[A, B]$. Пусть этим способам отвечают соответственно нижние суммы s_1 и s_2 и верхние суммы S_1 и S_2.

Составим третий способ дробления $[A, B]$ — способ III, в котором точками деления служат точки деления обоих способов I и II. Если способу III отвечают суммы s_3 и S_3, то, в силу леммы, $s_1 \leqslant s_3$, $S_3 \leqslant S_2$, откуда, в связи с тем, что $s_3 \leqslant S_3$, ясно, что $s_1 \leqslant S_2$, а это и требовалось доказать.

Выберем какую-нибудь определенную верхнюю сумму S_0. Так как для всякой нижней суммы s будет $s \leqslant S_0$, то множество $\{s\}$ всех нижних сумм Лебега оказывается ограниченным сверху. Пусть U есть его точная верхняя граница: $U = \sup\{s\}$.

Тогда ясно, что $U \leqslant S_0$.

Ввиду произвольности суммы S_0, последнее неравенство доказывает, что множество $\{S\}$ всех верхних сумм Лебега ограничено снизу. Обозначим через V его точную нижнюю границу: $V = \inf\{S\}$.

Очевидно, при любом способе дробления будет

$$s \leqslant U \leqslant V \leqslant S.$$

Но, как мы отмечали, $S - s \leqslant \lambda mE$, откуда

$$0 \leqslant V - U \leqslant \lambda mE$$

и, так как λ произвольно мало, то

$$U = V.$$

Определение. Общее значение чисел U и V называется *интегралом Лебега* функции $f(x)$ по множеству E и обозначается символом

$$(L)\int_E f(x)\,dx.$$

В тех случаях, когда смешение с другими видами интеграла исключено, пишут просто

$$\int_E f(x)\,dx.$$

В частности, если E есть сегмент $[a, b]$, употребляют символы

$$(L)\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Из сказанного выше следует, что *каждая измеримая ограниченная функция интегрируема в смысле Лебега*, или, короче, интегрируема (L). Уже из этого замечания видно, что процесс интегрирования (L) приложим к гораздо более широкому классу функций, чем процесс интегрирования (R). В частности, совершенно отпадают все вопросы, связанные с признаками интегрируемости, которые для интегралов (R) имеют сравнительно сложный характер.

Теорема 1. *Если* $\lambda \to 0$, *то суммы Лебега* s *и* S *стремятся к интегралу* $\int_E f(x)\,dx$.

Теорема непосредственно вытекает из неравенств

$$s \leqslant \int_E f(x)\,dx \leqslant S, \quad S - s \leqslant \lambda \cdot mE.$$

Из этой теоремы, между прочим, следует, что значение интеграла Лебега, которое в силу самого определения его связано с числами A и B, на самом деле от них не зависит.

Действительно, допустим, что $A < f(x) < B$, $A < f(x) < B^*$, причем $B^* < B$. Раздробим сегмент $[A, B]$ на части

$$A = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = B,$$

причем включим и точку B^* в число точек деления $B^* = y_m$.

Если мы составим множества e_k, то легко убедиться, что $e_k = 0$ $(k \geqslant m)$.

Значит,

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} y_k m e_k = \sum_{k=0}^{m-1} y_k m e_k = s^*,$$

где s^* есть нижняя сумма Лебега, построенная, исходя из сегмента $[A, B^*]$. Сгущая точки дробления и переходя к пределу, найдем, что $I = I^*$, где I и I^* суть значения интегралов Лебега, отвечающие сегментам $[A, B]$ и $[A, B^*]$. Таким образом, изменение числа B не отражается на величине интеграла. То же относится и к числу A. Этот факт весьма существен, ибо только теперь определение интеграла оказывается освобожденным от случайного характера выбора точек A и B.

§ 2. Основные свойства интеграла

В этом параграфе мы установим ряд свойств интеграла от ограниченной измеримой функции.

Теорема 1. *Если измеримая функция $f(x)$ на измеримом множестве E удовлетворяет неравенствам $a \leqslant f(x) \leqslant b$, то*

$$a \cdot mE \leqslant \int_E f(x)\,dx \leqslant b \cdot mE.$$

Эта теорема обычно называется *теоремой о среднем*.

Доказательство. Пусть n натуральное число. Если мы положим $A = a - \frac{1}{n}$, $B = b + \frac{1}{n}$, то окажется, что $A < f(x) < B$, и суммы Лебега можно будет составлять, дробя сегмент $[A, B]$. Но если $A \leqslant y_k \leqslant B$, то, очевидно,

$$A \sum_{k=0}^{n-1} me_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} y_k me_k \leqslant B \sum_{k=0}^{n-1} me_k$$

или, что то же самое,

$$A \cdot mE \leqslant s \leqslant B \cdot mE,$$

откуда и в пределе

$$\left(a - \frac{1}{n}\right) mE \leqslant \int_E f(x)\,dx \leqslant \left(b + \frac{1}{n}\right) mE.$$

В силу произвольности числа n, теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает несколько простых следствий.

Следствие 1. *Если функция $f(x)$ постоянна на измеримом множестве E и $f(x) = c$, то*

$$\int_E f(x)\,dx = c \cdot mE.$$

Следствие 2. *Если функция $f(x)$ не отрицательна (не положительна), то таков же и ее интеграл.*

Следствие 3. *Если $mE = 0$, то для любой ограниченной функции $f(x)$, заданной на множестве E, будет*

$$\int_E f(x)\,dx = 0.$$

Теорема 2. *Пусть на измеримом множестве E задана измеримая ограниченная функция $f(x)$. Если множество E есть сумма конечного числа или счетного множества попарно не пересекающихся измеримых множеств*

$$E = \sum_k E_k \qquad (E_k E_{k'} = 0,\ k \neq k'),$$

то

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_k \int_{E_k} f(x)\,dx.$$

Свойство интеграла, выражаемое этой теоремой, называется его *полной аддитивностью*.

Доказательство. Рассмотрим сначала простейший случай, когда число слагаемых равно двум: $E=E'+E''$ $(E'E''=0)$.

Если на множестве E

$$A<f(x)<B,$$

и мы, раздробив сегмент $[A, B]$ точками $y_0, y_1, \ldots, y_n$, составим множества

$$e_k=E(y_k\leqslant f<y_{k+1}),$$
$$e'_k=E'(y_k\leqslant f<y_{k+1}),$$
$$e''_k=E''(y_k\leqslant f<y_{k+1}),$$

то, очевидно, будем иметь $e_k=e'_k+e''_k$ $(e'_ke''_k=0)$, откуда

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k m e_k=\sum_{k=0}^{n-1} y_k m e'_k+\sum_{k=0}^{n-1} y_k m e''_k$$

и в пределе, при $\lambda\to 0$,

$$\int_E f(x)\,dx=\int_{E'} f(x)\,dx+\int_{E''} f(x)\,dx.$$

Итак, теорема доказана для случая двух слагаемых множеств. Пользуясь методом математической индукции, мы легко распространим теорему на случай любого конечного числа слагаемых множеств.

Остается рассмотреть случай, когда $E=\sum\limits_{k=1}^{\infty} E_k$.

В этом случае $\sum\limits_{k=1}^{\infty} mE_k=mE$, так что при $n\to\infty$ будет

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} mE_k\to 0. \qquad (*)$$

Заметив это, положим $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} E_k=R_n$. Так как для конечного числа слагаемых множеств теорема уже доказана, то

$$\int_E f\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{E_k} f\,dx+\int_{R_n} f\,dx.$$

В силу теоремы о среднем

$$A\cdot mR_n\leqslant\int_{R_n} f\,dx\leqslant B\cdot mR_n,$$

а в силу (*) мера mR_n множества R_n стремится к нулю с возрастанием n, откуда ясно, что $\int\limits_{R_n} f\,dx \to 0$. Но это и означает, что

$$\int\limits_E f\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f\,dx.$$

Из этой теоремы вытекает ряд следствий.

Следствие 1. *Если измеримые ограниченные функции $f(x)$ и $g(x)$, заданные на множестве E, эквивалентны между собой, то*

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_E g(x)\,dx.$$

Действительно, если $A = E(f \neq g)$, $B = E(f = g)$, то $mA = 0$ и $\int\limits_A f\,dx = \int\limits_A g\,dx = 0$.

На множестве же B обе функции тождественны и

$$\int\limits_B f\,dx = \int\limits_B g\,dx.$$

Остается сложить это равенство с предыдущим.

В частности, *интеграл от функции, эквивалентной нулю, равен нулю.*

Само собою разумеется, что последнее утверждение необратимо. Например, если $f(x)$ задана на сегменте $[-1, +1]$ так:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ -1 & \text{при} \quad x < 0, \end{cases}$$

то[1])

$$\int\limits_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx = -1 + 1 = 0,$$

хотя функция $f(x)$ и не эквивалентна нулю.

Однако справедливо

Следствие 2. *Если интеграл от* н е о т р и ц а т е л ь н о й *измеримой ограниченной функции $f(x)$ равен нулю*

$$\int\limits_E f(x)\,dx = 0 \quad (f(x) \geqslant 0),$$

то эта функция эквивалентна нулю.

В самом деле, легко видеть, что

$$E(f > 0) = \sum_{n=1}^{\infty} E\left(f > \frac{1}{n}\right).$$

---

[1]) Так как выбрасывание из множества E одной точки не меняет интеграла $\int\limits_E f\,dx$, то мы вправе интеграл по любому из промежутков $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) обозначать так же, как и по сегменту $[a, b]$, символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Если бы $f(x)$ не была эквивалентна нулю, то необходимо нашлось бы такое n_0, что $mE(f > 1/n_0) = \sigma > 0$.

Полагая $A = E(f > 1/n_0)$, $B = E - A$, мы имели бы, что

$$\int_A f(x)\,dx \geqslant \frac{1}{n_0}\sigma, \quad \int_B f(x)\,dx \geqslant 0,$$

и, складывая эти неравенства, мы получили бы

$$\int_E f(x)\,dx \geqslant \frac{1}{n_0}\sigma,$$

что противоречит условию.

Теорема 3. *Если на измеримом множестве Q заданы две измеримые ограниченные функции $f(x)$ и $F(x)$, то*

$$\int_Q [f(x) + F(x)]\,dx = \int_Q f(x)\,dx + \int_Q F(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $a < f(x) < b$, $A < F(x) < B$. Разобьем оба сегмента $[a, b]$ и $[A, B]$ точками

$$a = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = b, \quad A = Y_0 < Y_1 < \ldots < Y_N = B,$$

и введем в рассмотрение множества

$$e_k = Q(y_k \leqslant f < y_{k+1}), \quad E_i = Q(Y_i \leqslant F < Y_{i+1}),$$
$$T_{i,k} = E_i e_k \quad (i = 0, 1, \ldots, N-1;\ k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Очевидно, $Q = \sum\limits_{i,k} T_{i,k}$, и множества $T_{i,k}$ попарно не пересекаются. Поэтому

$$\int_Q (f + F)\,dx = \sum_{i,k} \int_{T_{i,k}} (f + F)\,dx.$$

Но на множестве $T_{i,k}$ будет

$$y_k + Y_i \leqslant f(x) + F(x) < y_{k+1} + Y_{i+1},$$

откуда, на основании теоремы о среднем,

$$(y_k + Y_i)\,mT_{i,k} \leqslant \int_{T_{i,k}} (f + F)\,dx \leqslant (y_{k+1} + Y_{i+1})\,mT_{i,k}.$$

Складывая все эти неравенства, получим

$$\sum_{i,k} (y_k + Y_i)\,mT_{i,k} \leqslant \int_Q (f + F)\,dx \leqslant \sum_{i,k} (y_{k+1} + Y_{i+1})\,mT_{i,k}. \quad (1)$$

Подсчитаем отдельно сумму

$$\sum_{i,k} y_k mT_{i,k}. \quad (2)$$

Ее можно представить в форме

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k \left(\sum_{i=0}^{N-1} mT_{i,k} \right).$$

Но

$$\sum_{i=0}^{N-1} mT_{i,k} = m\left[\sum_{i=0}^{N-1} T_{i,k}\right] = m\left[\sum_{i=0}^{N-1} E_i e_k\right] =$$

$$= m\left[e_k \sum_{i=0}^{N-1} E_i\right] = m(e_k Q) = me_k,$$

так что сумму (2) можно представить и так: $\sum_{k=0}^{n-1} y_k me_k$.

Иначе говоря, это есть нижняя сумма Лебега s_f функции $f(x)$.

Аналогично подсчитываются и прочие суммы, входящие в неравенство (1), так что этому неравенству можно дать вид

$$s_f + s_F \leqslant \int_Q (f+F)\,dx \leqslant S_f + S_F, \tag{3}$$

где введенные обозначения понятны сами собой.

Сгущая точки дробления сегментов $[a, b]$ и $[A, B]$ и переходя в неравенстве (3) к пределу, мы и получим теорему.

Теорема 4. *Если на измеримом множестве E задана измеримая ограниченная функция $f(x)$ и c есть конечная постоянная, то*

$$\int_E cf(x)\,dx = c\int_E f(x)\,dx.$$

Доказательство. Теорема тривиальна, если $c = 0$.

Рассмотрим случай, когда $c > 0$. Пусть $A < f(x) < B$.

Разбивая сегмент $[A, B]$ точками y_k и вводя, как обычно, множества e_k, мы будем иметь

$$\int_E cf(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{e_k} cf(x)\,dx.$$

Но на множестве e_k будет $cy_k \leqslant cf(x) < cy_{k+1}$, так что в силу теоремы о среднем

$$cy_k me_k \leqslant \int_{e_k} cf(x)\,dx \leqslant cy_{k+1} me_k.$$

Складывая все такие неравенства, получим

$$cs \leqslant \int_E cf(x)\,dx \leqslant cS,$$

где s и S суть суммы Лебега для функции $f(x)$. Теорема получается из последнего неравенства с помощью предельного перехода.

Пусть, наконец, $c < 0$. Тогда

$$0 = \int_E [cf(x) + (-c) f(x)]\, dx = \int_E cf(x)\, dx + (-c) \int_E f(x)\, dx,$$

откуда и следует теорема.

Следствие. *Если* $f(x)$ *и* $F(x)$ *измеримы и ограничены на множестве* E, *то*

$$\int_E [F(x) - f(x)]\, dx = \int_E F(x)\, dx - \int_E f(x)\, dx.$$

Теорема 5. *Пусть* $f(x)$ *и* $F(x)$ *измеримы и ограничены на измеримом множестве* E. *Если*

$$f(x) \leqslant F(x),$$

то

$$\int_E f(x)\, dx \leqslant \int_E F(x)\, dx.$$

Действительно, функция $F(x) - f(x)$ не отрицательна, так что

$$\int_E F\, dx - \int_E f\, dx = \int_E (F - f)\, dx \geqslant 0.$$

Теорема 6. *Если функция* $f(x)$ *измерима и ограничена на измеримом множестве* E, *то*

$$\left| \int_E f(x)\, dx \right| \leqslant \int_E |f(x)|\, dx.$$

Доказательство. Пусть $P = E(f \geqslant 0)$, $N = E(f < 0)$. Тогда

$$\int_E f\, dx = \int_P f\, dx + \int_N f\, dx = \int_P |f|\, dx - \int_N |f|\, dx,$$

$$\int_E |f|\, dx = \int_P |f|\, dx + \int_N |f|\, dx,$$

и дело сводится к элементарному неравенству

$$|a - b| \leqslant a + b \quad (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0).$$

§ 3. Предельный переход под знаком интеграла

Здесь мы рассмотрим следующий вопрос: пусть на измеримом множестве E задана последовательность измеримых ограниченных функций $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ которая в каком-нибудь смысле (везде, почти везде, по мере) сходится к измеримой ограниченной функции $F(x)$. Спрашивается, будет ли справедливо соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n(x)\, dx = \int_E F(x)\, dx. \qquad (1)$$

Если (1) верно, то говорят, что допустим предельный переход под знаком интеграла.

Легко видеть, что вообще говоря, это не так. Например, если функции $f_n(x)$ определены на сегменте $[0, 1]$ следующим образом:

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{при} \quad x \in (0, 1/n), \\ 0 & \text{при} \quad x \overline{\in} (0, 1/n), \end{cases}$$

то при всяком $x \in [0, 1]$ будет

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0, \quad \text{но} \quad \int_0^1 f_n(x)\, dx = 1,$$

и этот интеграл не стремится к нулю.

Поэтому естественно поставить вопрос о тех дополнительных ограничениях, которые нужно наложить на функцию $f_n(x)$, чтобы равенство (1) все же имело место.

Мы ограничимся доказательством следующей теоремы.

Теорема (А. Лебег). *Пусть на измеримом множестве E задана последовательность $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ измеримых ограниченных функций, сходящаяся по мере к измеримой ограниченной функции $F(x)$*

$$f_n(x) \Rightarrow F(x).$$

Если существует постоянная K, такая, что при всех n и при всех x

$$|f_n(x)| < K,$$

то

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n(x)\, dx = \int_E F(x)\, dx. \tag{1}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что почти для всех $x \in E$ будет

$$|F(x)| \leqslant K. \tag{2}$$

В самом деле, из последовательности $\{f_n(x)\}$ можно (на основании теоремы Рисса) извлечь частичную последовательность $\{f_{n_k}(x)\}$, которая сходится к $F(x)$ почти везде. Во всех точках, где

$$f_{n_k}(x) \to F(x),$$

можно перейти к пределу в неравенстве $|f_{n_k}(x)| < K$, что и приводит к (2).

Пусть теперь σ есть положительное число. Положим,

$$A_n(\sigma) = E(|f_n - F| \geqslant \sigma), \quad B_n(\sigma) = E(|f_n - F| < \sigma).$$

Тогда

$$\left| \int_E f_n\, dx - \int_E F\, dx \right| \leqslant \int_E |f_n - F|\, dx =$$

$$= \int_{A_n(\sigma)} |f_n - F|\, dx + \int_{B_n(\sigma)} |f_n - F|\, dx.$$

В силу неравенства $|f_n(x)-F(x)| \leqslant |f_n(x)|+|F(x)|$, почти для всех x из множества $A_n(\sigma)$ будет $|f_n(x)-F(x)|<2K$, так что по теореме о среднем

$$\int\limits_{A_n(\sigma)} |f_n-F|\,dx \leqslant 2K\cdot mA_n(\sigma) \qquad (3)$$

(то обстоятельство, что неравенство $|f_n-F|<2K$ может не выполняться на множестве меры 0, несущественно. Можно, например, функцию $|f_n(x)-F(x)|$ на этом множестве изменить, сделав ее равной нулю; тогда неравенство (3) будет выполняться во всех точках A. Но так как изменение функции на множестве меры 0 не влияет на величину интеграла, то (3) верно и без такого изменения).

С другой стороны, опять-таки в силу теоремы о среднем,

$$\int\limits_{B_n(\sigma)} |f_n-F|\,dx \leqslant \sigma mB_n(\sigma) \leqslant \sigma mE.$$

Сопоставляя это с (3), находим, что

$$\left|\int\limits_E f_n\,dx-\int\limits_E F\,dx\right| \leqslant 2K\cdot mA_n(\sigma)+\sigma mE. \qquad (4)$$

Заметив это, возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и найдем столь малое $\sigma>0$, что $\sigma\cdot mE<\varepsilon/2$. Фиксировав это σ, мы, на основании самого определения сходимости по мере, будем иметь, что при $n\to\infty$

$$mA_n(\sigma)\to 0$$

и, стало быть, для $n>N$ окажется $2K\cdot mA_n(\sigma)<\varepsilon/2$.

Для этих n неравенство (4) примет вид

$$\left|\int\limits_E f_n\,dx-\int\limits_E F\,dx\right|<\varepsilon,$$

что и доказывает теорему.

Легко понять, что теорема остается верной и в том случае, когда неравенство $|f_n(x)|<K$ выполняется только почти везде на множестве E. Доказательство остается прежним.

Далее, поскольку сходимость по мере общѐе обычной сходимости, то теорема и подавно сохраняет силу для того случая, когда $f_n(x)\to F(x)$ почти везде (и тем более везде).

§ 4. Сравнение интегралов Римана и Лебега

Пусть на сегменте $[a, b]$ задана (не обязательно конечная) функция $f(x)$. Пусть $x_0\in[a, b]$ и $\delta>0$. Обозначим через $m_\delta(x_0)$ и $M_\delta(x_0)$ соответственно точную нижнюю и точную верхнюю границы функции $f(x)$ на интервале $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$

$$m_\delta(x_0)=\inf\{f(x)\},\quad M_\delta(x)=\sup\{f(x)\} \qquad (x_0-\delta<x<x_0+\delta).$$

(Само собою разумеется, что мы принимаем во внимание лишь те точки интервала $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, которые лежат также и на сегменте $[a,\ b]$.)

Очевидно, $m_\delta(x_0)\leqslant f(x_0)\leqslant M_\delta(x_0)$.

Если δ уменьшается, то $m_\delta(x_0)$ не убывает, а $M_\delta(x_0)$ не возрастает. Поэтому существуют определенные пределы

$$m(x_0)=\lim_{\delta\to+0} m_\delta(x_0),\qquad M(x_0)=\lim_{\delta\to+0} M_\delta(x_0),$$

причем, очевидно,

$$m_\delta(x_0)\leqslant m(x_0)\leqslant f(x_0)\leqslant M(x_0)\leqslant M_\delta(x_0).$$

Определение. Функции $m(x)$ и $M(x)$ называются соответственно *нижней и верхней функциями Бэра* для функции $f(x)$.

Теорема 1 (Р. Бэр). *Пусть функция $f(x)$ конечна в точке x_0. Для того чтобы $f(x)$ была в этой точке непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы было*

$$m(x_0)=M(x_0). \qquad (*)$$

Доказательство. Допустим, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Взяв произвольное $\varepsilon>0$, найдем такое $\delta>0$, что как только $|x-x_0|<\delta$, так сейчас же $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Иначе говоря, для всех $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ будет

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon.$$

Но отсюда следует, что

$$f(x_0)-\varepsilon\leqslant m_\delta(x_0)\leqslant M_\delta(x_0)\leqslant f(x_0)+\varepsilon,$$

а стало быть, и тем более

$$f(x_0)-\varepsilon\leqslant m(x_0)\leqslant M(x_0)\leqslant f(x_0)+\varepsilon,$$

откуда, ввиду произвольности ε, и вытекает (*). Итак, необходимость условия (*) доказана.

Пусть теперь, обратно, дано, что (*) выполнено. Тогда, очевидно, $m(x_0)=M(x_0)=f(x_0)$ и общее значение функций Бэра в точке x_0 конечно.

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и найдем столь малое $\delta>0$, что

$$m(x_0)-\varepsilon<m_\delta(x_0)\leqslant m(x_0),\qquad M(x_0)\leqslant M_\delta(x_0)<M(x_0)+\varepsilon.$$

Эти неравенства означают, что

$$f(x_0)-\varepsilon<m_\delta(x_0),\qquad M_\delta(x_0)<f(x_0)+\varepsilon.$$

Если теперь $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, то $f(x)$ лежит между $m_\delta(x_0)$ и $M_\delta(x_0)$, так что $f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$.

Иначе говоря, из того, что $|x-x_0|<\delta$, вытекает, что

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

т. е. функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Основная лемма. *Рассмотрим последовательность дроблений сегмента* $[a, b]$

$$a = x_0^{(1)} < x_1^{(1)} < \ldots < x_{n_1}^{(1)} = b,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a = x_0^{(i)} < x_1^{(i)} < \ldots < x_{n_i}^{(i)} = b,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

причем при $i \to \infty$

$$\lambda_i = \max \left[x_{k+1}^{(i)} - x_k^{(i)}\right] \to 0.$$

Пусть $m_k^{(i)}$ *есть точная нижняя граница значений функции* $f(x)$ *на сегменте* $\left[x_k^{(i)}, x_{k+1}^{(i)}\right]$. *Введем функцию* $\varphi_i(x)$, *полагая*

$$\varphi_i(x) = m_k^{(i)} \quad \text{при} \quad x \in \left(x_k^{(i)}, x_{k+1}^{(i)}\right)$$
$$\varphi_i(x) = 0 \quad \text{при} \quad x = x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)}.$$

Если x_0 *не совпадает ни с одной точкой* $x_k^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots;$ $k = 0, 1, 2, \ldots, n_i)$, *то*

$$\lim_{i \to \infty} \varphi_i(x_0) = m(x_0).$$

Доказательство. Фиксируем какое-нибудь i и обозначим через $\left[x_{k_0}^{(i)}, x_{k_0+1}^{(i)}\right]$ тот из сегментов i-го способа дробления, который содержит точку x_0. Так как x_0 не совпадает ни с одной из точек деления, то $x_{k_0}^{(i)} < x_0 < x_{k_0+1}^{(i)}$ и, следовательно, при достаточно малых $\delta > 0$ будет $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \left[x_{k_0}^{(i)}, x_{k_0+1}^{(i)}\right]$, откуда следует, что $m_{k_0}^{(i)} \leqslant m_\delta(x_0)$ или, что то же самое, что $\varphi_i(x_0) \leqslant m_\delta(x_0)$.

Устремив δ к нулю и перейдя к пределу, находим, что при любом i

$$\varphi_i(x_0) \leqslant m(x_0).$$

Этим самым лемма уже доказана для случая $m(x_0) = -\infty$.

Пусть $m(x_0) > -\infty$ и пусть $h < m(x_0)$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что $m_\delta(x_0) > h$. Фиксировав это δ, найдем столь большое i_0, что при $i > i_0$ будет $\left[x_{k_0}^{(i)}, x_{k_0+1}^{(i)}\right] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, где, как и выше, $\left[x_{k_0}^{(i)}, x_{k_0+1}^{(i)}\right]$ есть сегмент, содержащий точку x_0. Существование такого i_0 следует из условия $\lambda_i \to 0$.

Для таких i будет $m_{k_0}^{(i)} \geqslant m_\delta(x_0) > h$, или, что то же самое, $\varphi_i(x_0) > h$.

Итак, для всякого $h < m(x_0)$ найдется такое i_0, что при $i > i_0$

$$h < \varphi_i(x_0) \leqslant m(x_0),$$

а это и значит, что $\varphi_i(x_0) \to m(x_0)$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Функции Бэра* $m(x)$ *и* $M(x)$ *измеримы.*

В самом деле, множество точек деления $\left\{x_k^{(i)}\right\}$ счетно и, стало быть, имеет меру нуль. Поэтому лемма означает, что $\varphi_i(x) \to m(x)$ почти везде.

Но $\varphi_i(x)$ измерима, ибо это ступенчатая функция, значит измерима и функция $m(x)$. Для верхней функции Бэра $M(x)$ рассуждение аналогично.

Следствие 2. *Если в условиях леммы исходная функция $f(x)$ ограничена, то*

$$(L)\int_a^b \varphi_i(x)\,dx \to (L)\int_a^b m(x)\,dx.$$

Действительно, если $|f(x)| \leqslant K$, то, очевидно,

$$|\varphi_i(x)| \leqslant K, \quad |m(x)| \leqslant K,$$

откуда прежде всего следует, что эти функции интегрируемы (L), после чего остается сослаться на теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

Перефразируем теперь следствие 2. Для этого заметим, что

$$(L)\int_a^b \varphi_i(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n_i-1}\int_{x_k^{(i)}}^{x_{k+1}^{(i)}} \varphi_i(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n_i-1} m_k^{(i)}\left[x_{k+1}^{(i)} - x_k^{(i)}\right] = s_i,$$

где s_i есть нижняя сумма Дарбу, отвечающая i-му способу дробления. Таким образом, следствие 2 означает, что при $i \to \infty$

$$s_i \to (L)\int_a^b m(x)\,dx.$$

Аналогично можно установить, что верхняя сумма Дарбу S_i при возрастании i стремится к интегралу от верхней функции Бэра

$$S_i \to (L)\int_a^b M(x)\,dx.$$

Но в таком случае

$$S_i - s_i \to (L)\int_a^b [M(x) - m(x)]\,dx.$$

С другой стороны, в курсе Анализа устанавливается, что для того, чтобы ограниченная функция $f(x)$ была интегрируема (R), необходимо и достаточно условие $S_i - s_i \to 0$.

Сопоставляя это со сказанным выше, мы видим, что для интегрируемости (R) функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы было

$$(L)\int_a^b [M(x) - m(x)]\,dx = 0. \qquad (1)$$

Условие (1) во всяком случае выполнено, если разность $M(x) - m(x)$ эквивалентна нулю, но так как эта разность **неотрицательна**, то и обратно из (1) следует, что

$$m(x) \sim M(x). \qquad (2)$$

Итак, интегрируемость (R) ограниченной функции $f(x)$ равносильна соотношению (2).

Сопоставив этот результат с теоремой 1, получаем следующую теорему.

Теорема 2 (А. Лебег). *Для того чтобы ограниченная функция $f(x)$ была интегрируема (R), необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна почти везде.*

Эта замечательная теорема представляет собой наиболее простой и ясный признак интегрируемости (R). В частности, она оправдывает сделанное в § 1 замечание, что интегрируемыми (R) могут быть только «не очень разрывные» функции.

Допустим теперь, что функция $f(x)$ интегрируема (R). Тогда она необходимо ограничена и почти везде будет $m(x) = M(x)$. Но ведь $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$. Значит, почти везде $f(x) = m(x)$, и $f(x)$, будучи эквивалентна измеримой функции $m(x)$, измерима сама. Так как всякая ограниченная измеримая функция интегрируема (L), то такова же и $f(x)$, т. е. из интегрируемости какой-нибудь функции в смысле Римана вытекает ее интегрируемость в смысле Лебега.

Наконец, из эквивалентности функций $f(x)$ и $m(x)$ следует, что

$$(L)\int_a^b f(x)\,dx = (L)\int_a^b m(x)\,dx.$$

Но, как известно из курса Анализа, в условиях основной леммы для интегрируемой (R) функции $f(x)$ будет

$$s_i \to (R)\int_a^b f(x)\,dx,$$

где s_i есть нижняя сумма Дарбу, отвечающая i-му способу дробления. Сопоставляя это с тем, что, как показано нами,

$$s_i \to (L)\int_a^b m(x)\,dx,$$

мы видим, что

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (L)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Всякая функция, интегрируемая (R), необходимо интегрируема и (L), и оба ее интеграла равны между собой.*

В заключение отметим, что функция Дирихле $\psi(x)$ (равная нулю в иррациональных и единице в рациональных точках) интегрируема (L) (ибо она эквивалентна нулю), но, как мы видели в § 1, не интегрируема (R), так что теорема 3 не обратима.

§ 5. Восстановление первообразной функции

Пусть на сегменте $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$, которая в каждой точке $[a, b]$ имеет определенную производную $f'(x)$ (в концевых точках a и b имеется в виду односторонняя производная). Спрашивается, как, зная производную $f'(x)$, восстановить первообразную функцию $f(x)$?

В курсе Анализа устанавливается, что если производная $f'(x)$ интегрируема (R), то

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt,$$

но возможны случаи, когда (даже ограниченная) производная не интегрируема (R). Чтобы привести подобный пример[1]), введем понятие н и г д е н е п л о т н о г о множества. Так называется множество E, обладающее тем свойством, что всякий интервал содержит точки, не входящие в замыкание $\bar{E}$ множества E.

П р и м е р. Пусть F ограниченное, замкнутое, нигде не плотное множество положительной меры,[2]) $a = \inf F$, $b = \sup F$. Зададим на $[a, b]$ функцию $f(x)$, положив ее равной 0 на F и равной

$$(x-a_n)^2 (x-b_n)^2 \sin \frac{1}{(b_n-a_n)(x-a_n)(x-b_n)}$$

на интервалах (a_n, b_n), дополнительных к множеству F до отрезка $[a, b]$. Легко показать, что всюду на F существует $f'(x) = 0$. Действительно, пусть $x_0 \in F$ и x есть точка $[a, b]$, лежащая правее x_0. Если $x \in F$, то $f(x) = f(x_0) = 0$. Если же $x \in (a_n, b_n)$, то $x_0 \leqslant a_n < x$. Поэтому

$$x - x_0 \geqslant x - a_n$$

и

$$\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right| \leqslant (x-a_n)(b-a)^2 \leqslant (x-x_0)(b-a)^2.$$

Отсюда вытекает, что $f'_+(x_0) = 0$. Аналогично и $f'_-(x_0) = 0$. Если

---

[1]) Первый пример такого рода принадлежит итальянскому математику В. Вольтерра (1881). Немного более простой пример, приводимый нами, заимствован из книги П. С. А л е к с а н д р о в а и А. Н. К о л м о г о р о в а «Введение в теорию функций действительного переменного», изд. 3-е, 1938 г., стр. 215.

[2]) Его можно построить так: расположим все рациональные точки интервала (a, b) в последовательность $r_1, r_2, r_3, \ldots$ и для каждого k построим интервал $(r_k - \delta_k, r_k + \delta_k) \subset (a, b)$, взяв $\delta_k > 0$ столь малым, чтобы оказалось $2(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots) < b - a$; множество

$$F = [a, b] - \sum_{k=1}^{\infty} (r_k - \delta_k, r_k + \delta_k)$$

— требуемое.

$x \in (a_n, b_n)$, то

$$f'(x) = 2(x - a_n)(x - b_n)(2x - a_n - b_n)\sin\frac{1}{(b_n - a_n)(x - a_n)(x - b_n)} - \\ - \frac{2x - a_n - b_n}{b_n - a_n}\cos\frac{1}{(b_n - a_n)(x - a_n)(x - b_n)}.$$

Таким образом, всюду на $[a, b]$ существует конечная (и даже ограниченная) $f'(x)$ и потому $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Из выражения $f'(x)$ видно, что, когда x, оставаясь на (a_n, b_n), приближается к a_n или к b_n, то $f'(x)$ не имеет предела, а колеблется между -1 и $+1$. Отсюда уже легко вывести, что во всех точках F производная $f'(x)$ разрывна, а так как $mF > 0$, то $f'(x)$ не интегрируема (R).

Таким образом, интеграл Римана не в полной мере решает задачу восстановления первообразной по ее производной. Интеграл Лебега оказывается более сильным орудием для решения этой задачи.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ в каждой точке $[a, b]$ имеет производную $f'(x)$. Если $f'(x)$ ограничена, то она интегрируема (L) и*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что функция $f(x)$ необходимо непрерывна, поскольку в каждой точке $[a, b]$ она имеет конечную производную. Распространим определение функции $f(x)$ на более широкий сегмент $[a, b+1]$, полагая для $b < x \leqslant b+1$

$$f(x) = f(b) + (x - b) f'(b).$$

Функция $f(x)$ теперь непрерывна и имеет конечную производную на $[a, b+1]$.

Положим для $x \in [a, b]$ и $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\varphi_n(x) = n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right].$$

В каждой точке $x \in [a, b]$ будет $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(x) = f'(x)$, а так как каждая из функций $\varphi_n(x)$, будучи непрерывной, измерима, то измерима и $f'(x)$, откуда следует и интегрируемость (L) этой, по условию ограниченной, функции.

Далее, по формуле Лагранжа,

$$\varphi_n(x) = n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right] = f'\left(x + \frac{\theta}{n}\right) \qquad (0 < \theta < 1),$$

так что все функции $\varphi_n(x)$ ограничены одним числом и, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла,

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx. \tag{1}$$

Но

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,dx = n\int_a^b f\left(x+\frac{1}{n}\right)dx - n\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= n\int_{a+1/n}^{b+1/n} f(x)\,dx - n\int_a^b f(x)\,dx.$$

(Замену переменной в интеграле от $f(x+1/n)$ произвести можно, ибо эта функция непрерывная и интеграл можно понимать в смысле Римана, а для интегралов (R) теория подстановки хорошо известна.) Отсюда

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,dx = n\int_b^{b+1/n} f(x)\,dx - n\int_a^{a+1/n} f(x)\,dx.$$

Применяя теорему о среднем к каждому из последних двух интегралов, получим

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,dx = f\left(b+\frac{\theta_n'}{n}\right) - f\left(a+\frac{\theta_n''}{n}\right) \qquad (0<\theta_n'<1,\ 0<\theta_n''<1),$$

откуда, на основании непрерывности функции $f(x)$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\,dx = f(b)-f(a).$$

Сопоставляя это с (1), найдем, что

$$f(b)-f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx.$$

Заменяя b на произвольное x из $[a, b]$, получаем теорему.

ГЛАВА VI
СУММИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Интеграл от неотрицательной измеримой функции

В этой главе мы обобщим определение интеграла Лебега на неограниченные функции, причем в первом параграфе займемся функциями неотрицательными.

Лемма 1. *Пусть функция $f(x)$ измерима и неотрицательна на измеримом множестве E. Пусть, далее, N натуральное число. Если функция $[f(x)]_N$*[1]) *определена следующим образом:*

$$[f(x)]_N = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \leqslant N, \\ N, & \text{если } f(x) > N, \end{cases}$$

то эта функция также измерима.

Доказательство. Легко проверить, что

$$E([f]_N > a) = \begin{cases} E(f > a), & \text{если } a < N, \\ 0, & \text{если } a \geqslant N, \end{cases}$$

откуда и следует лемма.

В условиях леммы функция $[f(x)]_N$, очевидно, ограничена и, стало быть, интегрируема (L). Так как, кроме того,

$$[f(x)]_1 \leqslant [f(x)]_2 \leqslant [f(x)]_3 \leqslant \ldots,$$

то

$$\int_E [f]_1\, dx \leqslant \int_E [f]_2\, dx \leqslant \int_E [f]_3\, dx \leqslant \ldots$$

и существует определенный (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{N \to +\infty} \int_E [f(x)]_N\, dx. \qquad (*)$$

Определение. Предел $(*)$ называется *интегралом Лебега функции $f(x)$ по множеству E* и обозначается символом

$$\int_E f(x)\, dx.$$

---

[1]) Эту функцию иногда называют «срезанной функцией», или, короче, «*срезкой функции $f(x)$ числом N*».

Если этот интеграл конечен, то функция $f(x)$ называется интегрируемой (L) *или суммируемой на множестве* E.

Таким образом, мы приписываем интеграл в с я к о й измеримой неотрицательной функции, но суммируемой будем называть только ту функцию, у которой интеграл конечен.

Иногда, желая подчеркнуть, что интеграл понимается в смысле Лебега, обозначают его символом

$$(L)\int_E f(x)\,dx.$$

Для случая, когда $E=[a, b]$, употребляют обозначение

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Нетрудно видеть, что для ограниченной (измеримой и неотрицательной) функции $f(x)$ новое определение интеграла совпадает с данным ранее, ибо при достаточно больших N будет

$$[f(x)]_N \equiv f(x).$$

Поэтому всякая ограниченная (измеримая и неотрицательная) функция суммируема.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ суммируема на множестве E, то она почти везде конечна на этом множестве.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $A=E(f=+\infty)$.

На множестве A функция $[f(x)]_N$ равна N, так что

$$\int_E [f]_N\,dx \geqslant \int_A [f]_N\,dx = N\cdot mA,$$

и если бы оказалось, что $mA>0$, то интеграл $\int_E [f]_N\,dx$ возрастал бы неограниченно вместе с N, что противоречит суммируемости функции $f(x)$.

Теорема 2. *Если $mE=0$, то всякая неотрицательная функция $f(x)$ суммируема на множестве E и*

$$\int_E f(x)\,dx=0.$$

Эта теорема очевидна.

Теорема 3. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны на множестве E, то*

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E g(x)\,dx.$$

Действительно, в каждой точке, где функции $f(x)$ и $g(x)$ равны между собой, будут равны и функции $[f(x)]_N$ и $[g(x)]_N$, так что эти последние функции также эквивалентны друг другу. Остальное ясно.

Теорема 4. *Если функция $f(x)$ неотрицательна и измерима на множестве E, а E_0 есть измеримое подмножество E, то*

$$\int_{E_0} f(x)\,dx \leqslant \int_E f(x)\,dx.$$

Действительно, это неравенство очевидно, если $f(x)$ заменить на $[f(x)]_N$, после чего остается перейти к пределу при $N \to \infty$. В частности, из суммируемости функции $f(x)$ на множестве E следует ее суммируемость на всяком измеримом подмножестве E.

Теорема 5. *Пусть функции $f(x)$ и $F(x)$ неотрицательны и измеримы на множестве E. Если $f(x) \leqslant F(x)$, то*

$$\int_E f(x)\,dx \leqslant \int_E F(x)\,dx.$$

Это свойство устанавливается интегрированием очевидного неравенства $[f(x)]_N \leqslant [F(x)]_N$ и последующим предельным переходом.

В частности, если $F(x)$ суммируема, то суммируема и $f(x)$.

Теорема 6. *Если (в обычных предположениях)*

$$\int_E f(x)\,dx = 0,$$

то функция $f(x)$ эквивалентна нулю.

Доказательство. Так как

$$0 \leqslant \int_E [f(x)]_1\,dx \leqslant \int_E f(x)\,dx,$$

то функция $[f(x)]_1$ эквивалентна нулю. Но легко видеть, что всюду, где $[f(x)]_1 = 0$, будет и $f(x) = 0$, ибо $[f(x)]_1$ может принять только одно из двух значений: $f(x)$ и 1. Остальное ясно.

Теорема 7. *Пусть $f'(x)$ и $f''(x)$ две неотрицательные измеримые функции, заданные на множестве E. Если $f(x) = f'(x) + f''(x)$, то*

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E f'(x)\,dx + \int_E f''(x)\,dx.$$

Доказательство. Так как при любом N

$$[f'(x)]_N + [f''(x)]_N \leqslant f(x),$$

то

$$\int_E [f']_N\,dx + \int_E [f'']_N\,dx \leqslant \int_E f\,dx,$$

откуда, переходя к пределу при $N \to \infty$,

$$\int_E f'\,dx + \int_E f''\,dx \leqslant \int_E f\,dx. \tag{1}$$

Чтобы доказать обратное неравенство, установим, что при всяком N будет

$$[f(x)]_N \leqslant [f'(x)]_N + [f''(x)]_N. \tag{2}$$

Пусть $x_0 \in E$. Если $f'(x_0) \leqslant N$, $f''(x_0) \leqslant N$, то

$$[f(x_0)]_N \leqslant f(x_0) = f'(x_0) + f''(x_0) = [f'(x_0)]_N + [f''(x_0)]_N.$$

Если же хоть одно из чисел $f'(x_0)$ и $f''(x_0)$ больше, чем N, то

$$[f(x_0)]_N = N \leqslant [f'(x_0)]_N + [f''(x_0)]_N,$$

ибо одно из слагаемых правой части равно N, а другое неотрицательно. Итак, (2) доказано.

Интегрируя неравенство (2), получим

$$\int_E [f]_N\,dx \leqslant \int_E [f']_N\,dx + \int_E [f'']_N\,dx.$$

Отсюда

$$\int_E [f]_N\,dx \leqslant \int_E f'\,dx + \int_E f''\,dx$$

и в пределе при $N \to +\infty$

$$\int_E f\,dx \leqslant \int_E f'\,dx + \int_E f''\,dx. \qquad (3)$$

Сопоставляя (1) и (3), получаем теорему. В частности, если каждая из функций $f'(x)$ и $f''(x)$ суммируема, то суммируема и их сумма.

Теорема 8. *Если $f(x)$ измеримая неотрицательная функция, заданная на множестве E, а $k \geqslant 0$ конечное число, то*

$$\int_E kf(x)\,dx = k\int_E f(x)\,dx.$$

Доказательство. Теорема тривиальна, если $k=0$. Для всякого натурального k она есть следствие предыдущей теоремы. Если $k=1/m$, где m натуральное число, то, опять-таки в силу теоремы 7, будет

$$\int_E f(x)\,dx = m\int_E \frac{1}{m} f(x)\,dx$$

и

$$\int_E \frac{1}{m} f(x)\,dx = \frac{1}{m}\int_E f(x)\,dx.$$

Отсюда следует справедливость теоремы при всяком *рациональном* значении k. Пусть, наконец, k есть иррациональное положительное число. Возьмем такие положительные рациональные числа r и R, что $r<k<R$. В силу теоремы 5

$$r\int_E f(x)\,dx \leqslant \int_E kf(x)\,dx \leqslant R\int_E f(x)\,dx$$

и остается перейти к пределу при r и R, стремящихся к k.

В частности, из суммируемости функции $f(x)$ вытекает суммируемость $kf(x)$.

Следующая теорема очень важна. Перед ее формулировкой докажем одну почти очевидную лемму.

Лемма 2. *Пусть в точке x_0 будет*

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = F(x_0).$$

Тогда при всяком натуральном N

$$\lim_{n \to \infty} [f_n(x_0)]_N = [F(x_0)]_N.$$

Доказательство. Если $F(x_0) > N$, то для достаточно больших n будет $f_n(x_0) > N$ и, стало быть (для этих n),

$$[f_n(x_0)]_N = N = [F(x_0)]_N.$$

Точно так же, если $F(x_0) < N$, то, для достаточно больших n, будет $f_n(x_0) < N$ и, стало быть,

$$[f_n(x_0)]_N = f_n(x_0) \to F(x_0) = [F(x_0)]_N.$$

Остается рассмотреть случай, когда $F(x_0) = N$. В этом случае для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое n_0, что при $n > n_0$ будет $f_n(x_0) > N - \varepsilon$ и, стало быть (при $n > n_0$),

$$N - \varepsilon < [f_n(x_0)]_N \leqslant N,$$

т. е.

$$|[F(x_0)]_N - [f_n(x_0)]_N| < \varepsilon \qquad (n > n_0).$$

Итак, лемма верна во всех случаях.

Теорема 9 (П. Фату). *Если последовательность измеримых и неотрицательных функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... почти везде на множестве E сходится к функции $F(x)$, то*

$$\int_E F(x)\,dx \leqslant \sup\left\{\int_E f_n(x)\,dx\right\}.\text{[1]} \qquad (*)$$

Доказательство. В силу леммы, почти везде на множестве E будет (при $n \to \infty$) $[f_n(x)]_N \to [F(x)]_N$.

Поскольку каждая из функций $[f_n(x)]_N$ ограничена числом N, мы можем применить теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, так что $\int_E [F]_N\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_E [f_n]_N\,dx$.

---

[1]) Нетрудно видеть, что (*) верно и тогда, когда последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $F(x)$ не почти везде, а лишь по мере. Действительно, в этом случае из $\{f_n(x)\}$ выделяется подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$, сходящаяся к $F(x)$ почти везде, и достаточно отметить, что $\sup\left\{\int_E f_{n_k}(x)\,dx\right\} \leqslant \sup\left\{\int_E f_n(x)\,dx\right\}$. Укажем, что это замечание не есть обобщение теоремы, ибо в теореме не исключен случай, когда $F(x) \equiv +\infty$, а тогда о сходимости по мере говорить нельзя.

Но при любом n

$$\int_E [f_n]_N \, dx \leqslant \int_E f_n \, dx \leqslant \sup \left\{ \int_E f_n \, dx \right\};$$

так что и в пределе

$$\int_E [F]_N \, dx \leqslant \sup \left\{ \int_E f_n \, dx \right\}.$$

Устремив теперь N к $+\infty$ и перейдя к пределу, мы получаем теорему. В частности, если все $f_n(x)$ суммируемы и

$$\int_E f_n(x) \, dx \leqslant A < +\infty,$$

то суммируема и предельная функция $F(x)$.

Следствие. *Если в условиях теоремы существует*

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n(x) \, dx, \tag{4}$$

то

$$\int_E F(x) \, dx \leqslant \lim_{n \to \infty} \int_E f_n(x) \, dx. \tag{5}$$

Доказательство. Следствие тривиально, если предел (4) равен $+\infty$. Допустим, что

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n \, dx = l < +\infty.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое n_0, что при $n \geqslant n_0$

$$\int_E f_n \, dx < l + \varepsilon.$$

Применив теорему к последовательности функций $f_{n_0}(x)$, $f_{n_0+1}(x), \ldots$, мы получим, что

$$\int_E F \, dx \leqslant l + \varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности ε, и следует (5).

С помощью этого следствия легко получить теорему, относящуюся к вопросу о предельном переходе под знаком интеграла.

Теорема 10 (Б. Леви). *Пусть на множестве E задана возрастающая последовательность измеримых неотрицательных функций*

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x) \leqslant \ldots .$$

Если

$$F(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x),$$

то

$$\int_E F(x) \, dx = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n(x) \, dx.$$

Доказательство. Прежде всего, предел $\lim \int\limits_E f_n\,dx$ существует и, по предыдущему следствию,

$$\int\limits_E F\,dx \leqslant \lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\,dx.$$

С другой стороны, при всяком n будет $f_n(x) \leqslant F(x)$, откуда

$$\int\limits_E f_n(x)\,dx \leqslant \int\limits_E F(x)\,dx,$$

а значит, и в пределе

$$\lim \int\limits_E f_n\,dx \leqslant \int\limits_E F\,dx.$$

Теорема доказана.

Теорема 11. *Пусть на множестве E задана последовательность измеримых неотрицательных функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = F(x),$$

то

$$\int\limits_E F(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_E u_k(x)\,dx.$$

Для доказательства достаточно положить $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ и применить предыдущую теорему.

Следствие. *Если в условиях теоремы*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_E u_k(x)\,dx < +\infty,$$

то почти везде на множестве E будет

$$\lim_{k\to\infty} u_k(x) = 0. \qquad (6)$$

В самом деле, в рассматриваемом случае функция $F(x)$ суммируема и, стало быть, почти везде конечна. Иначе говоря, ряд $\sum u_k(x)$ сходится почти везде, а в точках сходимости этого ряда выполнение (6) очевидно.

Теорема 12 (Полная аддитивность интеграла). *Пусть измеримое множество E является суммой конечного числа или счетного множества попарно не пересекающихся измеримых множеств E_k*

$$E = \sum_k E_k \qquad (E_k E_{k'} = 0, \quad k \neq k').$$

Для всякой неотрицательной измеримой функции $f(x)$, заданной на множестве E, будет

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_k \int_{E_k} f(x)\,dx.$$

Доказательство. Введем функции $u_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$, полагая

$$u_k(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \in E_k, \\ 0, & \text{если} \quad x \in E - E_k. \end{cases}$$

Легко видеть, что $f(x) = \sum_k u_k(x)$, а потому (в силу теоремы 7, если число слагаемых конечно, и теоремы 11 в противном случае)

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_k \int_E u_k(x)\,dx. \tag{7}$$

Вычислим теперь интеграл $\int_E u_k(x)\,dx$. Для этого отметим, что

$$[u_k(x)]_N = \begin{cases} [f(x)]_N, & \text{если} \quad x \in E_k, \\ 0, & \text{если} \quad x \in E - E_k, \end{cases}$$

откуда следует, что

$$\int_E [u_k]_N\,dx = \int_{E_k} [f]_N\,dx.$$

Увеличивая N и переходя к пределу, найдем

$$\int_E u_k\,dx = \int_{E_k} f\,dx,$$

что, в связи с (7), и доказывает теорему.

§ 2. Суммируемые функции любого знака

Теперь мы распространим определение интеграла Лебега на неограниченные функции любого знака. Как мы увидим, это оказывается возможным не для всех измеримых функций.

Пусть $f(x)$ есть измеримая функция, заданная на измеримом множестве E. Введем функции $f_+(x)$ и $f_-(x)$, полагая

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad f(x) \geqslant 0 \\ 0, & \text{если} \quad f(x) < 0 \end{cases}; \quad f_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad f(x) \geqslant 0 \\ -f(x), & \text{если} \quad f(x) < 0. \end{cases}$$

Эти функции измеримы и неотрицательны, так что существуют оба интеграла $\int_E f_+(x)\,dx$, $\int_E f_-(x)\,dx$.

Легко видеть, что $f(x)=f_+(x)-f_-(x)$. Поэтому естественно условиться называть разность

$$\int_E f_+(x)\,dx-\int_E f_-(x)\,dx$$

интегралом от функции $f(x)$. Однако «разность» $+\infty-(+\infty)$ лишена смысла. Поэтому символ

$$\int_E f_+(x)\,dx-\int_E f_-(x)\,dx$$

имеет смысл тогда и только тогда, когда хоть одна из функций $f_+(x)$ и $f_-(x)$ оказывается суммируемой.

Определение 1. Если хоть одна из функций $f_+(x)$ или $f_-(x)$ оказывается суммируемой на множестве E, то (конечная или бесконечная) разность

$$\int_E f_+(x)\,dx-\int_E f_-(x)\,dx$$

называется *интегралом Лебега от функции* $f(x)$ *по множеству* E и обозначается символом

$$\int_E f(x)\,dx. \tag{1}$$

Если измеримая функция $f(x)$ ограничена, то обе функции $f_+(x)$ и $f_-(x)$ также оказываются ограниченными, а потому новое определение интеграла для функции $f(x)$ приводится к данному ранее. Точно так же, если (хотя бы и неограниченная) измеримая функция $f(x)$ неотрицательна, то $f_+(x)=f(x)$, $f_-(x)=0$, и мы снова приходим к старому определению интеграла.

Для того чтобы интеграл (1) существовал и был конечен, очевидно необходимо и достаточно, чтобы *обе* функции $f_+(x)$ и $f_-(x)$ были суммируемы.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется *интегрируемой* (L) *или суммируемой на множестве* E, если интеграл $\int_E f(x)\,dx$ существует и конечен.

Всякая измеримая ограниченная функция суммируема; для неотрицательной функции новое определение суммируемости равносильно данному ранее.

Класс всех функций, заданных и суммируемых на множестве E, обозначается обычно через $L(E)$. Если смешение исключено, то вместо $L(E)$ пишут просто L.

Таким образом, факт суммируемости функции $f(x)$ можно записать так: $f(x)\in L$.

Теорема 1. *Для того чтобы измеримая функция* $f(x)$ *была суммируемой, необходимо и достаточно, чтобы суммируемой была функция* $|f(x)|$. *Если это условие выполнено, то*

$$\left|\int_E f(x)\,dx\right|\leqslant\int_E |f(x)|\,dx.$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$$

и, стало быть (теорема 7, § 1),

$$\int_E |f|\,dx = \int_E f_+\,dx + \int_E f_-\,dx,$$

откуда и следует теорема.

Отметим несколько очевидных следствий теоремы.

I. *Суммируемая функция почти везде конечна.*

II. *Если $mE = 0$, то на E суммируема всякая функция $f(x)$ и $\int_E f(x)\,dx = 0$.*

III. *Функция, суммируемая на множестве E, суммируема и на всяком его измеримом подмножестве.*

IV. *Пусть функции $f(x)$ и $F(x)$ измеримы на множестве E и $|f(x)| \leqslant F(x)$. Если суммируема функция $F(x)$, то суммируема и $f(x)$.*

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны на множестве E, то, очевидно, эквивалентны $f_+(x)$ и $g_+(x)$, а также и $f_-(x)$ и $g_-(x)$. Отсюда вытекает

Теорема 2. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны. Из существования одного из интегралов $\int_E f(x)\,dx$ и $\int_E g(x)\,dx$ следует существование другого и их равенство.*

В частности, функции $f(x)$ и $g(x)$ одновременно суммируемы или нет. В дальнейшем мы вообще не будем различать между собой эквивалентные функции. Такое соглашение очень удобно: например, можно без оговорок складывать суммируемые функции. Дело в том, что при образовании суммы $f'(x) + f''(x)$ мы должны исключать из рассмотрения те точки, где слагаемые принимают бесконечные значения разных знаков. Чтобы не делать такого исключения, мы просто будем в этих точках менять значение одного из слагаемых, ибо множество таких точек имеет меру нуль (слагаемые суммируемы!). При этом безразлично, какое слагаемое изменяется и какое новое значение мы ему припишем, — новая сумма эквивалентна старой.

Теорема 3 (Конечная аддитивность интеграла). *Пусть множество E есть сумма конечного числа попарно не пересекающихся измеримых множеств*

$$E = \sum_{k=1}^{n} E_k \quad (E_k E_{k'} = 0,\ k \neq k').$$

Если функция $f(x)$ суммируема на каждом из множеств E_k, то она суммируема и на их сумме E и

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f(x)\,dx.$$

Доказательство. В силу теоремы 12, § 1 справедливы равенства

$$\int_E f_+ dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f_+ dx, \qquad \int_E f_- dx = \sum_{k-1}^{n} \int_{E_k} f_- dx,$$

причем их правые (а значит и левые) части конечны. Остается вычесть второе равенство из первого.

В случае счетного множества слагаемых из суммируемости функции $f(x)$ на каждом слагаемом не вытекает ее суммируемости на их сумме.

Пример. Пусть функция $f(x)$ задана на $(0, 1]$ следующим образом

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{при } \frac{2n+1}{2n(n+1)} < x \leqslant \frac{1}{n}, \\ -n & \text{при } \frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{2n+1}{2n(n+1)} \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Тогда $f(x)$ суммируема на каждом из полусегментов $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, причем $\int\limits_{1/(n+1)}^{1/n} f(x)\, dx = 0.$

Вместе с тем на сумме их $(0, 1]$ функция $f(x)$ не суммируема, ибо

$$\int_0^1 |f(x)|\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{1/(n+1)}^{1/n} |f(x)|\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty.$$

Однако имеют место такие теоремы о полной аддитивности интеграла.

Теорема 4. *Если функция $f(x)$ суммируема на множестве E, представимом в форме суммы счетного множества попарно не пересекающихся измеримых множеств*

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \qquad (E_k E_{k'} = 0, \quad k \neq k'),$$

то

$$\int_E f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\, dx. \tag{2}$$

Теорема 5. *Пусть измеримое множество E представимо в форме суммы счетного множества попарно не пересекающихся измеримых множеств E_k. Если $f(x)$ суммируема на каждом из множеств E_k и если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f(x)|\, dx < +\infty,$$

то $f(x)$ суммируема на множестве E и справедливо равенство (2).

Доказательство. В условиях теоремы 4 имеем (см. теорему 12, § 1)

$$\int_E f_+\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f_+\,dx,\quad \int_E f_-\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f_-\,dx,$$

причем левые (а значит и правые) части этих равенств конечны. Остается почленно вычесть второе равенство из первого.

Если выполнены условия теоремы 5, то (в силу теоремы 12, § 1)

$$\int_E |f|\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}|f|\,dx.$$

Отсюда следует суммируемость функции $|f(x)|$, а, стало быть, и функции $f(x)$ на множестве E, и дело сводится к теореме 4.

Следует отметить, что, как видно из предшествующего примера, условие теоремы 5 нельзя заменить условием сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\,dx.$$

Теорема 6. *Если функция $f(x)$ суммируема на множестве E, а k — конечная постоянная, то функция $kf(x)$ также суммируема на E и*

$$\int_E kf(x)\,dx=k\int_E f(x)\,dx.$$

Доказательство. Теорема тривиальна, если $k=0$. Для $k>0$, на основании очевидных равенств $(kf)_+=kf_+$, $(kf)_-=kf_-$, теорема сводится к теореме 8, § 1 (именно, нужно проинтегрировать указанные равенства и почленно вычесть второе из первого).

Чтобы исследовать случай отрицательного k, рассмотрим сначала более частный случай, когда $k=-1$. Легко видеть, что $(-f)_+=f_-$, $(-f)_-=f_+$, откуда

$$\int_E -f(x)\,dx=\int_E f_-(x)\,dx-\int_E f_+(x)\,dx=-\int_E f(x)\,dx.$$

Итак, множитель (-1) можно выносить из-под знака интеграла.

Пусть, наконец, k есть произвольное отрицательное число. Тогда

$$\int_E kf\,dx=-\int_E |k|\,f\,dx=-|k|\int_E f\,dx=k\int_E f\,dx$$

и теорема доказана.

Следствие. *Если функция $f(x)$ суммируема на множестве E, а $\varphi(x)$ измерима и ограничена на этом множестве, то произведение их $\varphi(x)f(x)$ суммируемо на E.*

Действительно, абсолютная величина этого произведения (являющегося, очевидно, измеримой функцией) не превосходит суммируемой функции $K|f(x)|$, где $K=\sup\{|\varphi(x)|\}$.

Теорема 7. *Если каждая из функций $f'(x)$ и $f''(x)$ суммируема на множестве E, то суммируема и функция $f(x)=f'(x)+f''(x)$, причем*

$$\int_E f(x)\,dx=\int_E f'(x)\,dx+\int_E f''(x)\,dx. \qquad (3)$$

Доказательство. Суммируемость функции $f(x)$ следует из того, что $|f(x)|\leqslant|f'(x)|+|f''(x)|$, и теоремы 7, § 1. Остается доказать равенство (3). С этой целью введем множества

$$E_1=E(f'\geqslant 0,\ f''\geqslant 0); \qquad E_2=E(f'<0,\ f''<0);$$
$$E_3=E(f'\geqslant 0,\ f''<0,\ f\geqslant 0); \quad E_4=E(f'\geqslant 0,\ f''<0,\ f<0);$$
$$E_5=E(f'<0,\ f''\geqslant 0,\ f\geqslant 0); \quad E_6=E(f'<0,\ f''\geqslant 0,\ f<0).$$

Очевидно, $E=\sum_{k=1}^{6} E_k\ (E_kE_{k'}=0,\ k\neq k')$; достаточно доказать, что

$$\int_{E_k} f\,dx=\int_{E_k} f'\,dx+\int_{E_k} f''\,dx \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ 6).$$

Это делается одинаково для всех k. Для примера проведем рассуждение для $k=6$. Переписав равенство $f(x)=f'(x)+f''(x)$ так:

$$-f'(x)=f''(x)+[-f(x)],$$

мы добиваемся того, что на множестве E_6 оба слагаемых правой части неотрицательны. Поэтому, в силу теоремы 7, § 1, мы имеем

$$\int_{E_6}(-f')\,dx=\int_{E_6} f''\,dx+\int_{E_6}(-f)\,dx,$$

откуда

$$\int_{E_6} f\,dx=\int_{E_6} f'\,dx+\int_{E_6} f''\,dx.$$

Теорема доказана. Следующая теорема очень важна.

Теорема 8. *Пусть функция $f(x)$ суммируема на множестве E. Всякому $\varepsilon>0$ отвечает такое $\delta>0$, что для любого измеримого множества $e\subset E$ с мерой $me<\delta$ будет*

$$\left|\int_e f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Доказательство. Одновременно с функцией $f(x)$ суммируема и ее абсолютная величина $|f(x)|$. Поэтому, на основании самого определения интеграла от неотрицательной функции, существует такое N_0, что

$$\int_E |f(x)|\,dx-\int_E [\,|f(x)|\,]_{N_0}\,dx<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $\delta=\frac{\varepsilon}{2N_0}$. Это δ является искомым. Действительно, функция $|f(x)|-[|f(x)|]_{N_0}$ не отрицательна на множестве E. Значит, какое бы измеримое подмножество e множества E ни взять, необходимо

$$\int_e \{|f(x)|-[|f(x)|]_{N_0}\}\,dx \leqslant \int_E \{|f(x)|-[|f(x)|]_{N_0}\}\,dx,$$

откуда

$$\int_e |f(x)|\,dx - \int_e [|f(x)|]_{N_0}\,dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

и, стало быть,

$$\int_e |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2} + \int_e [|f(x)|]_{N_0}\,dx.$$

Но так как $[|f(x)|]_{N_0} \leqslant N_0$, то

$$\int_e [|f(x)|]_{N_0}\,dx \leqslant N_0 \cdot me,$$

и, следовательно,

$$\int_e |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2} + N_0 \cdot me.$$

Отсюда ясно, что при $me<\delta$ будет

$$\int_e |f(x)|\,dx < \varepsilon, \text{ и тем более } \left|\int_e f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Доказанное свойство интеграла называется его *абсолютной непрерывностью*.

§ 3. Предельный переход под знаком интеграла

Теорема Лебега, доказанная в § 3, гл. V, допускает следующее обобщение.

Теорема 1 (А. Лебег). *Пусть на множестве E задана последовательность измеримых функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ..., которая сходится по мере к функции $F(x)$. Если существует такая суммируемая функция $\Phi(x)$, что при всех n и x*

$$|f_n(x)| \leqslant \Phi(x), \tag{*}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E F(x)\,dx.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что условие (*) обеспечивает суммируемость каждой из функций $f_n(x)$. Далее, легко видеть, что почти для всех x будет

$$|F(x)| \leqslant \Phi(x). \tag{1}$$

Чтобы обнаружить это, достаточно, пользуясь теоремой Рисса, выделить из $\{f_n(x)\}$ подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$, сходящуюся к $F(x)$ почти везде, и перейти к пределу в неравенстве

$$|f_{n_k}(x)| \leqslant \Phi(x).$$

Изменив, в случае надобности, значения функции $F(x)$ на множестве меры нуль, можно добиться выполнения неравенства (1) в каждой точке множества E. Из (1), в частности, вытекает суммируемость функции $F(x)$.

Выберем теперь произвольное $\sigma > 0$ и положим

$$A_n(\sigma) = E(|f_n - F| \geqslant \sigma), \quad B_n(\sigma) = E(|f_n - F| < \sigma).$$

Тогда $E = A_n(\sigma) + B_n(\sigma)$, $A_n(\sigma) \cdot B_n(\sigma) = 0$, и при $n \to \infty$

$$mA_n(\sigma) \to 0.$$

Заметив все это, проведем такие оценки:

$$\left|\int_E f_n\,dx - \int_E F\,dx\right| \leqslant \int_E |f_n - F|\,dx = \int_{A_n(\sigma)} |f_n - F|\,dx + \int_{B_n(\sigma)} |f_n - F|\,dx.$$

Но на множестве $B_n(\sigma)$ будет $|f_n - F| < \sigma$, откуда

$$\int_{B_n(\sigma)} |f_n - F|\,dx \leqslant \sigma m B_n(\sigma) \leqslant \sigma \cdot mE.$$

С другой стороны, $|f_n - F| \leqslant 2\Phi(x)$, так что

$$\int_{A_n(\sigma)} |f_n - F|\,dx \leqslant 2 \int_{A_n(\sigma)} \Phi(x)\,dx.$$

Сопоставляя все сказанное, получаем

$$\left|\int_E f_n\,dx - \int_E F\,dx\right| \leqslant 2 \int_{A_n(\sigma)} \Phi(x)\,dx + \sigma mE. \tag{2}$$

Пусть, наконец, $\varepsilon > 0$. Фиксируем столь малое $\sigma > 0$, что

$$\sigma \cdot mE < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Затем, пользуясь абсолютной непрерывностью интеграла от функции $\Phi(x)$, найдем такое $\delta > 0$, что для всякого измеримого множества $e \subset E$ с мерой $me < \delta$ будет

$$\int_e \Phi(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Если $n > n_0$, то (при уже фиксированном σ) $mA_n(\sigma) < \delta$, и, стало быть,

$$2 \int_{A_n(\sigma)} \Phi(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Сопоставляя (2), (3) и (4), мы видим, что при $n > n_0$ оказывается

$$\left|\int\limits_E f_n(x)\,dx - \int\limits_E F(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

что и доказывает теорему.

Следствие. *В условиях теоремы будет*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E \varphi(x) f_n(x)\,dx = \int\limits_E \varphi(x) F(x)\,dx,$$

где $\varphi(x)$ любая измеримая ограниченная функция.

В самом деле, если $|\varphi(x)| \leqslant K$, то $|\varphi(x) f_n(x)| \leqslant K\Phi(x)$, и условие (*) выполнено. Остается обнаружить, что

$$\varphi(x) f_n(x) \Rightarrow \varphi(x) F(x).$$

Но это вытекает из того, что

$$E(|\varphi f_n - \varphi F| \geqslant \sigma) \subset E\left(|f_n - F| \geqslant \frac{\sigma}{K}\right),$$

так что наше предложение доказано.

Доказанную теорему можно еще более обобщить. Для этого нам понадобится ввести одно важное понятие. Пусть на измеримом множестве E задано целое семейство $M = \{f(x)\}$ суммируемых функций. Если мы фиксируем какую-нибудь из этих функций $f_0(x)$, то для всякого $\varepsilon > 0$ можно будет указать такое $\delta > 0$, что соотношения $e \subset E$, $me < \delta$ влекут соотношение

$$\left|\int\limits_e f_0(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Но это δ зависит от выбора функции $f_0(x)$ и, вообще говоря, одного общего δ для всех функций семейства M не существует. Это обстоятельство дает повод установить следующее

Определение. Пусть $M = \{f(x)\}$ есть семейство суммируемых функций, заданных на множестве E. Если всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что соотношения $e \subset E$, $me < \delta$ влекут соотношение

$$\left|\int\limits_e f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

для любой из функций семейства M, то говорят, что функции семейства имеют *равностепенно абсолютно непрерывные* интегралы.

Теорема 2 (Д. Витали). *Пусть на измеримом множестве E задана последовательность суммируемых функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ..., сходящаяся по мере к функции $F(x)$. Если функции последовательности $\{f_n(x)\}$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы, то $F(x)$ суммируема и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)\,dx = \int\limits_E F(x)\,dx.$$

Доказательство. Прежде всего нужно убедиться в том, что и предельная функция $F(x)$ суммируема на множестве E. Для этого выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое $\delta > 0$, что при $me < \delta$ будет

$$\left| \int_e f_n(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Пусть e какое-либо измеримое множество $(e \subset E)$ с мерой $me < \delta$. Тогда, полагая $e_+ = e(f_n \geqslant 0)$, $e_- = e(f_n < 0)$, мы будем иметь $me_+ < \delta$, $me_- < \delta$ и, стало быть,

$$\int_{e_+} |f_n|\, dx = \left| \int_{e_+} f_n\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_{e_-} |f_n|\, dx = \left| \int_{e_-} f_n\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$\int_e |f_n(x)|\, dx < \varepsilon. \tag{5}$$

Иначе говоря, функции $|f_n(x)|$ также имеют[1]) равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

Если построить (по теореме Рисса) подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$, сходящуюся к $F(x)$ почти везде и написать неравенства (5) для $f_{n_k}(x)$, то теорема Фату из § 1 позволяет утверждать, что

$$\int_e |F(x)|\, dx \leqslant \varepsilon, \tag{6}$$

так что $F(x)$ суммируема на множестве e. Здесь e означает любое подмножество E с мерой $< \delta$. Отсюда ясно, что $F(x)$ суммируема и на исходном множестве E, ибо его можно разложить на конечное число частей с мерой $< \delta$.

Теперь можно приступить к доказательству главного утверждения теоремы. Выбрав $\sigma > 0$ и положив, как и выше,

$$A_n(\sigma) = E(|f_n - F| \geqslant \sigma), \quad B_n(\sigma) = E(|f_n - F| < \sigma),$$

мы снова получим оценку

$$\left| \int_E f_n\, dx - \int_E F\, dx \right| \leqslant \int_{A_n(\sigma)} |f_n - F|\, dx + \sigma mE.$$

Отсюда

$$\left| \int_E f_n\, dx - \int_E F\, dx \right| \leqslant \int_{A_n(\sigma)} |f_n|\, dx + \int_{A_n(\sigma)} |F|\, dx + \sigma mE. \tag{7}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и σ фиксировано столь малым, что $\sigma mE < \varepsilon/3$.

---

[1]) Читателю рекомендуется обратить внимание на то, что нами попутно доказано наличие равностепенно абсолютно непрерывных интегралов у семейства *модулей* $|f_n(x)|$ при единственном условии, что сами функции $f_n(x)$ имеют такие интегралы.

Как мы видели в начале доказательства, всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что как только $e \subset E$, $me < \delta$, так сейчас же [см. (5) и (6)]

$$\int_e |f_n|\,dx < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \int_e |F|\,dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Но для $n > n_0$ будет $mA_n(\sigma) < \delta$, так что (7) принимает вид

$$\left| \int_E f_n\,dx - \int_E F\,dx \right| < \varepsilon,$$

и теорема доказана.

Следствие. *В условиях теоремы будет*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \varphi(x) f_n(x)\,dx = \int_E \varphi(x) F(x)\,dx,$$

где $\varphi(x)$ есть любая измеримая ограниченная функция.

В самом деле, если $|\varphi(x)| \leqslant K$, то

$$\left| \int_e \varphi(x) f_n(x)\,dx \right| \leqslant K \int_e |f_n(x)|\,dx,$$

так что функции $\varphi(x) f_n(x)$ также имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

Оказывается, что это следствие обратимо. Чтобы установить это обстоятельство, нам понадобится важная и сама по себе

Теорема 3 (А. Лебег). Пусть на измеримом множестве E задана последовательность суммируемых функций $\{f_n(x)\}$. Если для всякого измеримого подмножества e множества E оказывается

$$\lim_{n\to\infty} \int_e f_n(x)\,dx = 0, \tag{8}$$

то функции $f_n(x)$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Это значит, что существует число $\varepsilon_0 > 0$, обладающее следующим свойством: для всякого $\delta > 0$ можно найти измеримое множество $e \subset E$ с мерой $me < \delta$ и индекс n такие, что

$$\left| \int_e f_n(x)\,dx \right| \geqslant \varepsilon_0. \tag{9}$$

Заметив это, фиксируем какое-нибудь $\delta > 0$ и рассмотрим первые N функций последовательности: $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_N(x)$. Для каждой из функций $f_k(x)$ найдется такое $\delta_k > 0$, что как только $me < \delta_k$ $(e \subset E)$, так сейчас же

$$\left| \int_e f_k(x)\,dx \right| < \varepsilon_0. \tag{10}$$

Обозначим через δ^* наименьшее из чисел $\delta, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N$. По сказанному выше, для δ^* найдутся множество $e \subset E$ с мерой $me < \delta^*$ и индекс n, для которых выполнено неравенство (9). С другой стороны, $me < \delta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, так что для $k = 1, 2, \ldots, N$ выполняется (10) и, стало быть, $n > N$.

Таким образом, число ε_0 обладает следующим свойством: каковы бы ни были числа $\delta > 0$ и N, найдутся измеримое множество $e < E$ и индекс n, для которых

$$n > N, \quad me < \delta, \quad \left| \int_e f_n(x)\,dx \right| \geqslant \varepsilon_0.$$

Установив это, фиксируем какое-нибудь множество $e_1 \subset E$ и индекс n_1, для которых

$$\left|\int_{e_1} f_{n_1}(x)\,dx\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

Опираясь на абсолютную непрерывность интеграла от функции $f_{n_1}(x)$, подберем такое $\delta_1 > 0$, чтобы для всех множеств $e \subset E$ с мерой $me < \delta_1$ было

$$\left|\int_{e} f_{n_1}(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Сделав это, найдем такие множество $e_2 \subset E$ и индекс n_2, что

$$n_2 > n_1, \qquad me_2 < \frac{\delta_1}{2}, \qquad \left|\int_{e_2} f_{n_2}(x)\,dx\right| \geqslant \varepsilon_0,$$

после чего подберем такое $\delta_2 > 0$, чтобы из $me < \delta_2$ $(e \subset E)$ вытекало

$$\left|\int_{e} f_{n_2}(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Нетрудно понять, что $\delta_2 < \delta_1/2$.

Проделав сказанное, находим множество $e_3 \subset E$ и индекс n_3, для которых

$$n_3 > n_2, \qquad me_3 < \frac{\delta_2}{2}, \qquad \left|\int_{e_3} f_{n_3}(x)\,dx\right| \geqslant \varepsilon_0,$$

после чего подбираем такое $\delta_3 > 0$, чтобы из $me < \delta_3$ $(e \subset E)$ вытекало

$$\left|\int_{e} f_{n_3}(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Очевидно, $\delta_3 < \delta_2/2$.

Продолжая этот процесс, мы построим три последовательности: измеримых множеств $e_k \subset E$, строго возрастающих индексов n_k и чисел $\delta_k > 0$ такого рода, что

1) $$\left|\int_{e_k} f_{n_k}(x)\,dx\right| \geqslant \varepsilon_0;$$

2) $$me_{k+1} < \delta_k/2;$$

3) если $e \subset E$ и $me < \delta_k$, то

$$\left|\int_{e} f_{n_k}(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Из этих свойств следует, что $\delta_{k+1} < \delta_k/2$, а потому

$$m(e_{k+1} + e_{k+2} + e_{k+3} + \ldots) < \frac{\delta_k}{2} + \frac{\delta_{k+1}}{2} + \frac{\delta_{k+2}}{2} + \ldots < \delta_k.$$

Стало быть,

$$\left|\int_{e_k(e_{k+1}+e_{k+2}+\ldots)} f_{n_k}(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Введем в рассмотрение новые множества

$$A_k = e_k - (e_{k+1} + e_{k+2} + \ldots).$$

Ясно, что

$$\left| \int\limits_{A_k} f_{n_k}(x)\, dx \right| \geqslant \frac{3}{4} \varepsilon_0. \tag{11}$$

Вместе с тем (что и является целью введения множеств A_k и что отличает их от множеств e_k) множества A_k *попарно не пересекаются.*

Заметим еще, что $A_k \subset e_k$ и потому

$$m(A_{k+1} + A_{k+2} + A_{k+3} + \ldots) < \delta_k. \tag{12}$$

Теперь уже нетрудно закончить доказательство теоремы. Именно, положим $k_1 = 1$ и обозначим через k_2 какой-нибудь из индексов $m > 1$, для которых

$$\left| \int\limits_{A_{k_1}} f_{n_m}(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Существование таких индексов m вытекает из условия (8). Сделав это, обозначим через k_3 какой-нибудь из индексов $m > k_2$, для которых

$$\left| \int\limits_{A_{k_1} + A_{k_2}} f_{n_m}(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Продолжая этот процесс, мы получим строго возрастающую последовательность $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$, такого рода, что

$$\left| \int\limits_{A_{k_1} + \ldots + A_{k_{i-1}}} f_{n_{k_i}}(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon_0}{4}. \tag{13}$$

С этим неравенством следует сопоставить неравенство

$$\left| \int\limits_{A_{k_i}} f_{n_{k_i}}(x)\, dx \right| \geqslant \frac{3}{4} \varepsilon_0, \tag{14}$$

являющееся частным случаем (11).

Наконец, в силу (12)

$$m\left(A_{k_{i+1}} + A_{k_{i+2}} + A_{k_{i+3}} + \ldots\right) \leqslant m\left(A_{k_{i}+1} + A_{k_{i}+2} + \ldots\right) < \delta_{k_i}$$

и, стало быть,

$$\left| \int\limits_{A_{k_{i+1}} + A_{k_{i+2}} + \ldots} f_{n_{k_i}}(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon_0}{4}. \tag{15}$$

Положим $Q = A_{k_1} + A_{k_2} + A_{k_3} + \ldots$ Тогда

$$\int\limits_Q f_{n_{k_i}}(x)\, dx = \int\limits_{A_{k_1} + \ldots + A_{k_{i-1}}} f_{n_{k_i}}(x)\, dx + \int\limits_{A_{k_i}} f_{n_{k_i}}(x)\, dx + \int\limits_{A_{k_{i+1}} + A_{k_{i+2}} + \ldots} f_{n_{k_i}}(x)\, dx,$$

откуда, в связи с (13), (14) и (15), следует, что

$$\left| \int\limits_Q f_{n_{k_i}}(x)\, dx \right| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{4} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

а это противоречит условию (8). Теорема доказана.

Несколько сложный способ[1]) доказательства этой теоремы применяется, однако, весьма часто; читателю следует тщательно разобрать изложенное рассуждение.

Следствие 1. *Пусть на измеримом множестве E заданы последовательность суммируемых функций $\{f_n(x)\}$ и суммируемая функция $F(x)$. Если для любого измеримого множества $e \subset E$ оказывается*

$$\lim_{n\to\infty}\int_e f_n(x)\,dx=\int_e F(x)\,dx, \tag{16}$$

то функции $f_n(x)$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

В самом деле, по теореме 3, разности $f_n(x)-F(x)$ имеют равностепенно абсолютные интегралы, а тогда наше утверждение следует из неравенства

$$\left|\int_e f_n(x)\,dx\right|\leqslant\left|\int_e \{f_n(x)-F(x)\}\,dx\right|+\left|\int_e F(x)\,dx\right|.$$

Следствие 2. *Пусть на измеримом множестве E заданы последовательность суммируемых функций $f_n(x)$ и суммируемая функция $F(x)$. Если для любой измеримой ограниченной функции $\varphi(x)$ будет*

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \varphi(x)\,f_n(x)\,dx=\int_E \varphi(x)\,F(x)\,dx,$$

то функции $f_n(x)$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

В самом деле, за функции $\varphi(x)$ можно, в частности, выбирать характеристические функции различных измеримых подмножеств E, а тогда дело сводится к следствию 1. Этим и оправдано наше замечание об обратимости следствия теоремы 2.

Из всего сказанного мы получаем следующий результат.

Теорема 4 (Д. Витали). *Пусть на измеримом множестве E задана последовательность суммируемых функций $\{f_n(x)\}$, сходящаяся по мере к суммируемой функции $F(x)$. Для того чтобы равенство* (16) *имело место для всякого измеримого множества $e \subset E$, необходимо и достаточно, чтобы функции $f_n(x)$ имели равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.*

Следует заметить, что условие равностепенной абсолютной непрерывности интегралов функций $f_n(x)$ становится необходимым только при требовании, чтобы предельный переход можно было осуществить под знаком интеграла, распространенного на *любое* измеримое подмножество множества E. Из одного же соотношения

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx=\int_E F(x)\,dx$$

равностепенной абсолютной непрерывности упомянутых интегралов не вытекает. Пусть, например, функции $f_n(x)$ заданы на $[0, 1]$ следующим образом: $f_n(0)=0$ и

$$f_n(x)=\begin{cases} n & \text{при } 0<x\leqslant\frac{1}{2n}, \\ -n & \text{при } \frac{1}{2n}<x\leqslant\frac{1}{n}, \\ 0 & \text{при } \frac{1}{n}<x\leqslant 1. \end{cases}$$

Ясно, что последовательность этих функций стремится к нулю и

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=0.$$

---

[1]) Представляется уместным называть его «способом скользящего горба».

Вместе с тем

$$\int_0^{1/2n} f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

и равностепенной абсолютной непрерывности нет.

Интересно, что для функций, *сохраняющих знак*, дело обстоит проще. Именно, имеет место

Теорема 5. *Пусть на измеримом множестве E задана последовательность неотрицательных суммируемых функций $\{f_n(x)\}$, сходящаяся по мере к функции $F(x)$. Если допустим предельный переход под знаком интеграла, распространенного на все множество E, то допустим также и предельный переход под знаком интеграла, распространенного на любое измеримое подмножество*[1] *е множества E.*

Эта теорема без труда выводится из теоремы Фату[2] [гл. 6, § 1]. В самом деле, допустим, что теорема неверна. Тогда найдется измеримое множество $A \subset E$, для которого равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx = \int_A F(x)\,dx$$

не выполняется. Но тогда найдется такое число $\sigma > 0$, что бесконечное множество интегралов $\int_A f_n(x)\,dx$ лежит вне интервала

$$\left(\int_A F\,dx - 2\sigma, \quad \int_A F\,dx + 2\sigma\right).$$

Если бы существовало бесконечное множество интегралов $\int_A f_n(x)\,dx$, меньших, чем $\int_A F(x)\,dx - 2\sigma$, то можно было бы, перейдя к частичной последовательности, считать, что неравенство

$$\int_A f_n(x)\,dx \leqslant \int_A F(x)\,dx - 2\sigma$$

имеет место для всех n, а это сразу привело бы к противоречию с упомянутой теоремой Фату. Таким образом, для бесконечного множества значений n будет

$$\int_A f_n(x)\,dx \geqslant \int_A F(x)\,dx + 2\sigma, \tag{17}$$

и можно считать, что это так для всех n. Но так как под знаком интеграла, распространенного на все множество E, предельный переход по условию допустим, то для достаточно больших n окажется

$$\left|\int_E f_n(x)\,dx - \int_E F(x)\,dx\right| < \sigma,$$

откуда, снова переходя к частичной последовательности, получим, что при всех n будет

$$\int_E f_n(x)\,dx < \int_E F(x)\,dx + \sigma.$$

---

[1]) Предыдущий пример показывает, что без условия $f_n(x) \geqslant 0$ теорема неверна.

[2]) Точнее, из подстрочного примечания к этой теореме.

Вычитая отсюда неравенство (17) и вводя множество $B=E-A$, находим

$$\int\limits_B f_n(x)\,dx < \int\limits_B F(x)\,dx - \sigma,$$

что приводит к противоречию с теоремой Фату.

Из этой теоремы вытекает

Теорема 6 (Г. М. Фихтенгольц). *Пусть на измеримом множестве E задана последовательность суммируемых функций $\{f_n(x)\}$, сходящаяся по мере к суммируемой функции $F(x)$. Соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E |f_n(x)|\,dx = \int\limits_E |F(x)|\,dx \tag{18}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы равенство (16) *имело место для всякого измеримого множества $e \subset E$.*

Действительно, если (18) выполнено, то в силу теоремы 5 в этом соотношении можно заменить множество E любым измеримым множеством $e \subset E$. Но тогда функции $|f_n(x)|$, а значит и функции $f_n(x)$, имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы, откуда и следует выполнение (16) для всякого измеримого $e \subset E$.

Обратно, если равенство (16) имеет место для всякого измеримого множества $e \subset E$, то функции $f_n(x)$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Но тогда (см. сноску на стр. 169) и модули $|f_n(x)|$ имеют такие же интегралы, и остается применить теорему 2 к этим модулям.

В заключение остановимся на признаке, с помощью которого можно устанавливать равностепенную абсолютную непрерывность интегралов.

Теорема 7 (Ш.-Ж. Валле-Пуссен). *Пусть на измеримом множестве E задано семейство измеримых функций $M=\{f(x)\}$. Если существует положительная возрастающая функция $\Phi(u)$, заданная для $u \geqslant 0$ и стремящаяся к $+\infty$ вместе с u, для которой*

$$\int\limits_E |f(x)|\cdot\Phi(|f(x)|)\,dx < A,$$

где $f(x)$ любая функция из M, а A конечная постоянная, от выбора $f(x)$ не зависящая, то функции $f(x)$ суммируемы на E, а интегралы их равностепенно абсолютно непрерывны.

В пояснение условий теоремы, заметим, что суперпозиция $\Phi(|f(x)|)$ монотонной функции $\Phi(u)$ и измеримой функции $|f(x)|$ есть функция измеримая. [1]) Переходя к доказательству, возьмем $\varepsilon > 0$. Ему отвечает такое K, что

$$\frac{A}{\Phi(K)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Закрепив это K, рассмотрим какое-нибудь измеримое множество $e \subset E$. Пусть $f(x)$ есть любая функция из M. Положим $e_1 = e(|f(x)| > K)$, $e_2 = e(|f(x)| \leqslant K)$. Тогда

$$\int\limits_e |f(x)|\,dx = \int\limits_{e_1} |f(x)|\,dx + \int\limits_{e_2} |f(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{\Phi(K)} \int\limits_{e_1} |f(x)|\cdot\Phi(|f(x)|)\,dx + \int\limits_{e_2} |f(x)|\,dx.$$

Отсюда

$$\int\limits_e |f(x)|\,dx \leqslant \frac{A}{\Phi(K)} + K\cdot me_2 < \frac{\varepsilon}{2} + Kme.$$

---

[1]) В самом деле, если $a > 0$, то $\underset{u}{E}(\Phi(u) > a)$ есть интервал вида $(b, +\infty)$ или $[b, +\infty)$. Поэтому $E(\Phi(f) > a) = E(f > b)$ или $E(f \geqslant b)$.

Этим уже доказана суммируемость $f(x)$. Кроме того, положив $\delta=\frac{\varepsilon}{2K}$, получим, что при $me<\delta$ будет

$$\int_e |f(x)|\,dx<\varepsilon.$$

Теорема доказана. Из нее, например, вытекает, что, если для функций $f(x)$ семейства M будет

$$\int_E f^2(x)\,dx<A,$$

то эти функции имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВАМ V и VI

1. Если $f_n(x)\geqslant 0$ и $\int_E f_n(x)\,dx\to 0$, то $f_n(x)\Rightarrow 0$, но не обязательно $f_n(x)$ будет стремиться к 0 почти везде.

2. Соотношение $\int_E \frac{|f_n|}{1+|f_n|}dx\to 0$ равносильно тому, что $f_n(x)\Rightarrow 0$.

3. Если $\alpha_n\to 0$, то существует последовательность неотрицательных измеримых функций $u_n(x)$, такая, что $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\int_E u_n(x)\,dx<+\infty$, но ни в одной точке E функции $u_n(x)$ не стремятся к 0.

4. Если интеграл $\int_E \varphi(x)f(x)\,dx$ существует при любой суммируемой функции $f(x)$, то функция $\varphi(x)$ ограничена почти везде (Лебег).

5. Пусть на множестве E задана измеримая конечная функция $f(x)$. Возьмем ряд чисел

$$\ldots y_{-3},\ y_{-2},\ y_{-1},\ y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ (y_k\to+\infty,\ \ y_{-k}\to-\infty,\ \ 0<y_{k+1}-y_k<\lambda)$$

и положим $e_k=E(y_k\leqslant f<y_{k+1})$. Для суммируемости функции $f(x)$ необходима и достаточна абсолютная сходимость ряда $\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k me_k$.

6. Если в условиях упражнения 5 ряд $\sum y_k me_k$ абсолютно сходится, то при $\lambda\to 0$ его сумма стремится к $\int_E f(x)\,dx$.

7. Предел равномерно сходящейся последовательности функций, интегрируемых (R), есть функция, интегрируемая (R).

8. Характеристическая функция канторова совершенного множества P_0 интегрируема (R).

9. Если $f(x)$ равна 0 в точках канторова множества P_0 и равна n на тех дополнительных к P_0 интервалах, длина которых равна 3^{-n}, то $\int_0^1 f(x)\,dx=3$ (Е. Титчмарш).

10. Чтобы измеримая и неотрицательная $f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ было суммируемой, необходимо и достаточно, чтобы было $\sum mE(f\geqslant n)<+\infty$ (Орбек).

11. Пусть $f(x)\geqslant 0$ измеримая функция, а $\{f(x)\}_N$ функция, равная $f(x)$ или 0, смотря по тому — будет ли $f(x)\leqslant N$, или $f(x)>N$. Если $f(x)$ почти везде конечна, то

$$\lim_{N\to\infty}\int_E \{f(x)\}_N\,dx=\int_E f(x)\,dx.$$

Условие, что $f(x)$ почти везде конечна, отбросить нельзя.

12. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ две неотрицательные измеримые функции, заданные на множестве E. Если $E_y = E(g \geqslant y)$, то

$$\int_E f(x) g(x) dx = \int_0^{+\infty} \Phi(y) dy,$$

где $\Phi(y) = \int_{E_y} f(x) dx$ (Д. К. Фаддеев).

13. Пусть на $[0, 1]$ расположены n измеримых множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Если каждая из точек $[0, 1]$ принадлежит по крайней мере q из этих множеств, то хоть одно из них имеет меру $\geqslant q/n$ (Л. В. Канторович).

14. Пусть на $[a, b]$ задана суммируемая функция $f(x)$. Пусть, далее, α есть постоянное число, $0 < \alpha < b - a$. Если для каждого множества e меры α будет $\int_e f(x) dx = 0$, то $f(x) \sim 0$ (М. К. Гавурин).

15. Пусть $f(x)$ суммируема на $[a, b]$ и равна 0 вне $[a, b]$. Если $\varphi(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt$, то $\int_a^b |\varphi(x)| dx \leqslant \int_a^b |f(x)| dx$ (А. Н. Колмогоров).

16. Пусть на $[a, b]$ задана суммируемая функция $f(x)$. Если при любом $c\,(a \leqslant c \leqslant b)$ будет $\int_a^c f(x) dx = 0$, то $f(x) \sim 0$.

17. Пусть на $[a, b]$ задана строго положительная суммируемая функция $f(x)$. Пусть $0 < q \leqslant b - a$ и S есть множество таких измеримых подмножеств $e \subset [a, b]$, у которых $me \geqslant q$. Показать, что

$$\inf_{e \in S} \left\{ \int_e f(x) dx \right\} > 0.$$

18. Пусть $M = \{f(x)\}$ семейство функций, суммируемых на $[a, b]$. Если функции семейства имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы, то существует возрастающая положительная функция $\Phi(u)$, заданная при $0 \leqslant u < +\infty$, стремящаяся к $+\infty$ вместе с u и такая, что для всех $f(x)$ из M будет $\int_a^b |f(x)| \cdot \Phi(|f(x)|) dx \leqslant A < +\infty$, где постоянная A не зависит от выбора $f(x)$ (Валле-Пуссен).

19. Если $f(x)$ суммируема на $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная на $[a, b]$ функция $\varphi(x)$, что $\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx < \varepsilon$.

20. Если $f(x)$ суммируема на $[a, b + \delta]$ $(\delta > 0)$, то

$$\lim_{h \to +0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

21. Пусть на $[a, b]$ задана измеримая функция $f(x) > 0$. Соотношение

$$\int_a^b [f(x)]_{2n} dx - \int_a^b [f(x)]_n dx \underset{n \to \infty}{\to} 0$$

и $n \cdot mE(f > n) \to 0$ равносильны (Ю. С. Очан).

22. Пусть на $[a, b]$ заданы две измеримые функции $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$. Если существует конечный предел $\lim_{n \to \infty} \int_a^b \{[f(x)]_n - [g(x)]_n\} dx$, и $n \cdot mE(f > n) \to 0$, то $n \cdot mE(g > n) \to 0$ (Ю. С. Очан).

ГЛАВА VII

ФУНКЦИИ, СУММИРУЕМЫЕ С КВАДРАТОМ

§ 1. Основные определения. Неравенства. Норма

В этой главе мы рассмотрим весьма важный класс функций — функций с суммируемым квадратом. Для простоты мы будем предполагать, что все функции, о которых идет речь, заданы на некотором сегменте $E=[a, b]$.

Случай, когда функции определены на произвольном измеримом множестве $E_0 \subset E=[a, b]$, может быть сведен к указанному выше, если каждую рассматриваемую функцию доопределить, полагая ее равной нулю в точках множества $E-E_0$.

Определение. Измеримая функция $f(x)$ называется *функцией с суммируемым квадратом*, или *функцией, суммируемой с квадратом*, если

$$\int_a^b f^2(x)\,dx < +\infty.$$

Множество всех функций с суммируемым квадратом обозначается обычно[1]) символом L_2.

Теорема 1. *Всякая функция, суммируемая с квадратом, суммируема*, т. е. $L_2 \subset L$.

Эта теорема вытекает из очевидного неравенства

$$|f(x)| \leqslant \frac{1+f^2(x)}{2}.$$

Точно так же из неравенства

$$|f(x)g(x)| \leqslant \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}$$

вытекает

Теорема 2. *Произведение двух функций, суммируемых с квадратом, есть функция суммируемая.*

Отсюда, в силу тождества $(f \pm g)^2 = f^2 \pm 2fg + g^2$, следует

Теорема 3. *Сумма и разность функций, входящих в L_2, входят в L_2.*

[1]) Иногда, чтобы указать, о каком отрезке $[a, b]$ идет речь, пишут $L_2([a, b])$.

Наконец, отметим вполне очевидное обстоятельство, что одновременно с $f(x)$ в L_2 входят и все функции вида $kf(x)$, где k конечная постоянная.

Теорема 4 (Неравенство Буняковского). *Если* $f(x) \in L_2$ *и* $g(x) \in L_2$, *то*

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2 \leqslant \left[\int_a^b f^2(x)\,dx\right] \cdot \left[\int_a^b g^2(x)\,dx\right]. \qquad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим квадратный трехчлен

$$\psi(u) = Au^2 + 2Bu + C,$$

коэффициенты которого A, B, C вещественны и $A > 0$. Если этот трехчлен неотрицателен при всех вещественных значениях u, то

$$B^2 \leqslant AC. \qquad (2)$$

Действительно, если бы это было не так, то оказалось бы, что

$$\psi\left(-\frac{B}{A}\right) = \frac{1}{A}(AC - B^2) < 0.$$

Заметив это, положим

$$\psi(u) = \int_a^b [uf(x) + g(x)]^2\,dx = u^2 \int_a^b f^2\,dx + 2u \int_a^b fg\,dx + \int_a^b g^2\,dx.$$

Этот трехчлен неотрицателен и потому для него выполняется условие (2), что равносильно теореме. [1])

Следствие. *Если* $f(x) \in L_2$, *то*

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \sqrt{b-a} \cdot \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}. \qquad (3)$$

Действительно, полагая в (1) $g(x) = 1$ и заменяя $f(x)$ на $|f(x)|$, мы получаем (3).

Теорема 5 (Неравенство Коши). *Если* $f(x) \in L_2$ *и* $g(x) \in L_2$, *то*

$$\sqrt{\int_a^b [f(x) + g(x)]^2\,dx} \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}.$$

Доказательство. Извлекая корни из обеих частей неравенства Буняковского, находим

$$\int_a^b fg\,dx \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2\,dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2\,dx}.$$

---

[1]) Мы предполагаем, что $\int_a^b f^2\,dx > 0$. Если бы было $\int_a^b f^2\,dx = 0$, то функция $f(x)$ была бы эквивалентна нулю и неравенство (1) превратилось бы в тривиальное тождество $0 = 0$.

Умножая это неравенство на 2 и прибавляя к обеим частям по

$$\int_a^b f^2\,dx+\int_a^b g^2\,dx,$$

получим

$$\int_a^b (f+g)^2\,dx \leqslant \left(\sqrt{\int_a^b f^2\,dx}+\sqrt{\int_a^b g^2\,dx}\right)^2,$$

откуда и следует теорема.

Неравенство Коши позволяет рассмотреть множество L_2 с новой точки зрения. Именно, если мы сопоставим каждой функции $f(x) \in L_2$ число $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}$, то будут иметь место следующие обстоятельства:

I. $\|f\| \geqslant 0$, *причем* $\|f\| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $f(x) \sim 0$.

II. $\|kf\| = |k| \cdot \|f\|$ и, в частности, $\|-f\| = \|f\|$.

III. $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

Число $\|f\|$ называется *нормой* функции $f(x)$. Аналогия между $\|f\|$ и абсолютной величиной $|x|$ вещественного (или комплексного) числа x бросается в глаза. Эта аналогия служит источником ряда важных и красивых построений.

Грубо говоря, основное назначение абсолютной величины в Анализе заключается в том, что с ее помощью мы производим измерение расстояний на числовой прямой $\rho(x, y) = |x-y|$.

Но в таком случае введение нормы позволяет и на множество L_2 смотреть как на некоторое «пространство», в котором также можно производить измерения, если принять число

$$\rho(f, g) = \|f-g\|$$

за расстояние между элементами f и g класса L_2.

Если мы условимся эквивалентные между собой функции считать за тождественные, то расстояние $\rho(f, g)$ будет обладать привычными нам свойствами:

1) $\rho(f, g) \geqslant 0$, причем $\rho(f, g) = 0$ тогда и только тогда, когда $f = g$.

2) $\rho(f, g) = \rho(g, f)$.

3) $\rho(f, g) \leqslant \rho(f, h) + \rho(h, g)$.

Если на некотором множестве A элементов любой природы задана подобная функция пары элементов $\rho(x, y)$, то множество A называют *метрическим пространством*.

Значит L_2 есть метрическое пространство. Впервые эту точку зрения на L_2 развил Д. Гильберт, почему L_2 часто называют *пространством Гильберта*.

§ 2. Сходимость в среднем

Понятие нормы позволяет ввести понятие предела в пространстве Гильберта при помощи почти тех же выражений, что и в обычном случае числовой прямой.

Определение 1. Элемент f пространства L_2 называется *пределом последовательности* $f_1, f_2, f_3, \ldots$ элементов этого же пространства, если всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое N, что при всех $n > N$ будет $\|f_n - f\| < \varepsilon$.

Это же обстоятельство мы будем выражать, говоря, что последовательность $\{f_n\}$ *сходится* к элементу f, или что элемент f_n *стремится* к f, и записывать обычным образом

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f, \quad f_n \to f.$$

Здесь мы должны обратить внимание читателя на глубокое различие соотношений $f_n(x) \to f(x)$ и $f_n \to f$.

Первое означает, что при фиксированном x *числовая* последовательность $\{f_n(x)\}$ в обычном смысле сходится к пределу $f(x)$.

Второе же соотношение означает, что последовательность элементов L_2 сходится к элементу $f \in L_2$ в смысле определения 1. В обычных терминах теории функций соотношение $f_n \to f$ означает, что

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 \, dx = 0.$$

Этот новый вид сходимости последовательности функций называется *сходимостью в среднем.*

Теорема 1. *Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к функции $f(x)$, то она сходится к ней и по мере.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\sigma > 0$ и

$$A_n(\sigma) = E(|f_n - f| \geq \sigma).$$

Тогда

$$\int_a^b (f_n - f)^2 \, dx \geq \int_{A_n(\sigma)} (f_n - f)^2 \, dx \geq \sigma^2 m A_n(\sigma),$$

и так как σ фиксировано, то $mA_n(\sigma) \to 0$, а это и значит, что $f_n \Rightarrow f$.

Следствие. *Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к $f(x)$, то из нее выделяется подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$, сходящаяся к $f(x)$ почти везде.*

Это следствие устанавливается простым сопоставлением теоремы 1 и теоремы Ф. Рисса из § 3, гл. IV. Можно его, однако, доказать без всякого привлечения сходимости по мере. Именно,

если $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b (f_n-f)^2\,dx=0$, то можно найти такие $n_1<n_2<n_3<\ldots$, что

$$\int\limits_a^b (f_{n_k}-f)^2\,dx<\frac{1}{2^k}.$$

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_a^b (f_{n_k}-f)^2\,dx$ сходится и, по следствию теоремы 11, § 1, гл. VI, почти везде на $[a, b]$

$$f_{n_k}(x)\to f(x).$$

Заметим, что из сходимости в среднем последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ не следует ее сходимости к $f(x)$ почти везде. Это иллюстрируется хотя бы примером, приведенным в § 3, гл. IV.

Точно так же, сходимость $f_n(x)\to f(x)$ в каждой точке $[a, b]$ не влечет за собой сходимости в среднем.

Пример. Пусть на $[0, 1]$ задана последовательность $\{f_n(x)\}$: $f_n(x)=n$ при $0<x<\frac{1}{n}$ и $f_n(x)=0$ в прочих точках $[0, 1]$.

Тогда ясно, что при любом $x\in[0, 1]$ будет $\lim f_n(x)=0$, но в то же время

$$\int\limits_0^1 f_n^2(x)\,dx=\int\limits_0^{1/n} n^2\,dx=n\to+\infty.$$

Теорема 2 (Единственность предела). *Последовательность $f_1, f_2, f_3, \ldots,$ элементов L_2 может иметь только один предел.*

Доказательство. Допустим, что $f_n\to f$, $f_n\to g$, тогда

$$\|f-g\|\leqslant\|f-f_n\|+\|f_n-g\|,$$

и так как правая часть этого неравенства стремится к нулю, а левая постоянна и не отрицательна, то $\|f-g\|=0$, откуда $f-g=0$ и $f=g$, что и требовалось доказать.

Можно дать и другое доказательство теоремы. Если $f_n\to f$ и $f_n\to g$, то последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится по мере и к $f(x)$ и к $g(x)$, так что $f(x)\sim g(x)$, а эквивалентные функции мы условились считать за один элемент пространства.

Теорема 3 (Непрерывность нормы). *Если $f_n\to f$, то $\|f_n\|\to\|f\|$.*

Доказательство. Из очевидных неравенств

$$\|f_n\|\leqslant\|f\|+\|f_n-f\|,\quad \|f\|\leqslant\|f_n\|+\|f_n-f\|$$

вытекает, что

$$|\|f_n\|-\|f\||\leqslant\|f_n-f\|,$$

откуда следует теорема.

Следствие. *Нормы членов сходящейся последовательности* $\{f_n\}$ *ограничены.*

Определение 2. Последовательность $\{f_n\}$ точек пространства L_2 называется *сходящейся в себе*, если всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое N, что как только $n > N$ и $m > N$, так сейчас же $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$.

Теорема 4. *Если последовательность* $\{f_n\}$ *имеет предел, то она сходится в себе.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Взяв произвольное $\varepsilon > 0$, найдем такое N, что при $n > N$ будет

$$\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если теперь $n > N$ и $m > N$, то

$$\|f_n - f_m\| \leqslant \|f_n - f\| + \|f - f_m\| < \varepsilon,$$

что и доказывает теорему.

Гораздо более глубокой является обратная

Теорема 5 (Э. Фишер). *Если последовательность* $\{f_n\}$ *сходится в себе, то она имеет предел.*

Доказательство. Возьмем сходящийся ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ и для каждого k подберем такое n_k, что при $n \geqslant n_k$ и $m \geqslant n_k$ будет

$$\|f_n - f_m\| < \frac{1}{2^k}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ так что $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$, и, стало быть,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < +\infty.$$

В силу неравенства (3) § 1

$$\int_a^b |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|\, dx \leqslant \sqrt{b-a}\, \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|,$$

так что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|\, dx$$

также сходится. Отсюда, в силу теоремы 11, § 1, гл. VI сходится почти везде ряд $|f_{n_1}(x)| + \sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$, и тем более почти везде сходится ряд

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \{f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\}.$$

Но сходимость этого последнего ряда, очевидно, равносильна существованию конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} f_{n_k}(x)$.

Введем функцию $f(x)$, равную этому пределу, всюду, где он существует и конечен, и равную нулю в тех точках, где этот предел не существует или бесконечен. Функция $f(x)$, очевидно, измерима, и $f_{n_k}(x) \to f(x)$ почти везде на $[a, b]$.

Нашей задачей является установить, что эта функция есть элемент пространства Гильберта и что она и является пределом последовательности элементов $\{f_n\}$.

С этой целью, взяв произвольное $\varepsilon > 0$, найдем такое N, что при $n > N$ и $m > N$ будет $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$.

Если k_0 таково, что $n_{k_0} > N$, то при любом $n > N$ и любом $k > k_0$ будет $\int\limits_a^b (f_n - f_{n_k})^2\, dx < \varepsilon^2$.

Отсюда, применяя теорему Фату к последовательности функций $\{(f_n - f_{n_k})^2\}$ $(k > k_0)$, находим, что [1] $\int\limits_a^b (f_n - f)^2\, dx \leqslant \varepsilon^2$, т. е. при любом $n > N$ будет $\|f_n - f\| \leqslant \varepsilon$. Теорема доказана.

Свойство пространства Гильберта L_2, установленное в этой теореме, называют *полнотой* этого пространства. Читатель конечно заметил, что теоремы 4 и 5 являются аналогом известного признака сходимости Больцано — Коши. Признак Больцано — Коши есть одна из многочисленных форм свойства непрерывности числовой прямой Z. Это свойство можно выразить любым из следующих предложений:

A. Если точки прямой Z разбиты на два класса X и Y так, что каждая точка класса X расположена левее каждой точки класса Y, то либо в классе X есть самая правая точка, либо в классе Y есть самая левая точка.

B. Ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю границу.

C. Монотонно возрастающая и ограниченная сверху переменная имеет конечный предел.

D. Если $\{d_n\}$ есть последовательность вложенных друг в друга сегментов, длины которых стремятся к нулю, то существует точка, входящая во все сегменты d_n.

E. Признак Больцано — Коши: последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся в себе, имеет конечный предел.

Достаточно удалить из прямой Z одну точку, чтобы все указанные теоремы стали неверны.

Из теорем **A**, **B**, **C**, **D**, **E** только последняя, **E**, сформулирована без помощи понятия *о порядке* точек на прямой. Естественно поэтому, что именно она и переносится в качестве характеристики

[1] Из этого соотношения следует, что $f_n(x) - f(x) \in L_2$, а значит и то, что $f(x) \in L_2$.

свойства непрерывности пространства на случай пространств более сложного типа, чем числовая прямая.

Определение 3. Множество A, содержащееся в L_2, называется *всюду плотным в* L_2, если любая точка[1]) L_2 есть предел последовательности точек, принадлежащих A.

На теоретико-функциональном языке это определение звучит так: класс функций $A \subset L_2$ всюду плотен в L_2, если всякая функция, входящая в L_2, есть предел (в смысле сходимости в среднем) последовательности функций, выделенных из A.

Легко видеть, что для того, чтобы множество $A = \{g\}$ было всюду плотным в L_2, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $f \in L_2$ и любого $\varepsilon > 0$ можно было найти такую точку $g \in A$, что $\|f - g\| < \varepsilon$.

Теорема 6. *Каждый из классов функций:*

M — класс измеримых ограниченных функций,

C — класс непрерывных функций,

P — класс многочленов,

S — класс ступенчатых функций

всюду плотен в L_2. Если основной сегмент $[a, b]$ есть $[-\pi, \pi]$, то всюду плотен и класс

T — класс тригонометрических многочленов.

Доказательство. 1) Пусть $f(x) \in L_2$. Взяв произвольное $\varepsilon > 0$, найдем (пользуясь свойством абсолютной непрерывности интеграла) такое $\delta > 0$, что соотношения $e \subset [a, b]$, $me < \delta$ влекут соотношение $\int\limits_e f^2(x)\,dx < \varepsilon^2$.

В силу теоремы 1, § 4, гл. IV для этого $\delta > 0$ можно найти такую измеримую ограниченную функцию $g(x)$, что $mE(f \neq g) < \delta$, причем можно считать, что $g(x) = 0$ в точках множества $E(f \neq g)$. Тогда

$$\|f - g\|^2 = \int\limits_a^b (f - g)^2\,dx = \int\limits_{E(f \neq g)} (f - g)^2\,dx = \int\limits_{E(f \neq g)} f^2\,dx < \varepsilon^2,$$

т. е.

$$\|f - g\| < \varepsilon.$$

Этим теорема доказана для класса M.

2) Пусть $f(x) \in L_2$ и $\varepsilon > 0$. Найдем такую функцию $g(x) \in M$, что $\|f - g\| < \varepsilon/2$. Пусть $|g(x)| \leqslant K$. В силу теоремы Лузина существует такая непрерывная функция $\varphi(x)$, что

$$mE(g \neq \varphi) < \frac{\varepsilon^2}{16K^2}, \quad |\varphi(x)| \leqslant K.$$

Для этой функции будет

$$\|g - \varphi\|^2 = \int\limits_a^b (g - \varphi)^2\,dx = \int\limits_{E(g \neq \varphi)} (g - \varphi)^2\,dx \leqslant 4K^2 \cdot mE(g \neq \varphi) < \frac{\varepsilon^2}{4},$$

---

[1]) Т. е. элемент L_2.

откуда

$$\|g-\varphi\|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{и, стало быть,} \quad \|f-\varphi\|<\varepsilon.$$

Этим теорема доказана для класса C.

3) Пусть $f(x)\in L_2$ и $\varepsilon>0$. Найдем такую $\varphi(x)\in C$, что $\|f-\varphi\|<\varepsilon/2$.

Далее, по теореме Вейерштрасса подберем такой многочлен $P(x)$, что для всех $x\in[a, b]$ будет

$$|\varphi(x)-P(x)|<\frac{\varepsilon}{2\sqrt{b-a}}.$$

Тогда

$$\|\varphi-P\|^2=\int_a^b(\varphi-P)^2\,dx\leqslant\frac{\varepsilon^2}{4(b-a)}\cdot(b-a)=\frac{\varepsilon^2}{4},$$

откуда

$$\|\varphi-P\|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и, стало быть,} \quad \|f-P\|<\varepsilon.$$

Итак, теорема доказана для класса P.

4) Пусть $f(x)\in L_2$ и $\varepsilon>0$. Найдем такую $\varphi(x)\in C$, что $\|f-\varphi\|<\varepsilon/2$.

Так как $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $[a, b]$ можно разбить точками $c_0=a<c_1<c_2<\ldots<c_n=b$ на такие части, в каждой из которых колебание $\varphi(x)$ меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2\sqrt{b-a}}$. Сделав это, введем ступенчатую функцию $s(x)$, полагая:

$$s(x)=\varphi(c_k) \qquad (c_k\leqslant x<c_{k+1},\ k=0, 1, \ldots, n-2)$$
$$s(x)=\varphi(c_{n-1}) \qquad (c_{n-1}\leqslant x\leqslant b).$$

Тогда всюду на $[a, b]$ будет $|s(x)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{2\sqrt{b-a}}$ и потому

$$\|s-\varphi\|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{откуда} \quad \|f-s\|<\varepsilon,$$

и теорема доказана для класса S.

5) Пусть, наконец, $[a, b]=[-\pi, \pi]$ и $f(x)\in L_2$.

Взяв произвольное $\varepsilon>0$, мы, как и выше, найдем такую непрерывную на $[-\pi, \pi]$ функцию $\varphi(x)$, что $\|f-\varphi\|<\varepsilon/2$.

Пусть $|\varphi(x)|\leqslant K$.

Построим на сегменте $[-\pi, \pi]$ непрерывную функцию $\psi(x)$, полагая

$$\psi(x)=\varphi(x) \quad \text{при} \quad x\in[-\pi+\delta, \pi], \qquad \psi(-\pi)=\varphi(\pi)$$

и считая функцию $\psi(x)$ линейной на сегменте $[-\pi, -\pi+\delta]$, при этом $\delta>0$ мы выбираем под условием $\delta<\frac{\varepsilon^2}{64K^2}$.

Функция $\psi(x)$, так же как и $\varphi(x)$, непрерывна на $[-\pi, \pi]$, но, что сейчас для нас главное, она *периодична*, т. е. $\psi(-\pi)=\psi(\pi)$.

При этом, очевидно, $|\psi(x)| \leqslant K$, так что

$$\|\varphi-\psi\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi-\psi)^2\,dx = \int_{-\pi}^{-\pi+\delta} (\varphi-\psi)^2\,dx \leqslant 4K^2\delta < \frac{\varepsilon^2}{16},$$

откуда $\|f-\psi\| < 3\varepsilon/4$.

В силу теоремы Вейерштрасса (периодичность $\psi(x)$!), существует такой тригонометрический многочлен $T(x)$, что при всех $x \in [-\pi, \pi]$

$$|\psi(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2\pi}}.$$

Тогда $\|\psi - T\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (\psi - T)^2\,dx < \frac{\varepsilon^2}{16}$, и, следовательно, $\|f-T\| < \varepsilon$, что и завершает доказательство теоремы.

Во многих вопросах важную роль играет понятие *слабой сходимости* последовательности функций.

Определение 4. Последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \ldots$, входящих в L_2, называется *слабо сходящейся* к функции $f(x) \in L_2$, если равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g(x) f_n(x)\,dx = \int_a^b g(x) f(x)\,dx$$

имеет место при всякой функции $g(x) \in L_2$.

Мы не будем подробно изучать этот новый вид сходимости, а ограничимся только одной теоремой.

Теорема 7. *Если последовательность функций $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к функции $f(x)$, то она сходится к ней и слабо.*

Доказательство. Пусть $g(x) \in L_2$. Тогда неравенство Буняковского дает, что

$$\left\{\int_a^b g(x)[f_n(x) - f(x)]\,dx\right\}^2 \leqslant \left[\int_a^b g^2(x)\,dx\right] \cdot \left[\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\,dx\right],$$

откуда

$$\left|\int_a^b g f_n\,dx - \int_a^b g f\,dx\right| \leqslant \|g\| \cdot \|f_n - f\| \to 0,$$

что и требовалось доказать.

§ 3. Ортогональные системы

Определение 1. Две функции $f(x)$ и $g(x)$, заданные на сегмент $[a, b]$, называются *взаимно ортогональными*, если

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx = 0.$$

Определение 2. Функция $f(x)$, заданная на $[a, b]$, называется *нормированной*, если

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = 1.$$

Определение 3. Система функций $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$, $\omega_3(x)$, ..., заданных на сегменте $[a, b]$, называется *ортонормальной* системой, если каждая функция системы нормирована, а любые две функции системы взаимно ортогональны.

Иначе говоря, система функций $\{\omega_k(x)\}$ ортонормальна, если

$$\int_a^b \omega_i(x)\,\omega_k(x)\,dx = \begin{cases} 1 & (i = k), \\ 0 & (i \neq k). \end{cases}$$

Ясно, что всякая ортонормальная система содержится в L_2.

Классическим примером ортонормальной системы является тригонометрическая система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\quad \ldots, \tag{1}$$

рассматриваемая на сегменте $[-\pi, +\pi]$.

Пусть какая-нибудь функция $f(x) \in L_2$ есть линейный агрегат функций ортонормальной системы $f(x) = c_1\omega_1(x) + \ldots + c_n\omega_n(x)$.

Умножая это равенство на $\omega_k(x)$ $(k = 1, \ldots, n)$ и интегрируя его, находим $c_k = \int_a^b f(x)\,\omega_k(x)\,dx$, т. е. коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$ определяются совершенно однозначно. В частности, если

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

то

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\,dx,\quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\cos kx\,dx,\quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\sin kx\,dx.$$

Для тригонометрической системы эти формулы были найдены Фурье, почему естественно дать и следующее общее определение:

Определение 4. Пусть $\{\omega_k(x)\}$ есть ортонормальная система и $f(x)$ некоторая функция из L_2. Числа

$$c_k = \int_a^b f(x)\,\omega_k(x)\,dx$$

называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$ в системе $\{\omega_k(x)\}$.

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\omega_k(x)$$

называется *рядом Фурье* функции $f(x)$ в системе $\{\omega_k(x)\}$.

Рассмотрим, насколько близка в пространстве Гильберта частная сумма ряда Фурье функции $f(x)$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \omega_k(x)$$

к самой этой функции, т. е. вычислим $\|f - S_n\|$.

Для этого вычислим сначала интегралы

$$\int_a^b f(x) S_n(x)\, dx \quad \text{и} \quad \int_a^b S_n^2(x)\, dx.$$

Для первого из них имеем

$$\int_a^b f(x) S_n(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_a^b f(x) \omega_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

Точно так же

$$\int_a^b S_n^2(x)\, dx = \sum_{i,\,k} c_i c_k \int_a^b \omega_i(x) \omega_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} c_k^2. \tag{2}$$

Заметив это, получаем

$$\|f - S_n\|^2 = \int_a^b (f^2 - 2fS_n + S_n^2)\, dx = \int_a^b f^2\, dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2,$$

или

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2. \tag{3}$$

Равенство (3) называется *тождеством Бесселя*. Так как его левая часть не отрицательна, то из него следует *неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Поскольку n здесь произвольно, то неравенство Бесселя можно представить в усиленной форме

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{4}$$

Если, в частности, окажется, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2, \tag{5}$$

то это равенство носит название *формулы замкнутости*. [1]) Оно имеет очень простой смысл. Именно, тождество Бесселя (3)

---

[1]) Или *равенства Парсеваля*.

позволяет записать формулу замкнутости в равносильной форме

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\| = 0.$$

Иначе говоря, формула замкнутости означает, что частные суммы $S_n(x)$ ряда Фурье функции $f(x)$ сходятся (в смысле метрики, установленной в L_2, или, проще, в среднем) к этой функции.

Определение 5. Ортонормальная система $\{\omega_k(x)\}$ называется *замкнутой*, если формула замкнутости имеет место для любой функции из L_2.

Теорема 1. *Если система $\{\omega_k(x)\}$ замкнута, то для любой пары функций $f(x)$ и $g(x)$ из L_2 будет*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k,$$

где

$$a_k = \int_a^b f(x)\,\omega_k(x)\,dx, \quad b_k = \int_a^b g(x)\,\omega_k(x)\,dx.$$

Доказательство. Для суммы $f(x)+g(x)$ коэффициентами Фурье служат числа $a_k + b_k$. Поэтому $\|f+g\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)^2$, откуда

$$\int_a^b f^2\,dx + 2\int_a^b fg\,dx + \int_a^b g^2\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2,$$

а это равносильно теореме.

Доказанная формула называется *обобщенной формулой замкнутости*.

Следствие. *Если система $\{\omega_k(x)\}$ замкнута и $f(x) \in L_2$, то ряд Фурье $f(x)$ в системе $\{\omega_k(x)\}$ можно почленно интегрировать по любому измеримому множеству $E \subset [a, b]$, т. е.*

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_E \omega_k(x)\,dx.$$

Действительно, если в качестве $g(x)$ выбрать *характеристическую функцию* множества E, то $g(x)$, очевидно, окажется суммируемой с квадратом, и дело сведется к обобщенной формуле замкнутости.

Интересно отметить, что сам ряд Фурье $\sum c_k \omega_k(x)$ вовсе не обязан сходиться к функции $f(x)$.

Теорема 2 (В. А. Стеклов — К. Северини). *Пусть A есть класс функций, всюду плотный в L_2. Если формула замкнутости имеет место для любой функции класса A, то система $\{\omega_k(x)\}$ замкнута.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ есть функция класса L_2. Составим частные суммы ее ряда Фурье $\sum_{k=1}^{n} c_k\omega_k(x)$ и, желая подчеркнуть их зависимость от функции $f(x)$, обозначим их через $S_n(f)$.

Тогда легко проверить, что

1) $S_n(kf) = kS_n(f)$,
2) $S_n(f_1+f_2) = S_n(f_1) + S_n(f_2)$,
3) $\|S_n(f)\| \leqslant \|f\|$.

Первые два свойства тривиальны. Что касается третьего, то оно следует из (2) и неравенства Бесселя $\|S_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leqslant \|f\|^2$.

Заметив это, выберем какую-нибудь функцию $f(x) \in L_2$ и возьмем $\varepsilon > 0$. Так как класс A всюду плотен в L_2, то найдется такая функция $g(x) \in A$, что $\|f-g\| < \varepsilon/3$.

Но тогда

$$\|f - S_n(f)\| \leqslant \|f-g\| + \|g - S_n(g)\| + \|S_n(g) - S_n(f)\|.$$

Далее

$$\|S_n(g) - S_n(f)\| = \|S_n(g-f)\| \leqslant \|g-f\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

и, стало быть,

$$\|f - S_n(f)\| < \frac{2}{3}\varepsilon + \|g - S_n(g)\|.$$

Так как для $g(x)$ формула замкнутости справедлива, то для $n > n_0$ будет $\|g - S_n(g)\| < \varepsilon/3$, и, следовательно, для этих n окажется $\|f - S_n(f)\| < \varepsilon$, что и доказывает теорему.

Следствие 1. *Если формула замкнутости имеет место для каждой функции* $1, x, x^2, x^3, \ldots$, *то система* $\{\omega_k(x)\}$ *замкнута.*

Действительно, рассмотрим произвольный многочлен

$$P(x) = A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m.$$

Тогда

$$S_n(P) = A_0S_n(1) + A_1S_n(x) + \ldots + A_mS_n(x^m)$$

и, стало быть, $\|P - S_n(P)\| \leqslant \sum_{k=0}^{m} |A_k| \cdot \|x^k - S_n(x^k)\|$.

Правая часть этого равенства стремится к 0 вместе с $1/n$, значит формула замкнутости справедлива для всякого многочлена, а класс многочленов P всюду плотен в L_2.

Однако, существуют ли замкнутые системы? Ответ дает другое следствие теоремы Стеклова.

Следствие 2. *Тригонометрическая система* (1) *замкнута.*[1])

---

[1]) Предполагается, что $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

В самом деле, достаточно проверить, что формула замкнутости справедлива для любого тригонометрического многочлена

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

но это тривиально[1]) ибо $T(x)$ есть линейный агрегат функций системы (1).

Теорема 3 (Ф. Рисс — Э. Фишер). *Пусть на сегменте* $[a, b]$ *задана ортонормальная система* $\{\omega_k(x)\}$. *Если числа* $c_1, c_2, c_3, \ldots$ *таковы, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < +\infty,$$

то существует функция $f(x) \in L_2$ *такая, что:*

1) *числа* c_k *суть ее коэффициенты Фурье;*

2) *для нее справедлива формула замкнутости.*

Доказательство. Положим $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \omega_k(x)$ и покажем, что последовательность $S_1, S_2, \ldots$ сходится в себе. С этой целью положим $m > n$ и вычислим $\|S_m - S_n\|$:

$$\|S_m - S_n\|^2 = \int_a^b \left[\sum_{k=n+1}^{m} c_k \omega_k(x)\right]^2 dx = \sum_{i,k} c_i c_k \int_a^b \omega_i(x) \omega_k(x)\, dx = \sum_{k=n+1}^{m} c_k^2.$$

Если $\varepsilon > 0$, то существует такое N, что при $m > n > N$ будет $\sum_{k=n+1}^{m} c_k^2 < \varepsilon^2$ или, что то же самое, $\|S_m - S_n\| < \varepsilon$, а это и значит, что последовательность $\{S_n\}$ сходится в себе.

Но тогда, в силу полноты пространства L_2, существует такая функция $f(x) \in L_2$, что $\|S_n - f\| \to 0$.

Это искомая функция. Действительно, в силу теоремы 7, § 2, последовательность $\{S_n(x)\}$ слабо сходится к $f(x)$, т. е. для любой $g(x) \in L_2$ будет $\lim_{n \to \infty} \int_a^b S_n(x) g(x)\, dx = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$.

В частности, полагая $g(x) = \omega_i(x)$, получим

$$\int_a^b f(x) \omega_i(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b S_n(x) \omega_i(x)\, dx.$$

---

[1]) Если $f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \omega_k(x)$, то, умножая это равенство на $f(x)$ и интегрируя, мы сразу получаем формулу замкнутости $\int_a^b f^2(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} c_k^2$.

Но, если $n > i$, то

$$\int_a^b S_n(x)\,\omega_i(x)\,dx = \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} c_k \omega_k(x)\right] \omega_i(x)\,dx = c_i,$$

откуда

$$\int_a^b f(x)\,\omega_i(x)\,dx = c_i$$

и функция $f(x)$ удовлетворяет первому требованию.

Но в таком случае $S_n(x)$ есть частная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ и соотношение $\|S_n - f\| \to 0$, послужившее для самого определения функции $f(x)$, показывает, что формула замкнутости для $f(x)$ справедлива. Теорема доказана.

Замечание. *Существует только одна функция, удовлетворяющая обоим условиям теоремы Рисса — Фишера.*

В самом деле, допустим, что таких функций две: $f(x)$ и $g(x)$. В силу первого условия они имеют общий ряд Фурье, а тогда второе условие показывает, что $S_n \to f$, $S_n \to g$, откуда $f = g$.

Интересно выяснить, сохранит ли силу это замечание, если откинуть второе условие теоремы. Для ответа на этот вопрос нам понадобится следующее определение:

Определение 6. Система функций $\{\varphi_k(x)\}$, заданных на сегменте $[a, b]$ и принадлежащих L_2, называется *полной*, если в L_2 не существует отличной от нуля[1]) функции, ортогональной ко всем функциям $\varphi_k(x)$.

Отметим, что в этом определении не ставится требования, чтобы система $\{\varphi_k(x)\}$ была ортонормальной.

Легко видеть, что для того, чтобы функция, удовлетворяющая первому условию теоремы Рисса — Фишера, была единственной, необходимо и достаточно, чтобы исходная ортонормальная система $\{\omega_k(x)\}$ была полной.

В самом деле, если эта система полна и две функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в ней одинаковые коэффициенты Фурье

$$\int_a^b f(x)\,\omega_k(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,\omega_k(x)\,dx \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

то разность их, будучи ортогональной ко всем функциям системы, должна быть тождественной нулю, откуда $f(x) = g(x)$.

Обратно, если система не полна и $h(x)$ есть функция, не тождественная нулю и ортогональная ко всем функциям системы, то достаточно прибавить ее к какой-нибудь функции $f(x)$, удовлетворяющей первому условию, чтобы получить отличную от $f(x)$ функцию, также удовлетворяющую этому условию.

---

[1]) Напомним, что функцию, эквивалентную нулю, мы считаем тождественной нулю.

Для случая ортонормальных систем понятия замкнутости и полноты совпадают.

Теорема 4. *Для того чтобы ортонормальная система* $\{\omega_k(x)\}$ *была полна, необходимо и достаточно, чтобы она была замкнута.*

Доказательство. Пусть система $\{\omega_k(x)\}$ замкнута. Если какая-нибудь функция $f(x) \in L_2$ ортогональна ко всем функциям системы, то все ее коэффициенты Фурье суть нули.

Тогда формула замкнутости дает $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = 0$, и функция $f(x)$ тождественна нулю, т. е. система полна.

Обратно, пусть система $\{\omega_k(x)\}$ полна. Допустим, что для какой-нибудь функции $g(x) \in L_2$ формула замкнутости не выполняется. Тогда необходимо $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \|g\|^2$, где $c_k = \int_a^b g(x)\,\omega_k(x)\,dx$ суть коэффициенты Фурье функции $g(x)$. На основании теоремы Рисса — Фишера найдется такая функция $f(x)$, что

$$\int_a^b f(x)\,\omega_k(x)\,dx = c_k, \quad \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

Но в таком случае разность $f(x) - g(x)$ ортогональна всем функциям системы и (система полна!) $f(x) = g(x)$, что противоречит условию $\|f\| < \|g\|$.

Теорема доказана.

Следствие. *Если* $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, *то тригонометрическая система* (1) *полна.*

В заключение остановимся еще на одном вопросе, связанном с теорией ортонормальных систем.

Пусть $\{\omega_k(x)\}$ есть ортонормальная система сегмента $[a, b]$ и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \tag{6}$$

сходится. Тогда, по теореме Рисса — Фишера, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \omega_k(x) \tag{7}$$

есть ряд Фурье некоторой функции $f(x) \in L_2$, и его частные суммы

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \omega_k(x)$$

сходятся в среднем к $f(x)$. Поэтому из них можно составить такую частичную последовательность $\{S_{n_i}(x)\}$, которая сходится [к функции $f(x)$] почти везде на $[a, b]$. Оказывается, что выбор индексов n_i можно произвести, не зная системы $\{\omega_k(x)\}$, а используя только ряд (6). В настоящее время имеется целый ряд исследований, посвященных этой проблеме. Мы приведем лишь самые простые из относящихся сюда результатов.

Теорема 5 (С. Качмаж). Пусть

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2.$$

Если числа $n_1 < n_2 < \ldots$ *таковы, что*

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_{n_i} < +\infty, \tag{K}$$

то последовательность $\{S_{n_i}(x)\}$ *сходится почти везде.*

Доказательство. Тождество Бесселя дает, что

$$\| S_{n-1} - f \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n-1} c_k^2 = r_n$$

(мы считаем $f(x)$ как раз той функцией, которая удовлетворяет обоим условиям теоремы Рисса—Фишера). Поэтому из условия (K) вытекает, что $\sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b (S_{n_i-1} - f)^2\, dx < +\infty$ и, в силу следствия теоремы 11, § 1, гл. VI, почти везде на $[a, b]$ будет $S_{n_i-1}(x) \to f(x)$.

С другой стороны, $\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b [c_k \omega_k(x)]^2\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < +\infty$ и, в силу той же теоремы 11, § 1, гл. VI, почти везде на $[a, b]$

$$c_{n_i} \omega_{n_i}(x) \to 0, \text{ откуда } S_{n_i}(x) \to f(x),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 6 (Г. Радемахер). Пусть $\psi(k)$ *положительная, возрастающая функция, стремящаяся к* $+\infty$ *вместе с* k *и такая, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\, c_k^2 < +\infty. \tag{8}$$

Если числа $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ *таковы, что*

$$\psi(n_i) \geqslant i, \tag{R}$$

то последовательность $\{S_{n_i}(x)\}$ *сходится почти везде.*

Доказательство. Мы покажем, что числа n_i, удовлетворяющие условию (R), удовлетворяют также условию (K), откуда и будет следовать теорема. С этой целью заметим, что условие (8) может быть записано так:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} \psi(k)\, c_k^2 < +\infty, \tag{9}$$

откуда, в силу (R), и подавно

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} c_k^2 < +\infty. \tag{10}$$

Это означает, что двойной ряд

$$\left.\begin{array}{r}\sum_{k=n_1}^{n_2-1} c_k^2+\sum_{k=n_2}^{n_3-1} c_k^2+\sum_{k=n_3}^{n_4-1} c_k^2+\ldots \\ +\sum_{k=n_2}^{n_3-1} c_k^2+\sum_{k=n_3}^{n_4-1} c_k^2+\ldots \\ +\sum_{k=n_3}^{n_4-1} c_k^2+\ldots \\ +\ldots\end{array}\right\} \qquad (11)$$

сходится, если его суммировать по столбцам. Но тогда он сходится и будучи суммируем по строкам, что равносильно условию (K), ибо сумма i-й строки равна r_{n_i}. Теорема доказана.

Замечание. *Условия* (K) *и* (R) *равносильны.* Действительно, мы уже видели, что числа n_i, удовлетворяющие условию (R), удовлетворяют условию (K). Обратно, пусть числа n_i удовлетворяют условию (K). Это значит, что суммируя ряд (11) по строкам, мы приходим к конечной сумме. Суммируя его по столбцам, мы установим, что выполнено (10). Если положить

$$\psi(k)=i \quad (n_i \leqslant k < n_{i+1};\ i=1,\ 2,\ \ldots),$$

то (10) можно записать в форме (9) или (8). Значит, $\psi(k)$ удовлетворяет условиям теоремы Радемахера, а числа n_i удовлетворяют условию (R).

§ 4. Пространство l_2

Точками двумерного эвклидова пространства $\mathbf{R}_2$ служат упорядоченные пары $(a_1,\ a_2)$ вещественных чисел.

Если каждой точке $M(a_1,\ a_2)$ соотнести ее радиус-вектор x, то координаты a_1 и a_2 точки M будут служить проекциями вектора x на оси координат. Поэтому пару чисел $(a_1,\ a_2)$ можно рассматривать не только как точку M, но и как вектор x. Такая трактовка более содержательна. Именно, имея два вектора $x=(a_1,\ a_2)$ и $y=(b_1,\ b_2)$, можно образовать их сумму

$$x+y=(a_1+b_1,\ a_2+b_2),$$

а также можно умножить вектор $x=(a_1,\ a_2)$ на вещественное число k

$$kx=(ka_1,\ ka_2),$$

в то время как для точек подобные операции не вводятся.

Длиной вектора $x=(a_1,\ a_2)$ является число

$$\|x\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}.$$

(Отметим, кстати, что это не что иное, как теорема Пифагора.)

Напомним далее, что скалярным произведением $(x,\ y)$ двух векторов $x=(a_1,\ a_2)$ и $y=(b_1,\ b_2)$ называется произведение их длин на косинус угла между ними

$$(x,\ y)=\|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\theta,$$

причем оно выражается через проекции векторов по известной формуле

$$(x, y) = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Зная это произведение и длины обоих векторов, легко найти угол между ними из соотношений

$$\cos\theta = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi).$$

В частности, условие ортогональности векторов имеет вид

$$(x, y) = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

Буквально то же мы можем повторить о трехмерном пространстве R_3:

1) Тройка чисел $x = (a_1, a_2, a_3)$, взятых в определенном порядке, может рассматриваться или как *точка* пространства, или как *вектор*, лежащий в этом пространстве.

2) При второй трактовке можно вектор умножать на число и складывать два вектора. Длина $\|x\|$ вектора $x = (a_1, a_2, a_3)$, как это следует из теоремы Пифагора, есть

$$\|x\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

3) Имея два вектора, $x = (a_1, a_2, a_3)$ и $y = (b_1, b_2, b_3)$, можно составить их скалярное произведение

$$(x, y) = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\theta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

4) Зная скалярное произведение (x, y) и длины векторов, можно найти угол θ между ними

$$\cos\theta = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi).$$

5) Наконец, условие ортогональности векторов имеет вид

$$(x, y) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0.$$

Обобщая эти соотношения, можно ввести понятие n-мерного эвклидова пространства R_n, точками и векторами которого служат n-членные упорядоченные комплексы $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ вещественных чисел.

Здесь мы, по определению, длиной вектора $x = (a_1, \ldots, a_n)$ будем называть число

$$\|x\| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}.$$

Заметим, далее, что скалярное произведение теперь уже не может быть определено через угол, а за самое его определение нужно принять равенство

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Напротив, угол θ может быть определен через скалярное произведение с помощью соотношений

$$\cos\theta = \frac{(x,\ y)}{\|x\|\cdot\|y\|} \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi),$$

но для того, чтобы это определение было законным, нужно доказать, что

$$|(x,\ y)| \leqslant \|x\|\cdot\|y\|.$$

Когда это будет доказано (ниже это делается), то естественно считать векторы $x = (a_1, \ldots, a_n)$ и $y = (b_1, \ldots, b_n)$ взаимно ортогональными, если

$$(x,\ y) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 0.$$

Продолжая этот процесс обобщения, мы естественно приходим к понятию «бесконечномерного» пространства R_∞, которое обозначается также и через l_2. При этом мы ограничимся «векторной» трактовкой вопроса.

Определение. Бесконечная последовательность вещественных чисел

$$x = (a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots)$$

называется *вектором пространства* l_2, если

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2} < +\infty.$$

Число $\|x\|$ называется *длиной* или *нормой* вектора x.

Легко видеть, что если $x \in l_2$, то при любом k вектор

$$kx = (ka_1,\ ka_2,\ ka_3,\ \ldots)$$

также входит в l_2, причем

$$\|kx\| = |k|\cdot\|x\|$$

и, в частности, $\|-x\| = \|x\|$.

Точно также, если наряду с x в l_2 входит вектор

$$y = (b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots)$$

то вектор-сумма

$$x + y = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3,\ \ldots)$$

тоже входит в l_2, ибо $(a_k + b_k)^2 \leqslant 2(a_k^2 + b_k^2)$.

Далее из неравенства $|a_k b_k| \leqslant a_k^2 + b_k^2$ следует, что ряд

$$(x,\ y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

сходится абсолютно. Сумма его называется скалярным произведением векторов x и y.

Между пространствами l_2 и L_2 существует тесная связь. Возьмем какую-нибудь полную ортонормальную систему $\{\omega_k(x)\}$ и каждой функции $f(x) \in L_2$ соотнесем последовательность $x = (c_1, c_2, c_3, \ldots)$ ее коэффициентов Фурье:

$$c_k = \int_a^b f(x)\,\omega_k(x)\,dx.\text{[1]}$$

В силу формулы замкнутости

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2} = \|f\| < \infty,$$

последовательность x есть вектор l_2.

Легко проверить, что соответствие, установленное между L_2 и l_2, взаимно однозначно. Действительно, разным элементам L_2 (в силу полноты системы $\{\omega_k(x)\}$) отвечают разные же векторы l_2, а в силу теоремы Рисса — Фишера, каждый вектор из l_2 есть набор коэффициентов Фурье некоторой функции из L_2.

Но это соответствие обладает и другими свойствами, кроме взаимной однозначности. Именно, если $x \sim f$, $y \sim g$, то

$$x + y \sim f + g, \qquad kx \sim kf.$$

Иначе говоря, ни одно линейное соотношение

$$k_1 f_1 + \ldots + k_n f_n = 0$$

между элементами L_2 не нарушится, если мы заменим элементы $f_1, \ldots, f_n$ соответствующими им элементами l_2 [при этом через 0 в l_2 обозначается вектор $(0, 0, 0, \ldots)$]. Если это сопоставить с тем, что (как уже отмечалось) $\|x\| = \|f\|$, то станет ясна полная геометрическая тождественность пространств L_2 и l_2. В связи с этим и l_2 называется пространством Гильберта.

Пусть $x = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$, $y = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$ суть два вектора из l_2, а f и g соответствующие им элементы пространства L_2. Обобщенная формула замкнутости дает, что

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = (x, y).$$

В связи с этим естественно интеграл

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

---

[1]) Мы надеемся, что читателя не смутит то обстоятельство, что буквой x мы обозначаем и аргумент функций $f(x)$, $\omega_k(x)$, ... и векторы пространства l_2.

назвать скалярным произведением элементов[1] f и g и обозначать его через (f, g), так что $(f, g)=(x, y)$.

Неравенство Буняковского принимает теперь следующий вид:

$$|(f, g)| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|.$$

Отсюда следует возможность определить угол θ между элементами f и g пространства L_2:

$$\cos\theta = \frac{(f, g)}{\|f\| \cdot \|g\|} \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi).$$

В частности, данное выше определение взаимной ортогональности функций $f(x)$ и $g(x)$ $(f, g)=0$ оказывается равносильным условию, что угол между ними, как элементами L_2, равен $\pi/2$.

Далее, если $\omega(x)$ есть нормированная функция $\|\omega\|=1$, то ее можно рассматривать как единичный вектор (орт) пространства L_2 (или l_2, что, как мы видели, безразлично). В таком случае можно определить проекцию вектора f на направление ω обычным способом

$$\text{Пр}_\omega f = \|f\| \cdot \cos\theta,$$

где θ угол между векторами f и ω. Иначе говоря,

$$\text{Пр}_\omega f = \int_a^b f(x)\, \omega(x)\, dx.$$

Таким образом, коэффициенты Фурье функции $f(x)$ в ортонормальной системе[2] $\{\omega_k(x)\}$ суть проекции вектора f на направления, характеризуемые функциями системы.

Если мы имеем n-мерное эвклидово пространство, то длиной вектора $x=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется число

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}.$$

Это есть обобщение теоремы Пифагора, ибо числа a_k суть проекции вектора x на координатные оси. Рассмотрим m $(m \leqslant n)$ этих проекций. Чтобы узнать, все ли n проекций на оси приняты во внимание, можно просто сравнить числа m и n, а можно вместо этого посмотреть, будет ли при всяком векторе x верно равенство

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{m} a_k^2$$

[1]) Элементы пространства L_2 мы теперь будем называть и векторами этого пространства.

[2]) Это не обязательно та система, с помощью которой устанавливалось соответствие между L_2 и l_2.

(ибо если $m<n$, то обязательно найдутся векторы, для которых $\sum_{k=1}^{m} a_k^2 < \|x\|$). Можно, наконец, выяснить, существуют ли направления, ортогональные ко всем принятым во внимание m осям.

Для бесконечномерного пространства L_2 всякая ортонормальная система $\{\omega_k(x)\}$ есть система ортогональных координатных осей. Желая выяснить, все ли возможные направления приняты во внимание при составлении этой системы, мы лишены возможности действовать прямым счетом. Обобщая другие два способа, указанные для n-мерного пространства, мы естественно приходим к определениям замкнутой и полной ортонормальной системы. В частности, становится совершенно ясной причина равносильности этих определений.

До сих пор связь пространств l_2 и L_2 использовалась нами для установления некоторых новых точек зрения на L_2 (что также, конечно, очень важно). Покажем, что эта связь полезна и для установления новых фактов.

Прежде всего, неравенство $|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$, равносильное неравенству Буняковского $|(f, g)| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$, означает, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\right), \tag{1}$$

а неравенство $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$ может быть представлено в форме

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (a_k+b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2}. \tag{2}$$

Неравенства (1) и (2) имеют чисто алгебраический характер. Далее, из полноты пространства L_2 следует автоматически полнота пространства l_2 (т. е. сходимость последовательности $x_1, x_2, \ldots$, у которой $\|x_n - x_m\|$ стремится к нулю с возрастанием n и m).

Так как всякое n-мерное пространство R_n есть замкнутое подмножество пространства l_2, то все сказанное (неравенства (1) и (2), полнота) применимо и к случаю этого пространства.

Рассмотрим в заключение еще один вопрос, где весьма полезной окажется связь между L_2 и l_2.

Фиксируем какой-либо элемент $g \in L_2$ и соотнесем каждому $f \in L_2$ число

$$\Phi(f) = (f, g). \tag{3}$$

Этим задана в L_2 некоторая функция, значениями которой являются вещественные числа. Она обладает очевидными свойствами

1) $\Phi(f_1+f_2) = \Phi(f_1) + \Phi(f_2)$,
2) $|\Phi(f)| \leqslant K \cdot \|f\| \qquad (K = \|g\|)$.

Всякая функция $\Phi(f)$, аргумент которой f есть элемент L_2, а значения которой суть вещественные числа и которая обладает свойствами 1) и 2), — называется *линейным функционалом* в пространстве L_2. Оказывается, что никаких других линейных функционалов, кроме (3), в пространстве L_2 нет.

Теорема (М. Фреше). *Если $\Phi(f)$ есть линейный функционал в пространстве L_2, то существует один (и только один) элемент $g \in L_2$, такой, что при всяком $f \in L_2$ будет*

$$\Phi(f) = (f, g).$$

Доказательство. Допустим, что у нас с помощью какой-либо ортонормальной системы осуществлено взаимно однозначное соответствие между L_2 и l_2, которое не нарушает линейных соотношений в этих пространствах и сохраняет норму элемента. Если мы будем считать, что значению $\Phi(f)$ функционала Φ соотнесено тому элементу x пространсгва l_2, который отвечает в указанном соответствии элементу $f \in L_2$, то в конечном счете наш функционал будет задан в l_2 и обладать свойствами

$$\Phi(x_1 + x_2) = \Phi(x_1) + \Phi(x_2), \qquad |\Phi(x)| \leqslant K \cdot \|x\|.$$

Установим существование такого элемента $y \in l_2$, что при всех $x \in l_2$ будет

$$\Phi(x) = (x, y). \tag{4}$$

С этой целью мы убедимся сначала, что функционал Φ *однороден*, т. е. что при любом вещественном a будет

$$\Phi(ax) = a\Phi(x). \tag{5}$$

Соотношение (5), очевидно, выполняется, если a есть натуральное число. Отсюда легко усмотреть, что оно выполняется и в том случае, когда a имеет вид $1/m$, где m натуральное число, а стало быть, и при всяком положительном рациональном a. Далее, обозначая через 0 вектор $(0, 0, \ldots)$, мы будем иметь, что $\Phi(0) = \Phi(0+0) = 2\Phi(0)$, откуда ясно, что $\Phi(0) = 0$ и (5) имеет место при $a = 0$. Наконец, из того, что $0 = \Phi(0) = \Phi[x + (-x)] = \Phi(x) + \Phi(-x)$ следует, что $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ и, стало быть, (5) верно для всякого рационального a. Остается рассмотреть случай, когда a иррационально. В этом случае назовем через r какое-нибудь рациональное число и покажем, что равенство

$$\Phi(rx) = r\Phi(x) \tag{6}$$

при $r \to a$ в пределе переходит в (5). Для правой части (6) это очевидно. С другой стороны, $|\Phi(rx) - \Phi(ax)| = |\Phi[(r-a)x]| \leqslant K \cdot |r-a| \cdot \|x\|$, так что и левая часть (6) стремится к левой части (5). Итак, (5) доказано.

Введем в рассмотрение векторы $e_k = (0, \ldots 0, 1, 0, \ldots)$ (единица на k-ом месте) и положим $\Phi(e_k) = A_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Покажем, что вектор $y = (A_1, A_2, A_3, \ldots)$ входит в l_2. Действительно, если $y_n = (A_1, A_2, \ldots, A_n, 0, 0, \ldots)$, то $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k e_k$, откуда $\Phi(y_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \Phi(e_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k^2$ и неравенство $|\Phi(x)| \leqslant K \cdot \|x\|$ в применении к y_n дает, что $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} A_k^2} \leqslant K$, откуда, ввиду произвольности n, будет $\|y\| \leqslant K$.

Покажем теперь, что элемент y и является искомым, т. е. что при любом $x \in l_2$ имеет место (4).

Пусть $x = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ есть элемент l_2. Положим

$$x_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots).$$

Тогда $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$ и

$$\Phi(x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k \Phi(e_k) = \sum_{k=1}^{n} A_k a_k. \tag{7}$$

Если n стремится к $+\infty$, то правая часть этого равенства стремится к (x, y). С другой стороны,

$$|\Phi(x)-\Phi(x_n)|=|\Phi(x-x_n)|\leqslant K\cdot\|x-x_n\|=K\cdot\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2},$$

так что $\Phi(x_n)$ с возрастанием n стремится к $\Phi(x)$ и (7) переходит в (4).

Назовем через g тот элемент L_2, который отвечает элементу y в установленном соответствии. Пусть f произвольный элемент L_2 и пусть x соответствующий ему элемент l_2. Тогда $\Phi(f)=\Phi(x)=(x, y)=(f, g)$.

Остается убедиться в том, что в L_2 есть только один элемент g, удовлетворяющий при любом f соотношению $\Phi(f)=(f, g)$.

Но если бы их было два, g_1 и g_2, то при любом f было бы

$$(f, g_1-g_2)=(f, g_1)-(f, g_2)=\Phi(f)-\Phi(f)=0.$$

Положив здесь $f=g_1-g_2$, мы нашли бы, что

$$(g_1-g_2, g_1-g_2)=\|g_1-g_2\|^2=0,$$

откуда $g_1=g_2$. Теорема доказана полностью.

§ 5. Линейно независимые системы

Определение 1. Система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, заданных на $[a, b]$, называется *линейно зависимой*, если можно указать такую совокупность постоянных $A_1, A_2, \ldots, A_n$, из которых хоть одна отлична от нуля, что

$$A_1\varphi_1(x)+A_2\varphi_2(x)+\ldots+A_n\varphi_n(x)\sim 0. \tag{1}$$

Если же такой совокупности постоянных нет, т. е. если из (1) следует, что $A_1=A_2=\ldots=A_n=0$, то система $\{\varphi_k(x)\}$ называется *линейно независимой*.

Легко видеть, что если хоть одна функция системы $\{\varphi_k(x)\}$ эквивалентна нулю, то система линейно зависима, и что всякая система, являющаяся частью линейно независимой системы, линейно независима.

Теорема 1. *Всякая ортонормальная система линейно независима.*

Действительно, если $\{\omega_k(x)\}$ $(k=1, 2, \ldots, n;\ a\leqslant x\leqslant b)$ есть ортонормальная система и если $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k\omega_k(x)\sim 0$, то, умножая это равенство на $\omega_i(x)$ и интегрируя, мы найдем, что $A_i=0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, откуда и следует теорема.

Теорема 2. *Система функций $x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots, x^{n_i}$, где показатели $n_1, n_2, \ldots, n_i$ целые и неравные между собой числа, линейно независима на любом сегменте.*

Эта теорема следует из того, что целый многочлен может иметь только конечное число корней.

Определение 2. Счетная система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ называется *линейно независимой*, если линейно независима всякая ее конечная часть.

Например, линейно независима всякая счетная ортонормальная система, или система 1, x, x^2, ...

Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ есть система функций из L_2, заданных на сегменте $[a, b]$. Положим, как и выше, для любых двух функций $f(x)$ и $g(x)$ из L_2

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

и составим определитель

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) (\varphi_1, \varphi_2) \ldots (\varphi_1, \varphi_n) \\ (\varphi_2, \varphi_1) (\varphi_2, \varphi_2) \ldots (\varphi_2, \varphi_n) \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ (\varphi_n, \varphi_1) (\varphi_n, \varphi_2) \ldots (\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix}.$$

Определение 3. Определитель Δ_n называется *определителем Грама* системы функций $\{\varphi_k(x)\}$.

Теорема 3. *Для того чтобы система функций*

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x) \tag{2}$$

была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Грама равнялся нулю.

Доказательство. Пусть система (2) линейно зависима. Тогда существует система констант $A_1, \ldots, A_n$, из коих хоть одна отлична от нуля, такая, что

$$A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) + \ldots + A_n\varphi_n(x) \sim 0. \tag{3}$$

Умножая это равенство на $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ и каждый раз интегрируя, получим

$$\left.\begin{array}{l} A_1(\varphi_1, \varphi_1) + A_2(\varphi_1, \varphi_2) + \ldots + A_n(\varphi_1, \varphi_n) = 0, \\ A_1(\varphi_2, \varphi_1) + A_2(\varphi_2, \varphi_2) + \ldots + A_n(\varphi_2, \varphi_n) = 0, \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ A_1(\varphi_n, \varphi_1) + A_2(\varphi_n, \varphi_2) + \ldots + A_n(\varphi_n, \varphi_n) = 0. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Если бы в равенствах (4) числа A_k были неизвестными, то эти равенства образовывали бы линейную систему уравнений с определителем Δ_n. Но при наших значениях чисел A_k однородная система (4) удовлетворяется и, так как не все A_k суть нули, то

$$\Delta_n = 0, \tag{5}$$

что и доказывает необходимость этого условия.

Допустим теперь, что $\Delta_n = 0$. Тогда однородная линейная система уравнений (4) имеет решения, отличные от нуля. Пусть

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ эти решения, так что равенства (4) суть тождества. Перепишем эти тождества так:

$$\int_a^b \varphi_1(x)\,[A_1\varphi_1(x)+\ldots+A_n\varphi_n(x)]\,dx=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\int_a^b \varphi_n(x)\,[A_1\varphi_1(x)+\ldots+A_n\varphi_n(x)]\,dx=0.$$

Умножая эти равенства на $A_1, \ldots, A_n$ и складывая, найдем, что

$$\int_a^b [A_1\varphi_1(x)+\ldots+A_n\varphi_n(x)]^2\,dx=0,$$

откуда и вытекает (3), так что система $\{\varphi_k(x)\}$ линейно зависима.

Следствие. *Если $\Delta_n \neq 0$, то ни один из определителей Δ_1, Δ_2, $\Delta_3, \ldots, \Delta_{n-1}$ также не равен нулю.*[1]

В самом деле, если $\Delta_n \neq 0$, то система $\{\varphi_k(x)\}$ линейно независима, следовательно, линейно независима и всякая ее часть $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ $(m<n)$, а тогда и $\Delta_m \neq 0$.

Лемма. *Пусть на сегменте $[a, b]$ задана система n функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$. Положим*

$$\psi_n(x)=\begin{vmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_2) & \ldots & (\varphi_1, \varphi_{n-1}) & \varphi_1(x) \\ (\varphi_2, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_2) & \ldots & (\varphi_2, \varphi_{n-1}) & \varphi_2(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\varphi_n, \varphi_1) & (\varphi_n, \varphi_2) & \ldots & (\varphi_n, \varphi_{n-1}) & \varphi_n(x) \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Тогда

$$(\psi_n, \varphi_k)=\begin{cases} 0 & (k<n), \\ \Delta_n & (k=n). \end{cases}$$

Доказательство. Для того чтобы умножить $\psi_n(x)$ на $\varphi_k(x)$, достаточно умножить на $\varphi_k(x)$ последний столбец определителя (6), а чтобы найти интеграл от полученного произведения, также нужно интегрировать лишь его последний столбец. Остальное ясно.

Если мы развернем определитель $\psi_n(x)$ по элементам последнего столбца, то, очевидно, получим

$$\psi_n(x)=A_1\varphi_1(x)+\ldots+A_{n-1}\varphi_{n-1}(x)+\Delta_{n-1}\varphi_n(x), \qquad (7)$$

Значит, если система $\{\varphi_k(x)\}$ линейно независима, то $\psi_n(x)$ не эквивалентна нулю (ибо $\Delta_{n-1}\neq 0$). Умножая равенство (7) на $\psi_n(x)$, интегрируя и принимая во внимание лемму, находим

$$\int_a^b \psi_n^2\,dx=\Delta_{n-1}\Delta_n, \qquad (8)$$

---

[1]) Под Δ_1 разумеется (φ_1, φ_1).

так что определители Δ_n и Δ_{n-1} (не равные нулю) одного знака. Но по тем же причинам одного знака и определители Δ_{n-1} и Δ_{n-2} и т. д. Значит, Δ_n имеет тот же знак, что и $\Delta_1=(\varphi_1, \varphi_1)>0$. Таким образом, мы установили теорему.

Теорема 4. *Определитель Грама линейно независимой системы положителен.*

Развитые здесь соображения позволяют легко доказать следующее предложение.

Теорема 5 (Э. Шмидт). *Пусть на сегменте $[a, b]$ задана конечная или счетная линейно независимая система $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... Тогда можно построить такую ортонормальную систему $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$, ... что 1) каждая функция $\omega_n(x)$ есть линейный агрегат первых n функций системы $\{\varphi_k(x)\}$ и обратно, 2) всякая функция $\varphi_n(x)$ есть линейный агрегат первых n функций системы $\{\omega_k(x)\}$.*

Доказательство. Положим

$$\omega_1(x)=\frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{\Delta_1}}, \quad \omega_n(x)=\frac{\psi_n(x)}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \qquad (n\geqslant 2),$$

где $\psi_n(x)$ определяются равенством (6). Этим построена требуемая система. В самом деле, из (7) ясно, что $\omega_n(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)$, так что система $\{\omega_k(x)\}$ удовлетворяет первому требованию теоремы.

Из леммы следует, что $\psi_n(x)$, а значит и $\omega_n(x)$, ортогональна ко всем функциям $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$. Но тогда $\omega_n(x)$ ортогональна ко всем линейным агрегатам функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ и, в частности, к функциям $\omega_1(x), \ldots, \omega_{n-1}(x)$. Значит, система $\{\omega_k(x)\}$ состоит из попарно ортогональных функций. В силу (8), все функции $\omega_n(x)$ нормированы, и $\{\omega_k(x)\}$ есть ортонормальная система.

Остается убедиться, что

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{n} b_k\omega_k(x). \tag{9}$$

Это тривиально для $n=1$. Пусть это доказано для всех $n<m$. Тогда, в силу (7),

$$\varphi_m(x)=\frac{1}{\Delta_{m-1}}\psi_m(x)-\sum_{k=1}^{m-1}\frac{A_k}{\Delta_{m-1}}\varphi_k(x),$$

откуда, заменяя в правой части $\psi_m(x)$ на $\sqrt{\Delta_{m-1}\Delta_m}\,\omega_m(x)$, а каждую $\varphi_k(x)$ $(k=1, \ldots, m-1)$ на линейный агрегат функций $\omega_1(x), \ldots, \omega_k(x)$, мы находим, что (9) верно и для $n=m$, что и требовалось доказать.

Замечание. *Системы $\{\varphi_k(x)\}$ и $\{\omega_k(x)\}$ одновременно полны или нет.*

Это следует из того, что всякая функция $h(x)$, ортогональная ко всем функциям одной системы, ортогональна и ко всем функциям другой.

Пример. Система функций $1, x, x^2, x^3, \ldots$ линейно независима на сегменте $[-1, +1]$. Применяя к ней процесс ортогонализации, указанный в теореме, мы получим ортонормальную на сегменте $[-1, +1]$ систему многочленов

$$L_0(x),\ L_1(x),\ L_2(x),\ \ldots \tag{10}$$

где $L_n(x)$ есть полином степени n.[1]) Полиномы (10) называются *полиномами Лежандра*.

Теорема 6. *Система полиномов Лежандра замкнута.*

Доказательство. Согласно теореме Шмидта

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k L_k(x). \tag{11}$$

Но в начале § 3 мы установили, что в подобном случае коэффициенты a_k суть коэффициенты Фурье функции x^n в ортонормальной системе $\{L_k(x)\}$.

Умножая (11) на x^n и интегрируя в пределах $[-1, +1]$, найдем, что $\|x^n\|^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k^2$, т. е. формула замкнутости справедлива для каждой из функций x^n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. В силу следствия 1 теоремы Стеклова, наша теорема доказана.

Следствие. *Система функций* $1, x, x^2, \ldots$ *полна.*

§ 6. Пространства L_p и l_p

В этом параграфе мы вкратце изложим одно обобщение пространства L_2.

Определение 1. Измеримая функция $f(x)$ (как и выше, мы ограничиваемся функциями, заданными на некотором сегменте $[a, b]$) называется *суммируемой с p-й степенью*, где $p \geqslant 1$, если

$$\int_a^b |f(x)|^p\, dx < +\infty.$$

Множество всех таких функций принято обозначать через L_p (или через $L_p[a, b]$). Очевидно, $L_1 = L$.

Теорема 1. *Функция $f(x)$, суммируемая со степенью $p > 1$, суммируема, т. е. $L_p \subset L$.*

Действительно, если положить $E = [a, b]$, $A = E(|f| < 1)$, $B = E - A$, то суммируемость функции $f(x)$ на множестве A оче-

---

[1]) По теореме степень $L_n(x)$ не выше n. Но она и не ниже n, ибо $x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k L_k(x)$.

видна, а ее суммируемость на множестве B вытекает из того, что на этом множестве $|f(x)| \leqslant |f(x)|^p$.

Аналогично доказывается

Теорема 2. *Сумма двух функций, входящих в L_p, также входит в этот класс.*

В самом деле, пусть $f(x)$ и $g(x)$ входят в L_p. Полагая

$$E=[a, b], \quad A=E(|f| \leqslant |g|), \quad B=E-A,$$

будем иметь для $x \in A$:

$$|f(x)+g(x)|^p \leqslant \{|f(x)|+|g(x)|\}^p \leqslant 2^p |g(x)|^p,$$

откуда

$$\int_A |f(x)+g(x)|^p dx \leqslant 2^p \int_A |g(x)|^p dx < +\infty.$$

Так же мы убедимся в конечности интеграла $\int_B |f+g|^p dx$. Отметим еще очевидный факт, что вместе с $f(x)$ в L_p входит любая функция $kf(x)$, где k конечная постоянная.

Пусть $p > 1$. Число

$$q=\frac{p}{p-1}$$

называется *показателем, сопряженным с p*. Ввиду того что

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

показатель, сопряженный с q, есть p, так что p и q это два взаимносопряженных показателя. В частности, если $p=2$, то и $q=2$, т. е. показатель 2 самосопряжен (в этом обстоятельстве коренятся некоторые важные свойства пространства L_2, не переносящиеся на другие L_p).

Теорема 3. *Если $f(x) \in L_p$, а $g(x) \in L_q$, где p и q взаимно сопряжены, то произведение $f(x)g(x)$ суммируемо и справедливо неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x) g(x) dx\right| \leqslant \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p dx} \cdot \sqrt[q]{\int_a^b |g(x)|^q dx}. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть $0 < \alpha < 1$. Рассмотрим функцию

$$\psi(x)=x^\alpha-\alpha x \qquad (0 < x < +\infty).$$

Ее производная $\psi'(x)=\alpha[x^{\alpha-1}-1]$ положительна при $0 < x < 1$ и отрицательна при $x > 1$. Значит, наибольшее значение функции $\psi(x)$ достигается при $x=1$. Таким образом, $\psi(x) \leqslant \psi(1)=1-\alpha$, откуда следует, что при всех $x > 0$ будет

$$x^\alpha \leqslant \alpha x+(1-\alpha). \qquad (2)$$

Пусть A и B два положительных числа. Если в (2) подставить $x = A/B$ и полученное неравенство умножить на B, то мы получим

$$A^{\alpha}B^{1-\alpha} \leqslant \alpha A + (1-\alpha) B.$$

Пусть p и q — те два взаимно сопряженных показателя, о которых говорится в условии теоремы. Если положить $\alpha = 1/p$, $1 - \alpha = 1/q$, то мы увидим, что

$$A^{1/p}B^{1/q} \leqslant \frac{A}{p} + \frac{B}{q}. \tag{3}$$

Это неравенство доказано для $A > 0$ и $B > 0$, но оно очевидным образом справедливо и тогда, когда одно (или оба) из этих чисел обращается в 0.

Установив это, рассмотрим те функции $f(x)$ и $g(x)$, о которых идет речь в теореме. Если хоть одна из них эквивалентна нулю, то все утверждения теоремы очевидны. Исключив этот тривиальный случай, мы можем утверждать, что оба интеграла

$$\int_a^b |f(x)|^p\,dx, \quad \int_a^b |g(x)|^q\,dx$$

строго положительны, и потому можно ввести функции

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{\sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p\,dx}}, \qquad \gamma(x) = \frac{g(x)}{\sqrt[q]{\int_a^b |g(x)|^q\,dx}}.$$

Если в (3) положить $A = |\varphi(x)|^p$, $B = |\gamma(x)|^q$, то мы получим, что

$$|\varphi(x)\gamma(x)| \leqslant \frac{|\varphi(x)|^p}{p} + \frac{|\gamma(x)|^q}{q}, \tag{4}$$

откуда следует суммируемость произведения $\varphi(x)\gamma(x)$, а с ним и произведения $f(x)g(x)$. Кроме того, замечая, что

$$\int_a^b |\varphi(x)|^p\,dx = \int_a^b |\gamma(x)|^q\,dx = 1$$

и интегрируя (4), мы находим

$$\int_a^b |\varphi(x)\gamma(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

откуда следует неравенство

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p\,dx} \cdot \sqrt[q]{\int_a^b |g(x)|^q\,dx},$$

даже более сильное, чем (1).

Неравенство (1), называемое *неравенством Гёльдера*, является обобщением неравенства Буняковского, в которое оно и переходит при $p=2$.

Теорема 4. *Если* $f(x) \in L_p$ *и* $g(x) \in L_p (p \geqslant 1)$, *то*

$$\sqrt[p]{\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx} \leqslant \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p\,dx} + \sqrt[p]{\int_a^b |g(x)|^p\,dx}. \qquad (5)$$

Доказательство. Теорема очевидна при $p=1$. Пусть $p>1$ и q есть показатель, сопряженный с p.

По теореме 2 сумма $f(x)+g(x)$ входит в L_p, а потому $|f(x)+g(x)|^{p/q}$ входит в L_q.

Заменим в неравенстве Гёльдера $f(x)$ на $|f(x)|$, а $g(x)$ на $|f(x)+g(x)|^{p/q}$. Это дает, что

$$\int_a^b |f(x)|\cdot|f(x)+g(x)|^{p/q}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p\,dx}\cdot\sqrt[q]{\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx}. \qquad (6)$$

Аналогично

$$\int_a^b |g(x)|\cdot|f(x)+g(x)|^{p/q}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[p]{\int_a^b |g(x)|^p\,dx}\cdot\sqrt[q]{\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx}. \qquad (7)$$

Но ведь $p = 1 + \frac{p}{q}$. Значит

$$|f+g|^p = |f+g|\cdot|f+g|^{p/q} \leqslant |f|\cdot|f+g|^{p/q} + |g|\cdot|f+g|^{p/q}.$$

Отсюда и из (6) и (7) следует, что

$$\int_a^b |f+g|^p\,dx \leqslant \left\{\sqrt[p]{\int_a^b |f|^p\,dx} + \sqrt[p]{\int_a^b |g|^p\,dx}\right\}\cdot\sqrt[q]{\int_a^b |f+g|^p\,dx},$$

а отсюда и вытекает теорема $\left[\text{сокращение на } \left(\int_a^b |f+g|^p\,dx\right)^{1/q}\right.$ законно, если этот интеграл отличен от нуля, но в противном случае теорема очевидна$\Big]$.

Неравенство (5) называется *неравенством Минковского*. При $p=2$ оно превращается в уже известное нам неравенство Коши.

Теми же рассуждениями устанавливаются и сумматорные неравенства Гёльдера и Минковского:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p} \cdot \sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q} \quad \left(p>1,\ q=\frac{p}{p-1}\right), \tag{8}$$

$$\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |a_k+b_k|^p} \leqslant \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p} \qquad (p \geqslant 1). \tag{9}$$

Определение 2. Пусть $f(x) \in L_p$. Число

$$\|f\| = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p\,dx}$$

называется *нормой* функции $f(x)$ (как элемента L_p).

Очевидны следующие свойства нормы:

I. $\|f\| \geqslant 0$, причем $\|f\|=0$, тогда и только тогда, когда $f(x) \sim 0$.

II. $\|kf\| = |k| \cdot \|f\|$ и, в частности, $\|-f\| = \|f\|$.

III. $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

Введение нормы позволяет и для L_p установить ту же геометрическую терминологию, что и выше для L_2. Сходимость последовательности элементов $\{f_n(x)\}$ из L_p к пределу $f(x) \in L_p$ по норме означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p\,dx = 0.$$

Этот вид сходимости называется также *сходимостью в среднем порядка p*.

Так же, как и для L_2, можно показать, что из сходимости некоторой последовательности в среднем порядка p вытекает ее сходимость (к тому же пределу) и по мере. Так же, как и для L_2, устанавливается непрерывность нормы и единственность предела (если не различать между собой эквивалентных функций). Буквально так же, как для L_2, вводится понятие сходимости в себе и доказывается, что последовательность элементов L_p имеет предел тогда и только тогда, когда она сходится в себе (полнота пространства L_p).

Ввиду отсутствия здесь новых идейных моментов, мы не останавливаемся на доказательстве всех этих предложений. Точно так же без доказательства отметим, что каждый из классов M, C, P, S и T (последний при $b-a=2\pi$), рассмотренных в теореме 6, § 2, всюду плотен в L_p.

Понятие слабой сходимости при $p>1$ вводится так: последовательность $\{f_n(x)\} \subset L_p$ *слабо сходится* к $f(x) \in L_p$, если равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \tag{10}$$

имеет место для любой функции $g(x)$ из L_q, где q показатель, сопряженный с p. При помощи неравенства Гёльдера легко показать, что последовательность, сходящаяся в среднем, сходится (к тому же пределу) и слабо.

Если $p=1$, то сопряженного показателя не существует. В этом случае говорят, что последовательность $\{f_n(x)\} \subset L$ слабо сходится к $f(x) \in L$, если равенство (10) имеет место для всякой измеримой и *ограниченной* функции $g(x)$. Ясно, что и здесь сходимость в среднем (первого порядка) влечет слабую сходимость к тому же пределу.

Упомянем вкратце еще об одном типе «пространств», применяемых в анализе, а именно *о пространствах* l_p, где $p \geqslant 1$. Под пространством l_p понимают множество всех последовательностей $x=(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ вещественных чисел x_k, у которых

$$\|x\| = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p} < +\infty.$$

Число $\|x\|$ называется *нормой* элемента $x \in l_p$. Так же, как выше для l_2, вводится понятие суммы $x+y$ двух элементов l_p и произведения kx элемента $x \in l_p$ на число k.

Норма обладает уже привычными нам свойствами:

I. $\|x\| \geqslant 0$, причем $\|x\|=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$. [1])

II. $\|kx\| = |k| \cdot \|x\|$ и, в частности, $\|-x\| = \|x\|$.

III. $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Первые два из этих свойств очевидны, а третье вытекает из (9). [2])

При помощи понятия нормы вводятся понятия предела последовательности элементов l_p, сходимости в себе, всюду плотного в l_p множества и т. п. Можно доказать, что предел последовательности элементов l_p единствен, что норма непрерывна, что пространство l_p обладает свойством полноты, но мы не будем останавливаться на этом.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VII

1. Пусть $\{f_n(x)\}$ есть последовательность функций из L_2, сходящаяся по мере к $F(x)$. Если $\|f_n\| \leqslant K$, то последовательность $\{f_n(x)\}$ слабо сходится к $F(x)$ (Ф. Рисс).

2. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ слабо сходится в L_2 к $F(x)$, то $\|f_n\| \leqslant K$ (А. Лебег).

3. Из слабой сходимости в L_2 последовательности $\{f_n(x)\}$ к $F(x)$ не следует сходимости по мере.

4. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ слабо сходится в L_2 к $F(x)$ и, кроме того, $\|f_n\| \to \|F\|$, то последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $F(x)$ в среднем (Ф. Рисс).

---

[1]) Это означает, что $x=(0, 0, 0, \ldots)$.

[2]) В неравенстве (9) мы имеем дело с конечными суммами, но с помощью предельного перехода это неравенство обобщается и на суммы бесконечных рядов.

5. Если интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ существует при всякой $f(x) \in L_2$, то $g(x) \in L_2$ (А. Лебег).

6. Всякая ортонормальная система разве лишь счетна.

7. Если $\{\omega_k(x)\}$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ есть замкнутая ортонормальная система, то почти везде на $[a, b]$ будет $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega_k^2(x) = +\infty$ (В. Орлич).

8. При тех же условиях для любого измеримого множества e с мерой $me > 0$ будет $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_e \omega_k^2\,dx = +\infty$ (В. Орлич).

9. Конечная система функций не может быть полной в L_2.

10. Пусть $\{\omega_k(x)\}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ ортонормальная система и $f(x) \in L_2$. Из всех линейных комбинаций $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \omega_k(x)$ наименьшее значение норме разности $\left\| f - \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \omega_k \right\|$ доставляет та, у которой $A_k = (f, \omega_k)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ (А. Тёплер).

11. Пусть $\{\omega_k(x)\}$ полная ортонормальная система функций. Если $\{\varphi_k(x)\}$ такая система функций из L_2, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^b [\omega_k(x) - \varphi_k(x)]^2\,dx < 1$, то система $\{\varphi_k(x)\}$ также полна (Н. К. Бари).

12. Пусть на $[-\pi, \pi)$ задана функция $f(x) \in L_2$, положим $f(x+2\pi) = f(x)$ и пусть

$$g_n(x) = \int\limits_{1/n}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\,dt.$$

Функции $g_n(x)$ сходятся в среднем на $[-\pi, \pi]$ к функции $q(x) \in L_2$, причем

$$\|q\| \leqslant \|f\| \cdot \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

и множителя при $\|f\|$ снизить нельзя (И. П. Натансон).

13. Пусть $f(x) \in L_2$ на $[a, b]$ и $f(x) = 0$ вне $[a, b]$. Если

$$\varphi(x) = \frac{1}{2h} \int\limits_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt,$$

то $\|\varphi\| \leqslant \|f\|$ (А. Н. Колмогоров).

14. В тех же обозначениях, при $h \to 0$ функции $\varphi(x)$ сходятся в среднем в L_2 к $f(x)$ (А. Н. Колмогоров).

15. Перенести результаты упражнений 1, 2, 3, 4, 5, 13 и 14 с L_2 на L_p при $p > 1$.

16. Доказать полноту пространства L_p при $p \geqslant 1$.

17. Доказать полноту пространства l_p при $p \geqslant 1$.

18. Доказать полноту пространства m всех *ограниченных* последовательностей $x = \{x_k\}$, $\|x\| = \sup\{|x_k|\} < +\infty$.

19. Если во множестве C всех непрерывных на $[a, b]$ функций ввести норму $\|f\| = \max|f(x)|$, то полученное пространство будет обладать свойством полноты.

20. Система функций $\{\varphi_k(x)\}$ называется *полной* в классе функций A, если в последнем нет отличной от нуля функции, ортогональной ко всем $\varphi_k(x)$. Из полноты ортонормальной системы в классе (R) всех интегрируемых по Риману функций не следует замкнутости этой системы (Г. М. Фихтенгольц).

21. Если $1 \leqslant r < p$, то $L_p \subset L_r$.

22. Если $1 \leqslant r < p$, то $l_p \supset l_r$.

23. Пусть $\{f_n(x)\} \subset L_p$ $(p > 1)$ последовательность функций, сходящаяся в среднем порядка p к функции $F(x) \in L_p$. Показать, что $\{f_n(x)\}$ сходится к $F(x)$ также и в среднем порядка r, где $1 \leqslant r < p$.

24. Пусть $1 \leqslant r < p$ и $x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \ldots) \in l_r$. Если x_n стремится к элементу x в пространстве l_r, то это имеет место также и в пространстве l_p.

25. Если последовательность $\{a_k)$ такова, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ сходится для всякой последовательности $\{x_k\} \in l_p$ $(p > 1)$, то $\{a_k\} \in l_q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

26. Если последовательность $\{a_k\}$ такова, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ сходится для всякой последовательности $\{x_k\} \in l = l_1$, то $\{a_k\} \in m$, т. е. $\sup\{|a_k|\} < +\infty$.

27. Если $p > 1$ и в неравенстве Минковского (5) стоит знак равенства, то $g(x) = K f(x)$, где $K \geqslant 0$.

ГЛАВА VIII

ФУНКЦИИ С КОНЕЧНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ. ИНТЕГРАЛ СТИЛТЬЕСА

§ 1. Монотонные функции

Как известно, функция $f(x)$, заданная на сегменте $[a, b]$, называется *возрастающей*, если из

$$x < y, \tag{1}$$

вытекает

$$f(x) \leqslant f(y).$$

Если из (1) следует $f(x) < f(y)$, то говорят, что $f(x)$ есть *строго возрастающая* функция. Аналогично, функция $f(x)$ называется *убывающей* (*строго убывающей*), если из (1) следует $f(x) \geqslant f(y)$ $[f(x) > f(y)]$. Функции возрастающие и убывающие называются *монотонными (строго монотонными)*. Если функция $f(x)$ убывает, то $-f(x)$ возрастает. Это простое замечание позволит нам рассматривать только возрастающие функции. Отметим, наконец, что, говоря о монотонной функции, мы **всегда** будем считать ее *конечной*.

Пусть $f(x)$ — возрастающая функция, заданная на сегменте $[a, b]$, и пусть $a \leqslant x_0 < b$.

В курсе Анализа доказывается, что какую бы последовательность точек $x_1, x_2, x_3, \ldots$, стремящуюся к x_0 и расположенную правее x_0, $x_n \to x_0$, $x_n > x_0$ ни взять, существует конечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$. Этот предел есть не что иное, как $\inf \{f(x)\}$ $(x_0 < x \leqslant b)$, и потому он не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$. Обозначают его через $f(x_0 + 0)$.

Аналогично определяется символ $f(x_0 - 0)$ $(a < x_0 \leqslant b)$.

Легко видеть, что

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0) \quad (a < x_0 < b),$$
$$f(a) \leqslant f(a + 0), \quad f(b - 0) \leqslant f(b).$$

Отсюда следует, что для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы было

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x + 0).$$

[Если x_0 совпадает с a или с b, то нужно говорить лишь об одностороннем пределе $f(a + 0)$ или $f(b - 0)$].

Числа $f(x_0)-f(x_0-0)$; $f(x_0+0)-f(x_0)$ называются, соответственно, *скачками* слева и справа функции $f(x)$ в точке x_0, а сумма их $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется просто скачком функции $f(x)$ в этой точке (для точек a и b рассматриваются только односторонние скачки).

Лемма. *Пусть на сегменте $[a, b]$ задана возрастающая функция $f(x)$. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ произвольные точки, лежащие внутри $[a, b]$, то*

$$[f(a+0)-f(a)]+\sum_{k=1}^{n}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+[f(b)-f(b-0)]\leqslant \leqslant f(b)-f(a). \qquad (2)$$

Доказательство. Можно считать, что

$$a<x_1<x_2<\ldots<x_n<b.$$

Положим $a=x_0$, $b=x_{n+1}$ и введем в рассмотрение точки y_0, $y_1, \ldots, y_n$, где $x_k<y_k<x_{k+1}$ $(k=0, 1, \ldots, n)$.

Тогда

$$f(x_k+0)-f(x_k-0)\leqslant f(y_k)-f(y_{k-1}) \quad (k=1, 2, \ldots, n),$$
$$f(a+0)-f(a)\leqslant f(y_1)-f(a),$$
$$f(b)-f(b-0)\leqslant f(b)-f(y_n).$$

Складывая все эти неравенства, мы и получаем (2).

Следствие. *Возрастающая функция $f(x)$, заданная на сегменте $[a, b]$, может иметь лишь конечное число точек разрыва, в которых ее скачок больше данного положительного числа σ.*

В самом деле, если лежащие внутри $[a, b]$ точки $x_1, \ldots, x_n$ суть точки разрыва со скачком бо́льшим, чем σ, то из (2) следует, что $n\sigma\leqslant f(b)-f(a)$ и, стало быть, n не может быть сколь угодно большим.

Теорема 1. *Множество точек разрыва функции $f(x)$, возрастающей на сегменте $[a, b]$, разве лишь счетно. Если $x_1, x_2, x_3, \ldots$ суть все внутренние точки разрыва, то*

$$[f(a+0)-f(a)]+\sum_{k=1}^{\infty}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+[f(b)-f(b-0)]\leqslant \leqslant f(b)-f(a). \qquad (3)$$

Доказательство. Обозначим через H множество всех точек разрыва функции $f(x)$, а через H_k множество тех точек разрыва этой функции, в которых ее скачок больше, чем $1/k$. Очевидно, $H=H_1+H_2+H_3+\ldots$, и счетность H вытекает из конечности каждого H_k.

Неравенство (3) следует из (2) с помощью предельного перехода.

Пусть $f(x)$ функция возрастающая на сегменте $[a, b]$. Введем функцию $s(x)$, полагая

$$s(a) = 0,$$
$$s(x) = [f(a+0) - f(a)] + \sum_{x_k < x} [f(x_k + 0) - f(x_k - 0)] + [f(x) - f(x-0)] \qquad (a < x \leqslant b).$$

Эта функция носит название *функции скачков* функции $f(x)$. Ясно, что это тоже возрастающая функция.

Теорема 2. *Разность* $\varphi(x) = f(x) - s(x)$ *между возрастающей функцией и ее функцией скачков есть возрастающая и непрерывная функция.*

Доказательство. Пусть $a \leqslant x < y \leqslant b$. Если неравенство (3) применить к сегменту $[x, y]$ вместо сегмента $[a, b]$, то мы получим неравенство

$$s(y) - s(x) \leqslant f(y) - f(x), \tag{4}$$

откуда $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$ и функция $\varphi(x)$ оказывается возрастающей.

Далее, если в неравенстве (4) заставить y стремиться к x, то в пределе мы получим, что

$$s(x+0) - s(x) \leqslant f(x+0) - f(x). \tag{5}$$

С другой стороны, из самого определения функции $s(x)$ следует, что при $x < y$ будет $f(x+0) - f(x) \leqslant s(y) - s(x)$, откуда, в пределе при $y \to x$,

$$f(x+0) - f(x) \leqslant s(x+0) - s(x).$$

Отсюда и из (5) ясно, что $f(x+0) - f(x) = s(x+0) - s(x)$, и, стало быть,

$$\varphi(x+0) = \varphi(x).$$

Аналогично мы убедимся, что $\varphi(x-0) = \varphi(x)$.

§ 2. Отображение множеств. Дифференцирование монотонной функции

Пусть на каком-нибудь множестве A задана функция $f(x)$.

Эта функция всякому множеству $E \subset A$ соотносит множество $f(E)$, состоящее из всех точек $f(x)$, где $x \in E$. Иначе говоря, $f(E)$ состоит из всех таких и только таких точек y, для которых в множестве E найдется корень x уравнения $f(x) = y$.

Множество $f(E)$ называется *образом* множества E, а последнее называется *прообразом* множества $f(E)$. Операция перехода от множества E к множеству $f(E)$ называется *отображением* E на $f(E)$.

Теорема 1. Если

$$1)\ E_1 \subset E_2; \qquad 2)\ E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n,$$

то, соответственно,

$$1)\ f(E_1) \subset f(E_2); \quad 2)\ f(E) = \sum_{n=1}^{\infty} f(E_n).$$

Эта теорема очевидна.

Особенно простой оказывается теория отображений в том случае, когда отображающая функция устанавливает *взаимно однозначное* соответствие между множествами A и $f(A)$. Тогда существует и обратная функция $x = g(y)$, заданная на множестве $f(A)$ и имеющая значения, лежащие в множестве A. Легко понять, что в указанном случае будет

$$f\left(\prod_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \prod_{n=1}^{\infty} f(E_n)$$

и, в частности, если множества E_1 и E_2 не пересекаются, то не пересекаются и их образы $f(E_1)$ и $f(E_2)$.

В качестве примера такого «хорошего» отображения можно указать на отображение, даваемое непрерывной, строго возрастающей функцией $f(x)$, заданной на сегменте $A=[a, b]$. В этом случае $f(A)=[f(a), f(b)]$.

Понятие отображения очень полезно при изучении дифференцирования функций.

Определение. Число λ (конечное или бесконечное) называется *производным числом функции* $f(x)$ *в точке* x_0, если существует такая стремящаяся к нулю последовательность $h_1, h_2, h_3, \ldots$ $(h_n \neq 0)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} = \lambda.$$

То обстоятельство, что λ есть производное число функции $f(x)$ в точке x_0, мы будем записывать так: $\lambda = Df(x_0)$.

Если в точке x_0 существует (конечная или бесконечная) производная $f'(x_0)$, то она и будет производным числом $Df(x_0)$, причем в этом случае никаких других производных чисел в точке x_0 у функции $f(x)$ нет.

В качестве другого примера рассмотрим функцию Дирихле $\psi(x)$, которая равна нулю при иррациональных значениях x и равна единице, когда x рационально.

Предположим, что x_0 число рациональное. Тогда отношение

$$\frac{\psi(x_0+h)-\psi(x_0)}{h}$$

равно нулю для рациональных h и равно $-1/h$, когда h иррационально. Отсюда следует, что в точке x_0 у функции $\psi(x)$ есть 3 производных числа: $-\infty$, 0 и $+\infty$. Легко проверить, что других производных чисел у $\psi(x)$ в точке x_0 нет. Так же обстоит дело и тогда, когда x_0 иррационально.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ задана на сегменте $[a, b]$, то в каждой его точке существуют производные числа.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in [a, b]$ и $\{h_n\}$ $(h_n \neq 0)$ такая стремящаяся к нулю последовательность, что $x_0 + h_n \in [a, b]$. Положим $\sigma_n = \frac{f(x_0+h_n) - f(x_0)}{h_n}$. Если последовательность $\{\sigma_n\}$ ограничена, то, по теореме Больцано — Вейерштрасса, из нее выделяется подпоследовательность $\{\sigma_{n_k}\}$, имеющая некоторый предел λ, который и будет производным числом функции $f(x)$ в точке x_0, $\lambda = Df(x_0)$. Если же последовательность $\{\sigma_n\}$ неограничена, например, сверху, то из нее выделяется подпоследовательность $\{\sigma_{n_k}\}$, стремящаяся к $+\infty$. В этом случае $+\infty = Df(x_0)$.

Теорема 3. *Для того чтобы функция $f(x)$, заданная на сегменте $[a, b]$, имела в точке $x_0 \in [a, b]$ обыкновенную производную $f'(x_0)$, необходимо и достаточно, чтобы все производные числа в этой точке были равны друг другу.*

Необходимость условия, уже отмеченная выше, совершенно тривиальна. Допустим, что оно выполнено и пусть λ есть общее значение всех производных чисел в точке x_0. Существование обыкновенной производной $f'(x_0)$ будет доказано, если мы установим, что для всякой стремящейся к нулю последовательности $\{h_n\}$ $(h_n \neq 0)$ будет

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_0+h_n) - f(x_0)}{h_n} = \lambda.$$

Допустим, что это не так. Тогда найдется хотя бы одна такая последовательность $\{h_n\}$ $(h_n \to 0,\ h_n \neq 0)$, что отношение

$$\sigma_n = \frac{f(x_0+h_n) - f(x_0)}{h_n}$$

не стремится к λ. Но это означает [мы будем считать, что $-\infty < \lambda < +\infty$; если $\lambda = \pm\infty$, то рассуждение только упростится] существование такого $\varepsilon > 0$, что бесконечное множество из чисел σ_n лежит вне интервала $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$. Это бесконечное множество будет содержать в себе последовательность $\{\sigma_{n_k}\}$, стремящуюся к некоторому конечному или бесконечному пределу μ, который будет отличным от λ производным числом функции $f(x)$ в точке x_0, а существование такого производного числа противоречит условию.

Лемма 1. *Если функция $f(x)$ возрастает на сегменте $[a, b]$, то все ее производные числа неотрицательны.*

Эта лемма очевидна.

Лемма 2. *Пусть на* $[a, b]$ *задана строго возрастающая функция* $f(x)$. *Если в каждой точке множества* $E \subset [a, b]$ *существует хотя бы одно производное число* $Df(x)$, *такое, что*

$$Df(x) \leqslant p \qquad (0 \leqslant p < +\infty),$$

то

$$m^* f(E) \leqslant p \cdot m^* E.$$

Доказательство. Возьмем какое-нибудь $\varepsilon > 0$ и построим такое открытое ограниченное множество G, что

$$E \subset G, \quad mG < m^* E + \varepsilon.$$

Пусть, далее, $p_0 > p$. Если $x_0 \in E$, то существует стремящаяся к нулю последовательность $\{h_n\}$ такая, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = Df(x_0) \leqslant p.$$

В таком случае при всех достаточно больших n сегмент[1] $[x_0, x_0 + h_n]$ будет целиком содержаться в множестве G. Кроме того, при всех достаточно больших n будет

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} < p_0.$$

Мы будем считать, что оба эти обстоятельства имеют место при всех n. Введем в рассмотрение сегменты

$$d_n(x_0) = [x_0, x_0 + h_n], \quad \Delta_n(x_0) = [f(x_0), \quad f(x_0 + h_n)].$$

Так как функция $f(x)$ возрастает, то очевидно, что

$$f[d_n(x_0)] \subset \Delta_n(x_0).$$

Длинами этих сегментов являются числа

$$md_n(x_0) = |h_n|, \quad m\Delta_n(x_0) = |f(x_0 + h_n) - f(x_0)|.$$

Поэтому $m\Delta_n(x_0) < p_0 md_n(x_0)$. Но $h_n \to 0$, значит среди сегментов $\Delta_n(x_0)$ имеются сколь угодно короткие. Так как образ $f(E)$ множества E состоит из точек $f(x_0)$, входящих в сегменты $\Delta_n(x_0)$, то $f(E)$ покрыто всеми сегментами $\Delta_n(x)$ (где $x \in E$) в смысле Витали.[2] Но тогда можно выбрать из множества этих сегментов счетную последовательность попарно не пересекающихся сегментов $\{\Delta_{n_i}(x_i)\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ такую, что

$$m\left[f(E) - \sum_{i=1}^{\infty} \Delta_{n_i}(x_i)\right] = 0.$$

---

[1]) Мы приспособили запись к случаю $h_n > 0$. Если $h_n < 0$, то надо было бы писать $[x_0 + h_n, x_0]$. Впрочем, можно условиться обозначать через $[\alpha, \beta]$ множество чисел, лежащих *между* α и β независимо от того, будет ли $\alpha \leqslant \beta$ или $\alpha > \beta$.

[2]) Здесь именно и использовано то, что $f(x)$ возрастает строго. Действительно, иначе некоторые сегменты $\Delta_n(x)$ могли бы выродиться в точки и нельзя было бы применить теорему Витали.

Ясно, что $m^*f(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m\Delta_{n_i}(x_i) < p_0 \sum_{i=1}^{\infty} md_{n_i}(x_i)$.

Заметим теперь, что не только сегменты $\Delta_{n_i}(x_i)$, но и сегменты $d_{ni}(x_i)$ также попарно не пересекаются.[1] Поэтому

$$\sum_{i=1}^{\infty} md_{n_i}(x_i) = m\left[\sum_{i=1}^{\infty} d_{n_i}(x_i)\right].$$

А так как $\sum_{i=1}^{\infty} d_{n_i}(x_i) \subset G$, то $m^*f(E) < p_0 mG < p_0[m^*E + \varepsilon]$.

Устремляя ε к нулю, а p_0 к p и переходя к пределу, завершаем доказательство.

Сходным образом, хотя технически и несколько сложнее, доказывается

Лемма 3. *Пусть на $[a, b]$ задана строго возрастающая функция $f(x)$. Если в каждой точке множества $E \subset [a, b]$ существует хотя бы одно производное число $Df(x)$, такое, что*

$$Df(x) \geqslant q \qquad (0 \leqslant q < +\infty),$$

то

$$m^*f(E) \geqslant qm^*E.$$

Лемма тривиальна, если $q = 0$. Пусть же $q > 0$. Обозначим через q_0 какое-нибудь положительное число, меньшее чем q, $q_0 < q$, и пусть $\varepsilon > 0$. Найдем такое открытое ограниченное множество G, что[2]

$$G \supset f(E), \quad mG < m^*f(E) + \varepsilon.$$

Обозначим через S множество тех точек x из E, в которых функция $f(x)$ непрерывна. Множество $E - S$ разве лишь счетно, ибо у монотонной функции может быть разве лишь счетное множество точек разрыва.

Если $x_0 \in E$, то найдется последовательность $\{h_n\}$, для которой

$$h_n \to 0, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = Df(x_0) \geqslant q.$$

Мы будем считать, что при всех n

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} > q_0.$$

Поэтому, вводя, как и выше, сегменты

$$d_n(x_0) = [x_0, x_0 + h_n], \quad \Delta_n(x_0) = [f(x_0), f(x_0 + h_n)],$$

мы будем иметь

$$m\Delta_n(x_0) > q_0 md_n(x_0).$$

---

[1]) Действительно, если бы точка z входила в пересечение $d_{n_i}(x_i) \cdot d_{n_k}(x_k)$, то $f(z)$ входила в пересечение $\Delta_{n_i}(x_i) \cdot \Delta_{n_k}(x_k)$.

[2]) Полезно отметить, что множество $f(E)$ ограничено, ибо содержится в сегменте $[f(a), f(b)]$.

Если $x_0 \in S$, то при достаточно больших n весь сегмент $[f(x_0), f(x_0+h_n)]$ будет целиком содержаться в множестве G. Мы будем считать это выполненным при всех n.

Множество S покрыто сегментами $d_n(x)$ (где $x \in S$) в смысле Витали. Значит, из множества этих сегментов можно выбрать счетную последовательность попарно не пересекающихся сегментов $\{d_{n_i}(x_i)\}$ такого рода, что $m\left[S - \sum_{i=1}^{\infty} d_{n_i}(x_i)\right] = 0$. Но тогда

$$m^*S \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} md_{n_i}(x_i) < \frac{1}{q_0} \sum_{i=1}^{\infty} m\Delta_{n_i}(x_i).$$

Но сегменты $\Delta_{n_i}(x_i)$, так же как и $d_{n_i}(x_i)$, попарно не пересекаются [здесь, именно, и использовано условие строгого возрастания $f(x)$]. Значит,

$$\sum_{i=1}^{\infty} m\Delta_{n_i}(x_i) = m\left[\sum_{i=1}^{\infty} \Delta_{n_i}(x_i)\right] \leqslant mG < m^*f(E) + \varepsilon.$$

Таким образом, $m^*S < \frac{1}{q_0}[m^*f(E) + \varepsilon]$, откуда, устремляя ε к нулю, а q_0 к q и переходя к пределу, мы находим $m^*f(E) \geqslant qm^*S$. Но $m^*E \leqslant m^*S + m^*(E - S) = m^*S$, откуда и следует лемма.

Следствие. *Множество точек, в которых хоть одно производное число возрастающей функции $f(x)$ бесконечно, имеет меру нуль.*

Действительно, пусть сначала функция $f(x)$ строго возрастает. Если бы было $m^*E(Df(x) = +\infty) > 0$, то образ этого множества должен был бы иметь бесконечную внешнюю меру, что нелепо, ибо этот образ лежит в сегменте $[f(a), f(b)]$. Итак, для строго возрастающей функции наше утверждение доказано.

Если $f(x)$ возрастает не строго, то мы положим $g(x) = f(x) + x$. Это уже строго возрастающая функция. Но

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + 1.$$

Значит, множество точек, где хоть одно $Df(x) = +\infty$, совпадает с таким же множеством для $g(x)$ и потому имеет меру нуль.

Лемма 4. *Пусть $f(x)$ возрастающая функция, заданная на сегменте $[a, b]$, а p и q два числа, причем $p < q$. Если в каждой точке множества $E_{p,q} \subset [a, b]$ существуют два таких производных числа $D_1f(x)$ и $D_2f(x)$, что*

$$D_1f(x) < p < q < D_2f(x),$$

то $mE_{p,q} = 0$.

В самом деле, допустим сначала, что $f(x)$ возрастает строго. Тогда к ней можно применить обе леммы 2 и 3, согласно которым $m^*f(E_{p,q}) \leqslant pm^*E_{p,q}$, $m^*f(E_{p,q}) \geqslant qm^*E_{p,q}$, откуда $qm^*E_{p,q} \leqslant pm^*E_{p,q}$ и $m^*E_{p,q} = 0$.

Если же $f(x)$ возрастает не строго, то, как и выше, полагаем $g(x)=f(x)+x$ и применяем уже доказанную часть леммы к $g(x)$ (с заменой p и q на $p+1$ и $q+1$).

Теперь, наконец, мы можем установить основную в этом параграфе теорему.

Теорема 4. *Если $f(x)$ есть возрастающая*[1]) *функция, заданная на $[a, b]$, то почти во всех точках $[a, b]$ существует конечная производная $f'(x)$.*

Доказательство. Обозначим через E множество тех точек $[a, b]$, где не существует производной $f'(x)$. Если $x_0 \in E$, то найдутся два производных числа $D_1 f(x_0)$ и $D_2 f(x_0)$ не равных между собой, $D_1 f(x_0) < D_2 f(x_0)$. Но тогда можно указать такие рациональные числа p и q, что $D_1 f(x_0) < p < q < D_2 f(x_0)$.

Значит, $E = \sum\limits_{(p, q)} E_{p,q}$, где $E_{p,q}$ — множество тех x из $[a, b]$, в которых существуют два производных числа $D_1 f(x)$ и $D_2 f(x)$, удовлетворяющих неравенствам $D_1 f(x) < p < q < D_2 f(x)$, а суммирование распространено на все пары (p, q) рациональных чисел, в которых $p < q$.

Согласно лемме 4 каждое множество $E_{p,q}$ имеет меру нуль, а так как множеств этих счетное множество, то $mE = 0$.

Таким образом, производная $f'(x)$ существует почти везде на $[a, b]$. Так как обращаться в $+\infty$ она может лишь на множестве меры 0 (следствие леммы 3), то теорема доказана полностью.

Впредь, говоря о производной $f'(x)$ возрастающей функции $f(x)$, мы будем считать, что ее определение пополнено так, что символ $f'(x)$ определен для всех x из $[a, b]$. Для этого условимся раз навсегда полагать $f'(x) = 0$ в тех точках x, где у $f(x)$ нет производной, хотя бы бесконечной.

Теорема 5. *Если $f(x)$ возрастающая функция, заданная на $[a, b]$, то ее производная $f'(x)$ измерима и*

$$\int_a^b f'(x)\,dx \leqslant f(b) - f(a), \tag{*}$$

так что $f'(x)$ суммируема.

Доказательство. Распространим определение функции $f(x)$, полагая $f(x) = f(b)$ при $b < x \leqslant b+1$.

Тогда всюду, где $f'(x)$ есть производная $f(x)$ [кроме, может быть, точки $x = b$, где $f'(b)$ ранее была лишь левосторонней производной] будет $f'(x) = \lim\limits_{n \to \infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right]$.

Значит, $f'(x)$ есть предел почти везде сходящейся последовательности измеримых [2]) функций и, стало быть, $f'(x)$ — функция

[1]) Читатель обратит внимание на то, что непрерывности $f(x)$ не предполагается.

[2]) Функции $f(x)$ и $f\left(x+\frac{1}{n}\right)$ возрастают и, потому измеримы. Действительно, $E(f > c)$ есть или пустое множество, или промежуток.

измеримая. Ввиду того, что она неотрицательна, можно говорить об ее интеграле Лебега $\int_a^b f'(x)\,dx$. По теореме Фату [гл. VI, § 1]

$$\int_a^b f'(x)\,dx \leqslant \sup\left\{n\int_a^b \left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]dx\right\}.$$

Но

$$\int_a^b f\left(x+\frac{1}{n}\right)dx = \int_{a+1/n}^{b+1/n} f(x)\,dx$$

(здесь не потребуется никаких ссылок на теорию замены переменной в лебеговых интегралах, ибо $f(x)$ монотонна и интеграл можно понимать в римановском смысле). Значит:

$$\int_a^b \left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]dx = \int_b^{b+1/n} f(x)\,dx - \int_a^{a+1/n} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{n}f(b) - \int_a^{a+1/n} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{n}[f(b)-f(a)],$$

откуда и следует оценка

$$\int_a^b f'(x)\,dx \leqslant f(b)-f(a).$$

Мы привыкли, что интегрирование производной восстанавливает первообразную. В связи с этим предыдущее неравенство несколько «режет глаз». Однако, в общем случае, его нельзя заменить равенством, даже предполагая функцию $f(x)$ *непрерывной*.

Пример. Пусть P_0 есть канторово совершенное множество. Его дополнительные интервалы можно распределить на группы, относя в первую группу интервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, во вторую — оба интервала $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, в третью — четыре интервала $\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)$, $\left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right)$, $\left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right)$, $\left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$ и т. д. В n-й группе будет 2^{n-1} интервалов.

Введем функцию $\Theta(x)$, полагая $\Theta(x)=\frac{1}{2}$ при $x\in\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\Theta(x)=\frac{1}{4}$ при $x\in\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ $\Theta(x)=\frac{3}{4}$ при $x\in\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$.

В четырех интервалах третьей группы функция $\Theta(x)$ равна последовательно $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$. И вообще на 2^{n-1} интервалах n-й группы полагаем функцию $\Theta(x)$ последовательно равной

$$\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \frac{5}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}.$$

Функция $\Theta(x)$ задана на канторовом открытом множестве G_0. Она постоянна на каждом составляющем интервале этого множества и является возрастающей функцией на множестве G_0 в целом. [1]) Дополним определение функции $\Theta(x)$, задав ее на точках множества P_0. Для этого положим $\Theta(0)=0$, $\Theta(1)=1$.

В тех же точках $x_0 \in P_0$, которые лежат между 0 и 1, положим

$$\Theta(x_0)=\sup\{\Theta(x)\} \qquad (x \in G_0,\ x < x_0).$$

Легко видеть, что это определение сохраняет монотонность функции $\Theta(x)$, которая теперь задана на всем сегменте $[0, 1]$.

Установив монотонность $\Theta(x)$, мы легко докажем, что эта функция непрерывна. Это вытекает из того факта, что множество значений, принимаемых функцией $\Theta(x)$ на множестве G_0, всюду плотно на сегменте $[0, 1]$ [действительно, если возрастающая функция $f(x)$ имеет точку разрыва x_0, то хоть один из интервалов $(f(x_0-0), f(x_0))$ и $(f(x_0), f(x_0+0))$ свободен от значений функции].

Итак, $\Theta(x)$ — непрерывная возрастающая функция. Вместе с тем, почти везде на $[0, 1]$ будет $\Theta'(x)=0$ (это соотношение заведомо выполняется в каждой из точек множества G_0). Значит,

$$\int_0^1 \Theta'(x)\,dx=0<1=\Theta(1)-\Theta(0).$$

Ниже мы установим условия того, чтобы в (*) стоял знак равенства.

В заключение докажем полезную во многих вопросах теорему.

Теорема 6. *Какое бы множество E меры нуль в сегменте $[a, b]$ ни взять, существует такая непрерывная возрастающая функция $\sigma(x)$, что во всех точках $x \in E$ будет $\sigma'(x)=+\infty$.*

Доказательство. Построим для каждого натурального числа n такое ограниченное открытое множество G_n, что

$$G_n \supset E, \qquad mG_n < \frac{1}{2^n}.$$

Положим $\psi_n(x)=m\{G_n[a, x]\}$. Функция $\psi(x)$ возрастает, неотрицательна, непрерывна и удовлетворяет неравенству $\psi_n(x) < 1/2^n$.

Поэтому функция $\sigma(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)$ также неотрицательная возрастающая и непрерывная.

Если $x_0 \in E$, то при достаточно малом $|h|$ весь сегмент $[x_0, x_0+h]$ целиком содержится в множестве G_n [при закрепленном n]. При таком h (считая для простоты $h>0$) мы будем иметь

$$\psi_n(x_0+h)=m\{G_n\cdot[a, x_0]+G_n\cdot(x_0, x_0+h]\}=\psi_n(x_0)+h,$$

откуда

$$\frac{\psi_n(x_0+h)-\psi_n(x_0)}{h}=1.$$

---

[1]) В этом проще всего убедиться индуктивно. Представляем читателю провести подробное доказательство.

Но тогда, каково бы ни было натуральное число N, при достаточно малом $|h|$ окажется

$$\frac{\sigma(x_0+h)-\sigma(x_0)}{h} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{\psi_n(x_0+h)-\psi_n(x_0)}{h} = N,$$

так что

$$\sigma'(x_0) = +\infty.$$

Теорема доказана.

§ 3. Функции с конечным изменением

В этом параграфе мы изложим теорию важного класса функций — функций *с конечным изменением*, тесно связанных с монотонными функциями.

Пусть на сегменте $[a, b]$ задана конечная функция $f(x)$. Разложим $[a, b]$ на части точками $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ и составим сумму $V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$.

Определение 1. Точная верхняя граница множества всевозможных сумм V называется *полным изменением* [1]) *функции* $f(x)$ *на сегменте* $[a, b]$ и обозначается через $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$. Если

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) < +\infty,$$

то говорят, что $f(x)$ есть *функция с конечным изменением* [2]) *на* $[a, b]$ или, что $f(x)$ *имеет на* $[a, b]$ *конечное изменение.*

Теорема 1. *Монотонная функция есть функция с конечным изменением.*

Достаточно доказать эту теорему для возрастающей функции. Если $f(x)$ возрастает на $[a, b]$, то все разности $f(x_{k+1}) - f(x_k)$ неотрицательны и $V = \sum_{k=0}^{n-1} \{f(x_{k+1}) - f(x_k)\} = f(b) - f(a)$, откуда и следует теорема.

Другим примером функций с конечным изменением являются функции, удовлетворяющие «условию Липшица»:

Определение 2. Конечная функция $f(x)$, заданная на сегменте $[a, b]$, *удовлетворяет условию Липшица*, если существует такая постоянная K, что для любых двух точек x и y из $[a, b]$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|.$$

Если функция $f(x)$ в каждой точке $[a, b]$ имеет производную $f'(x)$ и последняя ограничена, то, как это видно из формулы

---

[1]) Или *полной вариацией*.

[2]) Или *функция ограниченной вариации*.

Лагранжа

$$f(x)-f(y)=f'(z)(x-y) \quad (x<z<y),$$

функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица.

Если $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то

$$|f(x_{k+1})-f(x_k)| \leqslant K(x_{k+1}-x_k),$$

откуда

$$V \leqslant K(b-a)$$

и, стало быть, $f(x)$ есть функция с конечным изменением.

Примером непрерывной функции с *бесконечным* полным изменением служит функция

$$f(x)=x\cos\frac{\pi}{2x} \quad (0<x\leqslant 1,\ f(0)=0).$$

Если за точки деления сегмента $[0, 1]$ принять точки

$$0<\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n-1}<\ldots<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1,$$

то легко проверить, что

$$V=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}, \text{ откуда } \bigvee_0^1(f)=+\infty.$$

Теорема 2. *Всякая функция с конечным изменением ограничена.*

В самом деле, при $a\leqslant x\leqslant b$

$$V=|f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)| \leqslant \bigvee_a^b(f),$$

откуда

$$|f(x)| \leqslant |f(a)|+\bigvee_a^b(f).$$

Теорема 3. *Сумма, разность и произведение двух функций с конечным изменением суть функции с конечным изменением.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ суть функции с конечным изменением на сегменте $[a, b]$ и $s(x)$ их сумма. Тогда

$$|s(x_{k+1})-s(x_k)| \leqslant |f(x_{k+1})-f(x_k)|+|g(x_{k+1})-g(x_k)|,$$

откуда следует, что $\bigvee_a^b(s) \leqslant \bigvee_a^b(f)+\bigvee_a^b(g)$ и $s(x)$ есть функция с конечным изменением. Для разности доказательство аналогично.

Пусть далее $p(x)=f(x)g(x)$. Положим $A=\sup\{|f(x)|\}$, $B=\sup\{|g(x)|\}$.

Тогда

$$|p(x_{k+1})-p(x_k)| \leqslant |f(x_{k+1})g(x_{k+1})-f(x_k)g(x_{k+1})|+$$
$$+|f(x_k)g(x_{k+1})-f(x_k)g(x_k)| \leqslant B|f(x_{k+1})-f(x_k)|+$$
$$+A|g(x_{k+1})-g(x_k)|,$$

откуда

$$\mathop{\mathrm{V}}_a^b(p) \leqslant B \mathop{\mathrm{V}}_a^b(f) + A \mathop{\mathrm{V}}_a^b(g),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Если $f(x)$ и $g(x)$ суть функции с конечным изменением и, сверх того, $g(x) \geqslant \sigma > 0$, то частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ есть функция с конечным изменением.*

Доказательство предоставляем читателю.

Теорема 5. *Пусть на $[a, b]$ задана конечная функция $f(x)$ и $a < c < b$. Тогда*

$$\mathop{\mathrm{V}}_a^b(f) = \mathop{\mathrm{V}}_a^c(f) + \mathop{\mathrm{V}}_c^b(f). \qquad (1)$$

Доказательство. Разложим на части каждый из сегментов $[a, c]$ и $[c, b]$ точками

$$y_0 = a < y_1 < \ldots < y_m = c; \quad z_0 = c < z_1 < \ldots < z_n = b$$

и составим суммы

$$V_1 = \sum_{k=0}^{m-1} |f(y_{k+1}) - f(y_k)|, \quad V_2 = \sum_{k=0}^{n-1} |f(z_{k+1}) - f(z_k)|.$$

Точки $\{y_k\}$ и $\{z_k\}$ дробят на части весь сегмент $[a, b]$. Если назвать через V сумму, отвечающую этому способу дробления, то $V = V_1 + V_2$.

Отсюда сразу следует, что $V_1 + V_2 \leqslant \mathop{\mathrm{V}}_a^b(f)$, а, стало быть, и неравенство

$$\mathop{\mathrm{V}}_a^c(f) + \mathop{\mathrm{V}}_c^b(f) \leqslant \mathop{\mathrm{V}}_a^b(f). \qquad (2)$$

Теперь разобьем на части сегмент $[a, b]$ точками

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

озаботившись при этом включить точку c в число точек деления. Если $c = x_m$, то сумма V, отвечающая нашему способу деления, имеет вид $V = \sum_{k=0}^{m-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + \sum_{k=m}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$ или, короче, $V = V_1 + V_2$, где V_1 и V_2 суть суммы, отвечающие сегментам $[a, c]$ и $[c, b]$.

Отсюда

$$V \leqslant \mathop{\mathrm{V}}_a^c(f) + \mathop{\mathrm{V}}_c^b(f). \qquad (3)$$

Это неравенство установлено пока лишь для сумм V, отвечающих таким способам дробления, при которых точка c включена в число точек деления. Но так как добавление новых точек деления, очевидно, не уменьшает сумм V, то (3) верно для всех вообще сумм V. Отсюда ясно, что

$$\mathop{\mathrm{V}}_a^b(f) \leqslant \mathop{\mathrm{V}}_a^c(f) + \mathop{\mathrm{V}}_c^b(f). \tag{4}$$

Сопоставляя (2) и (4), получаем (1).

Следствие 1. *Если в условиях теоремы функция $f(x)$ имеет конечное изменение на сегменте $[a, b]$, то она имеет конечное изменение и на каждом из сегментов $[a, c]$ и $[c, b]$ и обратно.*

Следствие 2. *Если сегмент $[a, b]$ можно разложить на конечное число частей, на каждой из которых функция $f(x)$ монотонна, то $f(x)$ имеет на $[a, b]$ конечное изменение.*

Теорема 6. *Для того чтобы функция $f(x)$ была функцией с конечным изменением, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в форме разности двух возрастающих функций.*

Доказательство. Достаточность условия следует из теорем 1 и 3.

Для доказательства его необходимости положим

$$\pi(x) = \mathop{\mathrm{V}}_a^x(f) \quad (a < x \leqslant b), \ \pi(a) = 0.$$

Функция $\pi(x)$ возрастает в силу теоремы 5. Если мы положим

$$\nu(x) = \pi(x) - f(x), \tag{5}$$

то функция $\nu(x)$ также окажется возрастающей. В самом деле, если $a \leqslant x < y \leqslant b$, то в силу теоремы 5,

$$\nu(y) = \pi(y) - f(y) = \pi(x) + \mathop{\mathrm{V}}_x^y(f) - f(y)$$

и, стало быть,

$$\nu(y) - \nu(x) = \mathop{\mathrm{V}}_x^y(f) - [f(y) - f(x)].$$

Однако из самого определения полного изменения ясно, что

$$f(y) - f(x) \leqslant \mathop{\mathrm{V}}_x^y(f), \text{ так что } \nu(y) - \nu(x) \geqslant 0,$$

и функция $\nu(x)$ возрастает. Остается переписать равенство (5) в форме $f(x) = \pi(x) - \nu(x)$, чтобы получить искомое представление $f(x)$.

Следствие 1. *Если функция $f(x)$ имеет конечное изменение на $[a, b]$, то почти в каждой точке $[a, b]$ существует конечная производная $f'(x)$, являющаяся суммируемой функцией.*

Следствие 2. *Множество точек разрыва функции с конечным изменением разве лишь счетно. В каждой точке разрыва x_0 существуют оба предела*

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0} f(x) \quad (x>x_0), \quad f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0} f(x) \quad (x<x_0).$$

Пусть последовательность

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots \quad (a<x_n<b) \tag{6}$$

состоит из всех точек, являющихся точками разрыва хоть одной из функций $\pi(x)$ или $\nu(x)$. Введем в рассмотрение функции скачков

$$s_\pi(x)=[\pi(a+0)-\pi(a)]+\sum_{x_k<x}[\pi(x_k+0)-\pi(x_k-0)]+$$
$$+[\pi(x)-\pi(x-0)] \quad (a<x\leqslant b),$$
$$s_\nu(x)=[\nu(a+0)-\nu(a)]+\sum_{x_k<x}[\nu(x_k+0)-\nu(x_k-0)]+$$
$$+[\nu(x)-\nu(x-0)],$$
$$s_\pi(a)=s_\nu(a)=0.$$

(Если точка x_k есть точка непрерывности одной из функций $\pi(x)$ или $\nu(x)$, то соответствующее слагаемое исчезает само собой. Впрочем, можно показать, что точка разрыва функции $\nu(x)$ не может быть точкой непрерывности функции $\pi(x)$; для нас это мало интересно.)

Пусть $s(x)=s_\pi(x)-s_\nu(x)$. Эту функцию можно записать так:

$$s(x)=[f(a+0)-f(a)]+\sum_{x_k<x}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+$$
$$+[f(x)-f(x-0)] \quad (a<x<b),$$
$$s(a)=0.$$

Она также есть функция с конечным изменением и называется функцией скачков функции $f(x)$. Само собою ясно, что определение функции $s(x)$ не изменится, если из последовательности (6) удалить те точки, в которых функция $f(x)$ непрерывна,[1]) так что можно считать, что (6) состоит только из точек разрыва функции $f(x)$.

Мы видели (теорема 2, § 1), что функции $\pi(x)-s_\pi(x)$, $\nu(x)-s_\nu(x)$ непрерывны и возрастают. Отсюда следует, что разность $\varphi(x)=f(x)-s(x)$ есть непрерывная функция с конечным изменением. Иначе говоря, доказана.

Теорема 7. *Всякую функцию с конечным изменением можно представить в форме суммы ее функции скачков и непрерывной функции с конечным изменением.*

---

[1]) Можно показать, что в (6) таких точек не было с самого начала. Читатель усмотрит это из теоремы 1, § 5.

§ 4. Принцип выбора Хелли

В этом параграфе мы изложим важную в приложениях теорему, принадлежащую Э. Хелли.

Сначала докажем две леммы.

Лемма 1. *Пусть на сегменте $[a, b]$ задано бесконечное семейство функций $H=\{f(x)\}$. Если все функции семейства ограничены одним и тем же числом*

$$|f(x)| \leqslant K, \tag{1}$$

то, какое бы счетное множество $E \subset [a, b]$ ни взять, из семейства H можно извлечь последовательность $\{f_n(x)\}$, сходящуюся в каждой точке множества E.

Доказательство. Пусть $E=\{x_k\}$. Рассмотрим множество $\{f(x_1)\}$ значений, принимаемых функциями семейства H в точке x_1. В силу (1) это множество ограничено и, по теореме Больцано — Вейерштрасса, из него выделяется сходящаяся последовательность

$$f_1^{(1)}(x_1),\ f_2^{(1)}(x_1),\ f_3^{(1)}(x_1),\ \ldots;\quad \lim_{n\to\infty} f_n^{(1)}(x_1)=A_1. \tag{2}$$

Рассмотрим теперь последовательность

$$f_1^{(1)}(x_2),\ f_2^{(1)}(x_2),\ f_3^{(1)}(x_2),\ \ldots$$

значений, принимаемых функциями множества $\{f_n^{(1)}(x)\}$ в точке x_2.

Эта последовательность также ограничена и мы можем применить к ней теорему Больцано — Вейерштрасса (в ее второй форме), что приводит нас к сходящейся последовательности

$$f_1^{(2)}(x_2),\ f_2^{(2)}(x_2),\ f_3^{(2)}(x_2),\ \ldots,\quad \lim_{n\to\infty} f_n^{(2)}(x_2)=A_2, \tag{3}$$

выделенной из $\{f_n^{(1)}(x_2)\}$. Важно отметить, что взаимный порядок двух функций $f_n^{(2)}$ и $f_m^{(2)}$ в последовательности (3) такой же, как и в последовательности (2).

Продолжая этот процесс неограниченно, мы построим счетное множество сходящихся последовательностей

$$f_1^{(1)}(x_1),\ f_2^{(1)}(x_1),\ f_3^{(1)}(x_1),\ \ldots,\quad \lim_{n\to\infty} f_n^{(1)}(x_1)=A_1,$$

$$f_1^{(2)}(x_2),\ f_2^{(2)}(x_2),\ f_3^{(2)}(x_2),\ \ldots,\quad \lim_{n\to\infty} f_n^{(2)}(x_2)=A_2,$$

. . . .

$$f_1^{(k)}(x_k),\ f_2^{(k)}(x_k),\ f_3^{(k)}(x_k),\ \ldots,\quad \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(x_k)=A_k,$$

. . . .

причем каждая следующая последовательность функций выделена (без нарушения порядка следования элементов) из предыдущей.

Заметив это, составим последовательность диагональных элементов построенной матрицы, т. е. последовательность

$$\left\{f_n^{(n)}(x)\right\}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Это есть требуемая, т. е. сходящаяся в каждой точке множества E, последовательность. Действительно, при любом фиксированном k последовательность $\{f_n^{(n)}(x_k)\}$ $(n \geqslant k)$ есть частичная для $\{f_n^{(k)}(x_k)\}$ и сходится к A_k, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Пусть $F=\{f(x)\}$ есть бесконечное семейство возрастающих функций, заданных на сегменте $[a, b]$. Если все функции семейства ограничены одним и тем же числом $|f(x)| \leqslant K$, то из F можно извлечь последовательность $\{f_n(x)\}$, которая в каждой точке $[a, b]$ сходится к некоторой возрастающей функции $\varphi(x)$.*

Доказательство. Применим к $\{f(x)\}$ лемму 1, взяв в качестве множества E множество, состоящее из всех рациональных точек сегмента $[a, b]$ и точки a, если она иррациональна. В каждой точке $x_k \in E$ существует конечный предел

$$\lim_{n \to \infty} f^{(n)}(x_k) \tag{4}$$

последовательности функций $F_0=\{f^{(n)}(x)\}$, выделенной из F.

Введем функцию $\psi(x)$, положив ее равной пределу (4) в точках множества E

$$\psi(x_k)=\lim_{n \to \infty} f^{(n)}(x_k) \quad (x_k \in E).$$

Этим функция $\psi(x)$ задана пока только на множестве E, причем легко видеть, что она есть функция возрастающая, т. е. если x_k и x_i суть две точки множества E и $x_k < x_i$, то $\psi(x_k) \leqslant \psi(x_i)$.

Распространим определение функции $\psi(x)$ на весь сегмент $[a, b]$, положив ее равной $\psi(x)=\sup\limits_{x_k<x}\{\psi(x_k)\}$ $(x_k \in E)$ для всех иррациональных точек промежутка $(a, b]$.

Ясно, что функция $\psi(x)$ есть возрастающая на всем сегменте $[a, b]$. В таком случае множество Q точек разрыва функции $\psi(x)$ разве лишь счетно.

Покажем, что в каждой точке x_0, в которой $\psi(x)$ непрерывна, будет

$$\lim_{n \to \infty} f^{(n)}(x_0)=\psi(x_0). \tag{5}$$

Действительно, для произвольного $\varepsilon>0$ можно найти такие точки x_k и x_i множества E, что

$$x_k < x_0 < x_i, \quad \psi(x_i)-\psi(x_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Фиксировав эти точки, найдем такое n_0, что при $n > n_0$ будет

$$|f^{(n)}(x_k)-\psi(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f^{(n)}(x_i)-\psi(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Легко понять, что при этих n окажется

$$\psi(x_0)-\varepsilon < f^{(n)}(x_k) \leqslant f^{(n)}(x_i) < \psi(x_0)+\varepsilon,$$

а так как $f^{(n)}(x_k) \leqslant f^{(n)}(x_0) \leqslant f^{(n)}(x_i)$, то при $n > n_0$ будет

$$\psi(x_0) - \varepsilon < f^{(n)}(x_0) < \psi(x_0) + \varepsilon,$$

откуда и следует (5).

Итак равенство

$$\lim_{n \to \infty} f^{(n)}(x) = \psi(x) \qquad (6)$$

может не выполняться только на счетном множестве Q точек разрыва $\psi(x)$.

Заметив это, снова применим лемму 1 к последовательности F_0, взяв за множество E множество тех точек Q, где не выполняется (6). Это приведет нас к последовательности $\{f_n(x)\}$, выделенной из F_0 и сходящейся теперь уже во всех точках $[a, b]$ (ибо там, где сходилась последовательность $\{f^{(n)}(x)\}$, сходится и ее подпоследовательность $\{f_n(x)\}$). Если положить $\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$, то функция $\varphi(x)$, очевидно, окажется возрастающей.

Теорема (Э. Хелли). *Пусть на сегменте $[a, b]$ задано бесконечное семейство функций $F = \{f(x)\}$. Если все функции семейства и полные изменения всех функций семейства ограничены одним числом*

$$|f(x)| \leqslant K, \quad \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) \leqslant K,$$

то из семейства F можно выделить такую последовательность $\{f_n(x)\}$, которая в каждой точке $[a, b]$ сходится к некоторой функции $\varphi(x)$, также имеющей конечное изменение.

Доказательство. Положим, для каждой функции $f(x)$ семейства F

$$\pi(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f), \quad \nu(x) = \pi(x) - f(x).$$

Обе эти функции возрастают. При этом $|\pi(x)| \leqslant K$, $|\nu(x)| \leqslant 2K$.

Применив к семейству $\{\pi(x)\}$ лемму 2, мы выделим из этого семейства сходящуюся последовательность $\{\pi_k(x)\}$

$$\lim_{k \to \infty} \pi_k(x) = \alpha(x).$$

Каждой функции $\pi_k(x)$ соответствует функция $\nu_k(x)$, дополняющая ее до функции $f_k(x)$ семейства F. Применив лемму 2 к семейству $\{\nu_k(x)\}$, мы выделим из него сходящуюся последовательность $\{\nu_{k_i}(x)\}$

$$\lim_{i \to \infty} \nu_{k_i}(x) = \beta(x).$$

Но тогда последовательность функций $f_{k_i}(x) = \pi_{k_i}(x) - \nu_{k_i}(x)$, выделенная из F, сходится к функции $\varphi(x) = \alpha(x) - \beta(x)$.

Теорема доказана.

§ 5. Непрерывные функции с конечным изменением

Теорема 1. *Пусть на сегменте* $[a, b]$ *задана функция с конечным изменением* $f(x)$. *Если* $f(x)$ *непрерывна в некоторой точке* x_0, *то в этой точке непрерывна и функция*

$$\pi(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}}(f).$$

Доказательство. Предположим, что $x_0 < b$, и покажем, что $\pi(x)$ непрерывна в точке x_0 справа. С этой целью, взяв произвольное $\varepsilon > 0$, разложим сегмент $[x_0, b]$ точками

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

на части так, чтобы оказалось

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1} - f(x_k)| > \overset{b}{\underset{x_0}{V}}(f) - \varepsilon. \tag{1}$$

Так как сумма V лишь возрастает от добавления новых точек, то можно считать, что $|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$. В таком случае, из (1) следует, что

$$\overset{b}{\underset{x_0}{V}}(f) < \varepsilon + \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < 2\varepsilon + $$
$$+ \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant 2\varepsilon + \overset{b}{\underset{x_1}{V}}(f).$$

Стало быть $\overset{x_1}{\underset{x_0}{V}}(f) < 2\varepsilon$, и, следовательно, $\pi(x_1) - \pi(x_0) < 2\varepsilon$. Отсюда и подавно $\pi(x_0 + 0) - \pi(x_0) < 2\varepsilon$. Но ε произвольно. Значит

$$\pi(x_0 + 0) = \pi(x_0).$$

Аналогично доказывается, что $\pi(x_0 - 0) = \pi(x_0)$, т. е. что $\pi(x)$ в точке x_0 непрерывна слева (если $x_0 > a$).

Следствие. *Непрерывная функция с конечным изменением представима в форме разности двух непрерывных же возрастающих функций.*

В самом деле, если $f(x)$ непрерывная функция с конечным изменением, заданная на сегменте $[a, b]$, то непрерывны обе ее возрастающие компоненты $\pi(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$ и $\nu(x) = \pi(x) - f(x)$.

Пусть на сегменте $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Разложим $[a, b]$ на части точками

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \quad [\max(x_{k+1} - x_k) = \lambda]$$

и составим суммы $V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$, $\Omega = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k$, где ω_k означает колебание функции $f(x)$ на сегменте $[x_k, x_{k+1}]$.

Теорема 2. Если $\lambda \to 0$, то каждая из сумм V и Ω стремится к полному изменению $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$ функции $f(x)$.[1])

Заметим, что конечности изменения $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$ мы не предполагаем.

Доказательство. Как уже отмечалось, сумма V не убывает от добавления новой точки деления. С другой стороны, если эта новая точка попадает в интервал между x_k и x_{k+1}, то увеличение суммы V, проистекающее из появления этой точки, не превосходит удвоенного колебания ω_k функции $f(x)$ в сегменте $[x_k, x_{k+1}]$.

Заметив это, возьмем какое-либо число $A < \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$ и найдем сумму V^* такую, что $V^* > A$. Пусть эта сумма отвечает следующему способу деления:

$$x_0^* = a < x_1^* < \ldots < x_m^* = b.$$

Выберем столь малое $\delta > 0$, что как только $|x'' - x'| < \delta$, так сейчас же

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{V^* - A}{4m},$$

и покажем, что для любого способа деления, у которого $\lambda < \delta$, будет

$$V > A. \tag{2}$$

В самом деле, имея подобный способ деления (I), составим новый способ (II), получающийся из (I) добавлением всех точек $\{x_k^*\}$. Если способу (II) отвечает сумма V_0, то

$$V_0 \geqslant V^*. \tag{3}$$

С другой стороны, способ (II) получается из (I) путем m-кратного добавления по одной точке. Так как каждое добавление вызывает увеличение суммы V меньшее, чем на $\frac{V^* - A}{2m}$, то

$$V_0 - V < \frac{V^* - A}{2}.$$

Отсюда и из (3) следует, что

$$V > V_0 - \frac{V^* - A}{2} \geqslant \frac{A + V^*}{2} > A.$$

---

[1]) Здесь существенно, что речь идет о непрерывной функции. Пусть, например, $f(x)$ задана на $[-1, +1]$ так: $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ при $x \neq 0$. Тогда $\overset{+1}{\underset{-1}{\mathrm{V}}}(f) = 2$, но для любого способа дробления $[-1, +1]$, при котором $x = 0$ не является точкой деления, будет $V = 0$, $\Omega = 1$.

Итак, при $\lambda < \delta$ выполнено (2), но поскольку всегда $V \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$, то $\lim\limits_{\lambda \to 0} V = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$.

Теперь уже легко провести доказательство и для сумм Ω. С одной стороны, ясно, что

$$\Omega \geqslant V. \tag{4}$$

Но если мы найдем сумму Ω, отвечающую какому-нибудь способу деления, а затем добавим в качестве новых точек деления те точки, в которых функция $f(x)$ принимает значения

$$m_k = \min\{f(x)\}, \quad M_k = \max\{f(x)\} \qquad (x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}),$$

то сумма V', отвечающая получившемуся новому способу деления, очевидно, не будет меньшей, чем Ω, откуда

$$\Omega \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f). \tag{5}$$

Из (4) и (5) и следует, что $\lim\limits_{\lambda \to 0} \Omega = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$.

Доказанная теорема лежит в основе принадлежащего С. Банаху весьма интересного подхода к непрерывным функциям с конечным изменением.

Пусть $f(x)$ задана и непрерывна на сегменте $[a, b]$ и $m = \min\{f(x)\}$, $M = \max\{f(x)\}$.

Введем функцию $N(y)$, заданную на сегменте $[m, M]$ следующим образом: $N(y)$ есть число корней уравнения $f(x) = y$. Если множество этих корней бесконечно, то $N(y) = +\infty$. Мы будем называть функцию $N(y)$ *индикатрисой Банаха*.

Теорема 3. (С. Банах). *Индикатриса Банаха измерима и*

$$\int_m^M N(y)\,dy = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f).$$

Доказательство. Разложим $[a, b]$ на 2^n равных частей и положим

$$d_1 = \left[a,\ a + \frac{b-a}{2^n}\right]$$

$$d_k = \left(a + (k-1)\frac{b-a}{2^n},\ a + k\frac{b-a}{2^n}\right] \qquad (k = 2, 3, \ldots, 2^n).$$

Пусть, далее, функция $L_k(y)$ $(k = 1, 2, \ldots, 2^n)$ равна 1, если уравнение

$$f(x) = y \tag{6}$$

имеет в промежутке d_k хотя бы один корень, и $L_k(y) = 0$, если в d_k нет ни одного корня этого уравнения. Если m_k и M_k суть, соответственно, точная нижняя и точная верхняя границы функции $f(x)$ в промежутке d_k, то $L_k(y)$ равна 1 в интервале (m_k, M_k) и равна нулю вне сегмента $[m_k, M_k]$, так что эта функция может иметь не больше двух точек разрыва и, очевидно, измерима. Отметим еще, что

$$\int_m^M L_k(y)\,dy = M_k - m_k = \omega_k,$$

где ω_k есть колебание $f(x)$ на сегменте $\bar{d}_k$.

Введем, наконец, функцию $N_n(y) = L_1(y) + L_2(y) + \ldots + L_{2^n}(y)$, равную числу тех промежутков d_k, в которых содержится хоть по одному корню уравнения (6). Очевидно, функция $N_n(y)$ измерима. При этом

$$\int_m^M N_n(y)\,dy = \sum_{k=1}^{2^n} \omega_k,$$

так что в силу теоремы 2,

$$\lim_{n\to\infty} \int_m^M N_n(y)\,dy = \bigvee_a^b (f).$$

Легко понять, что $N_1(y) \leqslant N_2(y) \leqslant N_3(y) \leqslant \ldots$ и, стало быть, существует конечный или бесконечный предел $N^*(y) = \lim\limits_{n\to\infty} N_n(y)$, который является функцией измеримой. Согласно теореме Б. Леви (гл. VI, § 1),

$$\int_m^M N^*(y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_m^M N_n(y)\,dy = \bigvee_a^b (f).$$

Если мы покажем, что

$$N^*(y) = N(y), \tag{7}$$

то теорема будет доказана.

Прежде всего совершенно ясно, что $N_n(y) \leqslant N(y)$, откуда и

$$N^*(y) \leqslant N(y). \tag{8}$$

Пусть теперь q натуральное число, не большее чем $N(y)$. Тогда можно указать q различных корней $x_1 < x_2 < \ldots x_q$ уравнения (6). Если n настолько велико, что $\frac{b-a}{2^n} < \min(x_{k+1} - x_k)$, то все q корней x_k попадут в разные промежутки d_k, так что $N_n(y) \geqslant q$, откуда и подавно

$$N^*(y) \geqslant q. \tag{9}$$

Если $N(y) = +\infty$, то q можно брать сколь угодно большим, так что и $N^*(y) = +\infty$; если $N(y)$ конечно, то можно взять $q = N(y)$, и тогда (9) примет вид $N^*(y) \geqslant N(y)$. Отсюда и из (8) следует (7).

Следствие 1. *Для того чтобы непрерывная функция $f(x)$ имела конечное изменение, необходимо и достаточно, чтобы ее индикатриса Банаха $N(y)$ была суммируема.*

Следствие 2. *Если $f(x)$ есть непрерывная функция с конечным изменением, то множество значений, принимаемых ею бесконечно много раз, имеет (на оси ординат) меру нуль.*

Действительно, в этом случае индикатриса Банаха, будучи суммируемой, почти везде конечна.

§ 6. Интеграл Стилтьеса

Здесь мы изложим весьма важное обобщение понятия об интеграле Римана — интеграл Стилтьеса.

Пусть на сегменте $[a, b]$ заданы две конечные функции $f(x)$ и $g(x)$. Разложим $[a, b]$ на части точками $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$, выберем в пределах каждого частичного сегмента $[x_k, x_{k+1}]$ по точке ξ_k и составим сумму $\sigma = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)]$.

Если при $\lambda = \max(x_{k+1} - x_k) \to 0$ сумма σ стремится к конечному пределу I, не зависящему ни от способа дробления, ни от выбора точек ξ_k, то этот предел называется *интегралом Стилтьеса функции* $f(x)$ *по функции* $g(x)$ и обозначается через

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) \quad \text{или} \quad (S)\int_a^b f(x)\,dg(x).$$

Точный смысл определения таков: число I есть интеграл Стилтьеса функции $f(x)$ по функции $g(x)$, если всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что при любом способе дробления, при котором $\lambda < \delta$, будет $|\sigma - I| < \varepsilon$, как бы мы ни выбирали точки ξ_k.

Ясно, что интеграл Римана есть частный случай интеграла Стилтьеса, получающийся при $g(x) = x$.

Отметим некоторые очевидные свойства интеграла Стилтьеса.

1. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dg(x) = \int_a^b f_1(x)\,dg(x) + \int_a^b f_2(x)\,dg(x)$.

2. $\int_a^b f(x)\,d[g_1(x) + g_2(x)] = \int_a^b f(x)\,dg_1(x) + \int_a^b f(x)\,dg_2(x)$.

3. Если k и l постоянные, то

$$\int_a^b kf(x)\,d\,lg(x) = kl\int_a^b f(x)\,dg(x).$$

Во всех трех случаях из существования правой части вытекает существование левой.

4. Если $a < c < b$ и существуют все три интеграла, входящие в равенство

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^c f(x)\,dg(x) + \int_c^b f(x)\,dg(x),$$

то это равенство справедливо.

Чтобы доказать это свойство интеграла, нужно лишь озаботиться включением точки c в число точек деления сегмента $[a, b]$ при составлении суммы σ для интеграла $\int_a^b f\,dg$.

Нетрудно доказать, что из существования интеграла $\int_a^b f\,dg$ следует существование обоих интегралов $\int_a^c f\,dg$ и $\int_c^b f\,dg$, но мы не будем на этом останавливаться. Интереснее отметить, что обратное предложение неверно.

Пример. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на сегменте $[-1, +1]$, причем

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 & \text{при } \quad 0 < x \leqslant 1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -1 \leqslant x < 0, \\ 1 & \text{при } \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что интегралы $\int_{-1}^{0} f(x)\,dg(x)$, $\int_{0}^{1} f(x)\,dg(x)$ существуют (ибо суммы σ равны нулю). В то же время интеграл $\int_{-1}^{+1} f(x)\,dg(x)$ не существует. Действительно, раздробим сегмент $[-1, +1]$ на части так, чтобы точка 0 не попадала в число точек деления, и составим сумму $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)]$.

Легко понять, что если $x_i < 0 < x_{i+1}$, то в сумме σ останется только i-ое слагаемое, ибо если точки x_k и x_{k+1} лежат по одну сторону от точки 0, то $g(x_k) = g(x_{k+1})$.

Значит, $\sigma = f(\xi_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] = f(\xi_i)$.

В зависимости от того, будет ли $\xi_i \leqslant 0$ или $\xi_i > 0$, будет $\sigma = 0$ или $\sigma = 1$, так что σ не имеет предела.

5. Из существования одного из интегралов $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ и $\int_a^b g(x)\,df(x)$ вытекает существование другого и равенство

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) + \int_a^b g(x)\,df(x) = [f(x)\,g(x)]_a^b, \tag{1}$$

где, как обычно, положено

$$[f(x)\,g(x)]_a^b = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a). \tag{2}$$

Формула (1) называется *формулой интегрирования по частям*.

Докажем это свойство интеграла. Пусть существует интеграл $\int_a^b g(x)\,df(x)$. Разделим $[a, b]$ на части и составим сумму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)],$$

Ее можно представить и так

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,g(x_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,g(x_k),$$

откуда

$$\sigma = -\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)[f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})] + f(\xi_{n-1})\,g(x_n) - f(\xi_0)\,g(x_0).$$

Прибавляя и вычитая в правой части выражение (2), находим

$$\sigma = [f(x)\,g(x)]_a^b -$$
$$-\left\{g(a)[f(\xi_0) - f(a)] + \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)[f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})] + g(b)[f(b) - f(\xi_{n-1})]\right\}.$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, есть не что иное, как сумма, составленная для интеграла $\int\limits_a^b g\,df$, причем точками дробления $[a, b]$ служат точки $a \leqslant \xi_0 \leqslant \xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots \leqslant \xi_{n-1} \leqslant b$, а точки $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ суть точки сегментов $[a, \xi_0]$ $[\xi_0, \xi_1], \ldots$ $\ldots, [\xi_{n-1}, b]$.

Если стремится к нулю $\max(x_{k+1} - x_k)$, то к нулю же стремится и $\max(\xi_{k+1} - \xi_k)$, так что сумма в фигурных скобках стремится к интегралу $\int\limits_a^b g\,df$, откуда и следует доказываемое предложение.

Естественно поставить вопрос об условиях существования интеграла Стилтьеса. Мы ограничимся лишь одной теоремой в этом направлении.

Теорема 1. *Интеграл*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x)$$

существует, если функция $f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a, b]$, *а* $g(x)$ *имеет на этом сегменте конечное изменение.*

Доказательство. Очевидно достаточно считать, что функция $g(x)$ возрастает, ибо всякая функция с конечным изменением есть разность двух возрастающих функций.

Разложим $[a, b]$ на части точками

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$$

и обозначим, соответственно, через m_k и M_k наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ в сегменте $[x_k, x_{k+1}]$.

Пусть

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k [g(x_{k+1}) - g(x_k)], \qquad S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k [g(x_{k+1}) - g(x_k)].$$

Ясно, что при любом выборе точек ξ_k в сегментах $[x_k, x_{k+1}]$ окажется $s \leqslant \sigma \leqslant S$.

Легко проверить, что при добавлении новой точки деления сумма s не убывает, а S не возрастает.

Отсюда следует, что ни одна сумма s не превосходит ни одной суммы S. Действительно, имея два способа, I и II, дробления сегмента $[a, b]$, которым отвечают соответственно суммы s_1, S_1 и s_2, S_2, мы можем составить способ III, объединяя точки деления обоих способов — I и II. Если способу III отвечают суммы s_3 и S_3, то $s_1 \leqslant s_3 \leqslant S_3 \leqslant S_2$, так что и в самом деле $s_1 \leqslant S_2$.

Заметив это, назовем через I точную верхнюю границу множества $\{s\}$ всех нижних сумм: $I = \sup\{s\}$.

При всяком способе деления будет $s \leqslant I \leqslant S$, и, следовательно (в силу неравенства $s \leqslant \sigma \leqslant S$), $|\sigma - I| \leqslant S - s$.

Если взять произвольное $\varepsilon > 0$ и найти такое $\delta > 0$, что неравенство $|x'' - x'| < \delta$ влечет неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$, то при $\lambda < \delta$ окажется $M_k - m_k < \varepsilon$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) и, стало быть, $S - s < \varepsilon[g(b) - g(a)]$.

Отсюда и подавно при $\lambda < \delta$ будет

$$|\sigma - I| < \varepsilon[g(b) - g(a)].$$

Иначе говоря, $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = I$, так что I и есть интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dg(x)$.

Из доказанной теоремы следует, что всякая функция с конечным изменением интегрируема по всякой непрерывной функции.

Вопрос о вычислении интеграла Стилтьеса будет подробно рассмотрен в § 6, гл. IX. Сейчас мы ограничимся двумя элементарными случаями.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а функция $g(x)$ в каждой точке $[a, b]$ имеет производную $g'(x)$, являющуюся функцией интегрируемой (R), то*

$$(S)\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = (R)\int\limits_a^b f(x)\,g'(x)\,dx. \qquad (3)$$

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица, а потому имеет конечное изменение, и интеграл в левой части (3) существует. С другой стороны, функция $g'(x)$, а с ней и произведение $f(x)g'(x)$ почти везде непрерывны, так что существует и правая часть (3). Остается убедиться в их равенстве.

С этой целью разложим $[a, b]$ на части точками

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

и к каждой разности $g(x_{k+1}) - g(x_k)$ применим формулу Лагранжа

$$g(x_{k+1}) - g(x_k) = g'(\bar{x}_k)(x_{k+1} - x_k) \quad (x_k < \bar{x}_k < x_{k+1}).$$

Если при составлении суммы σ для интеграла $\int\limits_a^b f\,dg$ мы в качестве точки ξ_k возьмем именно точку $\bar{x}_k$, доставляемую формулой Лагранжа, то сумма σ примет вид

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k)\,g'(\bar{x}_k)(x_{k+1} - x_k),$$

т. е. окажется римановой суммой функции $f(x)g'(x)$. «Размельчая» дробления и переходя к пределу, мы и получим равенство (3).

Теорема 3. *Пусть $f(x)$* непрерывна на $[a, b]$, *а $g(x)$ постоянна в каждом из интервалов (a, c_1), (c_1, c_2), ..., (c_m, b), где*[1])

$$a < c_1 < c_2 < \ldots < c_m < b.$$

[1]) Иначе говоря, $g(x)$ есть *ступенчатая* функция.

Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(a)[g(a+0)-g(a)] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} f(c_k)[g(c_k+0)-g(c_k-0)] + f(b)[g(b)-g(b-0)]. \qquad (4)$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g) = |g(a+0)-g(a)| + \sum_{k=1}^{m} \{|g(c_k)-g(c_k-0)| +$$
$$+ |g(c_k+0)-g(c_k)|\} + |g(b)-g(b-0)|,$$

так что функция $g(x)$ имеет конечное изменение на $[a, b]$, а значит, и на всякой части $[a, b]$. Поэтому

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \sum_{k=0}^{m} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\,dg(x), \qquad (5)$$

где положено $c_0 = a$, $c_{m+1} = b$.

Остается вычислить интеграл $\int\limits_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\,dg(x)$. Но разлагая $[c_k, c_{k+1}]$ на части и составляя сумму σ для интересующего нас интеграла, мы, очевидно, будем иметь

$$\sigma = f(\xi_0)[g(c_k+0)-g(c_k)] + f(\xi_{n-1})[g(c_{k+1})-g(c_{k+1}-0)],$$

ибо все прочие слагаемые исчезают. Значит, в пределе

$$\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\,dg(x) = f(c_k)[g(c_k+0)-g(c_k)] + f(c_{k+1})[g(c_{k+1})-g(c_{k+1}-0)],$$

откуда, в связи с (5), и следует (4).

§ 7. Предельный переход под знаком интеграла Стилтьеса

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а $g(x)$ имеет на этом сегменте конечное изменение, то*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dg(x)\right| \leqslant M(f)\cdot \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g), \qquad (1)$$

где $M(f) = \max|f(x)|$.

Доказательство. Для любого способа дробления $[a, b]$ и любого выбора точек ξ_k будет

$$|\sigma| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1})-g(x_k)]\right| \leqslant$$
$$\leqslant M(f)\sum_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1})-g(x_k)| \leqslant M(f)\cdot \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g),$$

откуда и следует (1).

Теорема 2. *Пусть на $[a, b]$ задана функция с конечным изменением $g(x)$ и последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}$, равномерно сходящаяся к (непрерывной) функции $f(x)$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dg(x)=\int_a^b f(x)\,dg(x).$$

Доказательство. Пусть $M(f_n-f)=\max|f_n(x)-f(x)|$. Тогда, в силу (1),

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dg(x)-\int_a^b f(x)\,dg(x)\right|\leqslant M(f_n-f)\cdot\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g),$$

и остается заметить, что по условию $M(f_n-f)\to 0$.

Теорема 3 (Э. Хелли). *Пусть на сегменте $[a, b]$ заданы непрерывная функция $f(x)$ и последовательность функций $\{g_n(x)\}$, которая в каждой точке $[a, b]$ сходится к конечной функции $g(x)$. Если при всех n*

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g_n)\leqslant K<+\infty,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,dg_n(x)=\int_a^b f(x)\,dg(x). \tag{2}$$

Доказательство. Прежде всего установим, что

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g)\leqslant K, \tag{3}$$

так что и предельная функция имеет конечное изменение. Действительно, если мы произвольным образом разложим сегмент $[a, b]$ на части, то будем иметь

$$\sum_{k=0}^{m-1}|g_n(x_{k+1})-g_n(x_k)|\leqslant K\quad(n=1, 2, 3, \ldots),$$

откуда и в пределе (при $n\to\infty$)

$$\sum_{k=0}^{m-1}|g(x_{k+1})-g(x_k)|\leqslant K.$$

Ввиду произвольности произведенного дробления, отсюда следует (3).

Заметив это, возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и разложим $[a, b]$ точками $\{x_k\}$ $(k=0, 1, \ldots, m)$ на столь малые части $[x_k, x_{k+1}]$, что в каждой из них колебание функции $f(x)$ оказывается меньше,

чем $\frac{\varepsilon}{3K}$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dg(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x)-f(x_k)]\,dg(x) + \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} dg(x).$$

Но

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} dg(x) = g(x_{k+1}) - g(x_k).$$

С другой стороны, на сегменте $[x_k, x_{k+1}]$ будет

$$|f(x)-f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3K},$$

откуда

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x)-f(x_k)]\,dg(x) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3K} \mathop{\mathrm{V}}_{x_k}^{x_{k+1}} (g),$$

и, стало быть,

$$\left| \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x)-f(x_k)]\,dg(x) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3K} \mathop{\mathrm{V}}_a^b (g) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)] + \theta \frac{\varepsilon}{3} \quad (|\theta| \leqslant 1).$$

Аналогично

$$\int_a^b f(x)\,dg_n(x) = \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)[g_n(x_{k+1}) - g_n(x_k)] + \theta_n \frac{\varepsilon}{3} \quad (|\theta_n| \leqslant 1).$$

Но для $n > n_0$ будет

$$\left| \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)[g_n(x_{k+1}) - g_n(x_k)] - \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)] \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

и, следовательно, при этих n окажется, что

$$\left| \int_a^b f(x)\,dg_n(x) - \int_a^b f(x)\,dg(x) \right| < \varepsilon,$$

а это и доказывает теорему.

С помощью доказанной теоремы мы можем свести вопрос о вычислении интеграла $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ (где функция $f(x)$ непрерывна, а $g(x)$ имеет конечное изменение) к тому случаю, когда $g(x)$ непрерывна.

Действительно, пусть $g(x)$ произвольная функция с конечным изменением. Введем в рассмотрение функцию скачков $s(x)$ функции $g(x)$

$$s(x)=[g(a+0)-g(a)]+\sum_{x_k<x}[g(x_k+0)-g(x_k-0)]+ \\ +[g(x)-g(x-0)].$$

Как установлено в теореме 7, § 3, $g(x)=s(x)+\gamma(x)$, где $\gamma(x)$ непрерывная функция ограниченной вариации. Отсюда

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)=\int_a^b f(x)\,ds(x)+\int_a^b f(x)\,d\gamma(x).$$

Покажем, что интеграл $\int_a^b f(x)\,ds(x)$ легко вычисляется. С этой целью отметим, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{|g(x_k)-g(x_k-0)|+|g(x_k+0)-g(x_k)|\}$$

сходится. [1]) Заметив это, введем функции $s_n(x)$, полагая $s_n(a)=0$ и

$$s_n(x)=[g(a+0)-g(a)]+ \\ +\sum_{x_k<x}[g(x_k+0)-g(x_k-0)]+[g(x)-g(x-0)]$$

для $a<x\leqslant b$, причем учитываются только те точки разрыва x_k функции $g(x)$, у которых $k\leqslant n$.

Ясно, что при каждом x из $[a, b]$ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)=s(x)$.

С другой стороны,

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(s_n)=|g(a+0)-g(a)|+\sum_{k=1}^{n}\{|g(x_k)-g(x_k-0)|+ \\ +|g(x_k+0)-g(x_k)|\}+|g(b)-g(b-0)|,$$

так что изменения всех функций $s_n(x)$ ограничены одним числом.

---

[1]) Действительно, если $g(x)=\pi(x)-\nu(x)$, где $\pi(x)$ и $\nu(x)$ возрастающие функции, то каждый из (положительных) рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\pi(x_k+0)-\pi(x_k-0)],\quad \sum_{k=1}^{\infty}[\nu(x_k+0)-\nu(x_k-0)]$$

очевидно сходится, и остается заметить, что

$$|g(x_k)-g(x_k-0)|+|g(x_k+0)-g(x_k)|\leqslant \\ \leqslant[\pi(x_k+0)-\pi(x_k-0)]+[\nu(x_k+0)-\nu(x_k-0)].$$

Поэтому

$$\int_a^b f(x)\,ds(x) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,ds_n(x).$$

Но функция $s_n(x)$ постоянна в интервалах между точками a, x_1, ..., x_n, b. Значит, в силу теоремы 3, § 6,

$$\int_a^b f(x)\,ds_n(x) = f(a)[g(a+0)-g(a)] + \\ + \sum_{k=1}^{n} f(x_k)[g(x_k+0)-g(x_k-0)] + f(b)[g(b)-g(b-0)]$$

(ясно, что скачки функции $s_n(x)$ в точках a, x_1, ..., x_n, b совпадают со скачками функции $g(x)$). Отсюда

$$\int_a^b f(x)\,ds(x) = f(a)[g(a+0)-g(a)] + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)[g(x_k+0)-g(x_k-0)] + f(b)[g(b)-g(b-0)],$$

и для нахождения интеграла $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ остается вычислить $\int_a^b f(x)\,d\gamma(x)$, где $\gamma(x)$ непрерывная компонента функции $g(x)$.

Обратим внимание читателя на то, что само значение $g(x_k)$ функции $g(x)$ во в н у т р е н н е й точке разрыва x_k никакого влияния на величину интеграла $\int_a^b f\,dg$ не оказывает. Это вполне естественно, ибо точку x_k мы можем не включать в число точек деления при составлении суммы σ.

§ 8. Линейные функционалы

Пусть на сегменте $[a, b]$ задана функция с конечным изменением $g(x)$. Эта функция позволяет каждой непрерывной функции $f(x)$, заданной на $[a, b]$, соотнести число

$$\Phi(f) = \int_a^b f(x)\,dg(x). \tag{1}$$

При этом соблюдены условия:

1) $\Phi(f_1+f_2) = \Phi(f_1) + \Phi(f_2)$

2) $|\Phi(f)| \leqslant KM(f)$, где $M(f) = \max |f(x)|$, а $K = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g)$.

Если каждой непрерывной функции $f(x)$, заданной на $[a, b]$, соотнесено число $\Phi(f)$, причем соблюдены условия 1) и 2), то говорят, что на множестве C непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций задан *линейный функционал*.

Оказывается, что никаких других линейных функционалов, кроме (1), на множестве C не существует.

Прежде чем доказать это предложение, отметим, что для всякого линейного функционала $\Phi(f)$ на множестве C будет $\Phi(kf)=k\Phi(f)$, что доказывается так же, как для случая функционалов, заданных на L_2 (см. гл. VII, § 4).

Теорема (Ф. Рисс). *Если на множестве C непрерывных в сегменте $[a, b]$ функций $f(x)$ задан линейный функционал $\Phi(f)$, то существует такая функция ограниченной вариации $g(x)$, что для всякой $f(x)\in C$ будет*

$$\Phi(f)=\int_a^b f(x)\,dg(x). \tag{1}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $a=0$, $b=1$, ибо общий случай сводится к этому с помощью линейного преобразования аргумента.

В § 5, гл. IV отмечалось, что $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}=1$.

Кроме того, при $x\in[0, 1]$ каждое слагаемое этой суммы не отрицательно. Значит если $\varepsilon_k=\pm 1$ $(k=0, 1, \ldots, n)$, то

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right|\leqslant 1. \tag{2}$$

Заметив это, рассмотрим линейный функционал $\Phi(f)$ заданный для непрерывных на $[0, 1]$ функций $f(x)$. По определению линейного функционала, существует такое K, что $|\Phi(f)|\leqslant K\cdot M(f)$. Отсюда и из (2)

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k\Phi\left[C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right]\right|\leqslant K.$$

Если мы распорядимся числами ε_k так, чтобы все слагаемые последней суммы были неотрицательны, то обнаружим, что

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\Phi\left[C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right]\right|\leqslant K. \tag{3}$$

Введем теперь ступенчатую функцию $g_n(x)$, полагая

$$g_n(0)=0,$$

$$g_n(x)=\Phi\left[C_n^0 x^0 (1-x)^{n-0}\right] \qquad \left(0<x<\frac{1}{n}\right),$$

$$g_n(x)=\Phi\left[C_n^0 x^0 (1-x)^{n-0}\right]+\Phi\left[C_n^1 x^1 (1-x)^{n-1}\right] \qquad \left(\frac{1}{n}\leqslant x<\frac{2}{n}\right),$$

. . . .

$$g_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\Phi\left[C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right] \qquad \left(\frac{n-1}{n}\leqslant x<1\right),$$

$$g_n(1)=\sum_{k=0}^{n}\Phi\left[C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right].$$

В силу (3), сами функции $g_n(x)$ и их полные изменения ограничены одним числом. Поэтому, на основании принципа выбора Хелли, из последовательности $\{g_n(x)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{g_{n_i}(x)\}$, которая в каждой точке $[0, 1]$ сходится к функции с конечным изменением $g(x)$.

Если $f(x)$ непрерывная функция, заданная на $[0, 1]$, то в силу теоремы 3, § 6,

$$\int_0^1 f(x)\,dg_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\Phi\left[C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right],$$

откуда $\int_0^1 f(x)\,dg_n(x) = \Phi[B_n(x)]$, где $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ есть полином Бернштейна для функции $f(x)$.

В силу теоремы С. Н. Бернштейна из § 5, гл. IV $M(B_n - f) \to 0$, а по определению линейного функционала

$$|\Phi(B_n) - \Phi(f)| = |\Phi(B_n - f)| \leqslant KM(B_n - f).$$

Значит, при $n \to \infty$ $\Phi(B_n) \to \Phi(f)$, откуда

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\,dg_n(x) = \Phi(f).$$

Но если n стремится к $+\infty$, пробегая значения $n_1, n_2, n_3, \ldots$, то по теореме Хелли из § 7 будет $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\,dg_n(x) = \int_0^1 f(x)\,dg(x)$.

Значит, $\Phi(f) = \int_0^1 f(x)\,dg(x)$, что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ VIII

1. Для того чтобы функция $f(x)$ имела конечное изменение, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая возрастающая функция $\varphi(x)$, что при $x' < x''$

$$f(x'') - f(x') \leqslant \varphi(x'') - \varphi(x').$$

2. Если в каждой точке множества E существует производная $f'(x)$ конечной функции $f(x)$, причем $|f'(x)| \leqslant K$, то $m^*f(E) \leqslant K \cdot m^*E$.

3. Функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha > 0$, если $|f(x'') - f(x')| \leqslant K|x'' - x'|^{\alpha}$. Показать, что при $\alpha > 1$ $f(x) \equiv \mathrm{const}$. Построить пример функции с конечным изменением, которая не удовлетворяет никакому условию Липшица. Построить функцию, удовлетворяющую условию Липшица данного порядка $\alpha < 1$ и имеющую бесконечное полное изменение.

4. Интеграл $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ существует, если $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка α, а $g(x)$ — условию Липшица порядка β, причем $\alpha + \beta > 1$ (В. Кондурарь).

5. Если $f(x)$ непрерывна, а $g(x)$ имеет конечное изменение, то $\int_a^x f(x)\,dg(x)$ есть функция с конечным изменением, непрерывная во всех точках непрерывности $g(x)$.

6. Пусть дана числовая последовательность $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ Положим $\Delta^0\mu_n = \mu_n$, $\Delta^{k+1}\mu_n = \Delta^k\mu_n - \Delta^k\mu_{n+1}$. Для того чтобы существовала возрастающая функция $g(x)$, для которой

$$\int_0^1 x^n\,dg(x) = \mu_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы при всех k и n было $\Delta^k\mu_n \geqslant 0$ (Ф. Хаусдорф).

7. В тех же обозначениях, для существования функции с конечным изменением $g(x)$, удовлетворяющей условию (1), необходимо и достаточно, чтобы при всех n было $\sum_{k=0}^{n} C_n^k |\Delta^{n-k}\mu_k| \leqslant K$ (Ф. Хаусдорф).

8. Показать, что теорема Рисса из § 8 есть следствие теоремы Хаусдорфа, сформулированной в предыдущем упражнении.

9. Множество $F=\{f(x)\}$ состоит из *равностепенных непрерывных* функций, если всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что неравенство $|x''-x'| < \delta$ влечет неравенство $|f(x'')-f(x')| < \varepsilon$ для всех функций из F. Если все функции такого бесконечного множества F ограничены одним числом, то из F выделяется равномерно сходящаяся последовательность (Ц. Арцела — Дж. Асколи).

10. Доказать равенство $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)$ для непрерывной функции $f(x)$, опираясь на теорему Банаха из § 5.

ГЛАВА IX

АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

§ 1. Абсолютно непрерывные функции

С классом функций ограниченной вариации тесно связан более узкий класс абсолютно непрерывных функций.

Определение. Пусть на сегменте $[a, b]$ задана конечная функция $f(x)$. Если всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы взаимно не пересекающихся интервалов $(a_1, b_1), \ldots (a_n, b_n)$, для которой

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \tag{1}$$

оказывается

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \{f(b_k) - f(a_k)\} \right| < \varepsilon, \tag{2}$$

то говорят, что функция $f(x)$ *абсолютно непрерывна.*

Очевидно, что всякая абсолютно непрерывная функция непрерывна в обычном смысле слова, ибо в частности можно взять $n = 1$. Ниже мы увидим, что обратное неверно.

Не изменяя смысла определения, мы можем условие (2) заменить более тяжелым условием

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Действительно, пусть число $\delta > 0$ таково, что из (1) вытекает неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \{f(b_k) - f(a_k)\} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, взяв любую систему взаимно не пересекающихся интервалов $\{(a_k, b_k)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, для которой выполнено (1), мы можем разбить эту систему на две части A и B, отнеся в A те интервалы (a_k, b_k), для которых $f(b_k) - f(a_k) \geqslant 0$, а в B все

остальные интервалы системы. Ввиду очевидных соотношений

$$\sum_A |f(b_k)-f(a_k)| = \left|\sum_A \{f(b_k)-f(a_k)\}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\sum_B |f(b_k)-f(a_k)| = \left|\sum_k \{f(b_k)-f(a_k)\}\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ясно, что выполнено (3).

Поскольку все слагаемые суммы (3) неотрицательны, а число их произвольно, ясно, что всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что какую бы конечную или счетную систему взаимно не налегающих интервалов $\{(a_k, b_k)\}$, для которой $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$, ни взять, окажется, что

$$\sum_k |f(b_k)-f(a_k)| < \varepsilon.$$

Покажем, что вместо абсолютных приращений функции $f(x)$ можно говорить о ее колебаниях.

В самом деле, если наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ в сегменте $[a_k, b_k]$ суть m_k и M_k, то в $[a_k, b_k]$ можно найти такие точки α_k и β_k, что $f(\alpha_k) = m_k$, $f(\beta_k) = M_k$.

Поскольку сумма длин интервалов (α_k, β_k), очевидно, не превосходит суммы длин интервалов (a_k, b_k), ясно, что

$$\sum_k [f(\beta_k) - f(\alpha_k)] < \varepsilon.$$

Итак, если функция $f(x)$ абсолютно непрерывна, то всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что какую бы конечную или счетную систему взаимно не налегающих интервалов $\{(a_k, b_k)\}$, для которой $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$, ни взять, будет $\sum_k \omega_k < \varepsilon$, где, как обычно, ω_k означает колебание $f(x)$ на $[a_k, b_k]$.

Простейшим примером абсолютно непрерывной функции может служить любая функция $f(x)$, удовлетворяющая условию Липшица

$$|f(x'') - f(x')| \leqslant K\,|x'' - x'|.$$

Теорема 1. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ абсолютно непрерывны, то абсолютно непрерывны и их сумма, разность и произведение. Кроме того, если $g(x)$ не обращается в нуль, то абсолютно непрерывно и частное $\frac{f(x)}{g(x)}$.*

Доказательство. Абсолютная непрерывность суммы и разности сразу следует из того, что

$$|\{f(b_k) \pm g(b_k)\} - \{f(a_k) \pm g(a_k)\}| \leqslant |f(b_k) - f(a_k)| + |g(b_k) - g(a_k)|.$$

Далее, если A и B суть верхние границы $|f(x)|$ и $|g(x)|$, то

$$|f(b_k)g(b_k)-f(a_k)g(a_k)|\leqslant|g(b_k)|\cdot|f(b_k)-f(a_k)|+$$
$$+|f(a_k)|\cdot|g(b_k)-g(a_k)|\leqslant B|f(b_k)-f(a_k)|+A|g(b_k)-g(a_k)|,$$

откуда следует абсолютная непрерывность функции $f(x)g(x)$.

Наконец, если $g(x)$ не обращается в нуль, то $|g(x)|\geqslant\sigma>0$, откуда

$$\left|\frac{1}{g(b_k)}-\frac{1}{g(a_k)}\right|\leqslant\frac{|g(b_k)-g(a_k)|}{\sigma^2}$$

и функция $\frac{1}{g(x)}$ абсолютно непрерывна, а потому абсолютно непрерывна и функция $\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$.

Суперпозиция $F[f(x)]$ двух абсолютно непрерывных функций $F(y)$ и $f(x)$ может и не быть абсолютно непрерывной функцией. Ниже мы вернемся к этому вопросу, а пока приведем два простых условия, обеспечивающих абсолютную непрерывность суперпозиции двух абсолютно непрерывных функций.

***Теорема* 2.** *Пусть на сегменте $[a, b]$ задана абсолютно непрерывная функция $f(x)$, значения которой попадают в сегмент $[A, B]$. Если заданная на $[A, B]$ функция $F(y)$ удовлетворяет условию Липшица, то сложная функция $F[f(x)]$ абсолютно непрерывна.*

Доказательство. Если $|F(y'')-F(y')|\leqslant K|y''-y'|$, то какую бы систему взаимно не налегающих интервалов (a_k, b_k) ни взять, $\sum\limits_{k=1}^{n}|F[f(b_k)]-F[f(a_k)]|\leqslant K\sum\limits_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|$, а правая часть этого неравенства становится сколь угодно малой вместе с $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)$.

***Теорема* 3.** *Пусть абсолютно непрерывная функция $f(x)$, заданная на $[a, b]$, строго возрастает. Если $F(y)$ абсолютно непрерывна на $[f(a), f(b)]$, то функция $F[f(x)]$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon>0$ и найдем такое $\delta>0$, что для любой системы взаимно не налегающих интервалов (A_k, B_k), у которой $\sum\limits_{k=1}^{n}(B_k-A_k)<\delta$ будет $\sum\limits_{k=1}^{n}|F(B_k)-F(A_k)|<\varepsilon$.

Затем найдем для этого δ такое $\eta>0$, что неравенство $\sum\limits_{k=1}^{m}(b_k-a_k)<\eta$ влечет неравенство $\sum\limits_{k=1}^{m}[f(b_k)-f(a_k)]<\delta$, если только интервалы (a_k, b_k) попарно не пересекаются.

Сделав это, выберем любую систему попарно не пересекающихся интервалов (a_k, b_k), у которой сумма длин меньше η. Интервалы $(f(a_k), f(b_k))$ тоже попарно не пересекаются (в этом суть дела) и их сумма длин меньше δ, а потому $\sum\limits_{k=1}^{m}|F[f(b_k)]-F[f(a_k)]|<\varepsilon$, что и доказывает теорему.

§ 2. Дифференциальные свойства абсолютно непрерывных функций

Теорема 1. *Абсолютно непрерывная функция имеет конечное изменение.* [1])

Доказательство. Пусть на сегменте $[a, b]$ задана абсолютно непрерывная функция $f(x)$. Найдем такое $\delta > 0$, что для всякой системы взаимно не налегающих интервалов $\{(a_k, b_k)\}$, у которой $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$ будет $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < 1$.

Разложим $[a, b]$ точками $c_0 = a < c_1 < c_2 < \ldots < c_N = b$ на такие части, что $c_{k+1} - c_k < \delta$ $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$.

Тогда, при всяком разложении сегмента $[c_k, c_{k+1}]$ на части, сумма абсолютных приращений $f(x)$ на этих частях окажется меньшей, чем 1, откуда $\overset{c_{k+1}}{\underset{c_k}{\mathrm{V}}} (f) \leqslant 1$, а тогда $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) \leqslant N$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Если $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$, то почти в каждой точке $[a, b]$ эта функция имеет конечную производную $f'(x)$, которая оказывается суммируемой функцией.*

Теорема 2. *Если производная $f'(x)$ абсолютно непрерывной функции $f(x)$ почти везде равна нулю, то функция $f(x)$ постоянна.*

Доказательство. Назовем через E множество тех точек (a, b), где $f'(x) = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. Если $x \in E$, то для всех достаточно малых $h > 0$ оказывается

$$\frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} < \varepsilon. \qquad (*)$$

Легко понять, что сегменты $[x, x+h]$ [где $h > 0$ удовлетворяют условию (*)] покрывают множество E в смысле Витали. Поэтому мы можем выбрать из них конечное число попарно не пересекающихся сегментов

$$d_1 = [x_1, x_1 + h_1], \quad d_2 = [x_2, x_2 + h_2], \quad \ldots, \quad d_n = [x_n, x_n + h_n],$$

лежащих в интервале (a, b) и таких, что внешняя мера не покрытой ими части множества E окажется меньшей любого наперед заданного числа $\delta > 0$. Пусть это сделано и $x_k < x_{k+1}$.

Если

$$[a, x_1), \quad (x_1 + h_1, x_2), \quad \ldots, \quad (x_{n-1} + h_{n-1}, x_n), \quad (x_n + h_n, b] \qquad (1)$$

суть промежутки, остающиеся после удаления из сегмента $[a, b]$ всех сегментов d_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то сумма длин этих проме-

---

[1]) Отсюда уже вытекает существование непрерывных, но не абсолютно непрерывных функций $\left(\text{например, такова функция } x \cos\frac{\pi}{2x}\text{; см. гл. VIII, § 3}\right)$.

жутков необходимо будет меньшей, чем δ. Это следует из того, что

$$b-a=mE\leqslant\sum_{k=1}^{n} md_k+m^*\left[E-\sum_{k=1}^{n} d_k\right]<\sum_{k=1}^{n} md_k+\delta,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{n} md_k>b-a-\delta.$$

Но функция $f(x)$ абсолютно непрерывна. Поэтому число δ можно считать выбранным настолько малым, что сумма приращений $f(x)$ на промежутках (1) меньше ε

$$|\{f(x_1)-f(a)\}+\sum_{k=1}^{n-1}\{f(x_{k+1})-f(x_k+h_k)\}+$$
$$+\{f(b)-f(x_n+h_n)\}|<\varepsilon. \quad (2)$$

С другой стороны, в силу самого определения сегментов d_k, будет $|f(x_k+h_k)-f(x_k)|<\varepsilon h_k$, откуда и подавно (поскольку $\sum h_k=\sum md_k\leqslant b-a$)

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\{f(x_k+h_k)-f(x_k)\}\right|<\varepsilon(b-a). \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что $|f(b)-f(a)|<\varepsilon(1+b-a)$ и, в силу произвольности ε, $f(b)=f(a)$.

Это рассуждение можно провести для всякого сегмента $[a, x]$, где $a<x\leqslant b$. Поэтому для любого x из $[a, b]$ будет $f(x)=f(a)$, и функция $f(x)$ оказывается постоянной. [1])

Следствие. *Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ двух абсолютно непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны, то разность этих функций постоянна.*

В самом деле, если удалить из $[a, b]$ множество меры нуль точек, в которых хоть одна из функций $f(x)$ и $g(x)$ не имеет конечной производной, или их производные не равны между собой, то в любой оставшейся точке будет $[f(x)-g(x)]'=0$.

§ 3. Непрерывные отображения

В § 2 гл. VIII мы уже имели случай остановиться на понятии отображения точечного множества с помощью некоторой функции. Здесь мы продолжим эти рассмотрения. Чтобы не повторять каждый раз одного и того же, условимся раз навсегда, что $f(x)$ означает непрерывную функцию, заданную на сегменте $[a, b]$.

Теорема 1. *Образ $f(F)$ замкнутого множества F есть замкнутое множество.*

---

[1]) Из доказанной теоремы следует, что непрерывная функция $\Theta(x)$, построенная в § 2 гл. VIII, заведомо не абсолютно непрерывна.

Доказательство. Пусть y_0 есть предельная точка множества $f(F)$ $y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n$ $[y_n \in f(F)]$. Соотнесем каждой точке y_n такую точку $x_n \in F$, что $f(x_n) = y_n$.

Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то из нее выделяется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$

$$\lim x_{n_k} = x_0,$$

причем, в силу замкнутости множества F, $x_0 \in F$ и, стало быть, $f(x_0) \in f(F)$.

С другой стороны, из непрерывности функции $f(x)$ следует, что

$$\lim y_{n_k} = \lim f\left(x_{n_k}\right) = f(x_0),$$

так что $y_0 = f(x_0)$ и $y_0 \in f(F)$. Таким образом, множество $f(F)$ содержит все свои предельные точки.

Из сопоставления этой теоремы с теоремой 1, § 2, гл. VIII вытекает:

Следствие. *Если E есть множество типа F_σ, то и образ его $f(F)$ есть множество типа F_σ.*

Займемся вопросом о том, сохраняется ли свойство измеримости множества при его непрерывном отображении. Для решения этого вопроса понадобится следующее определение, принадлежащее Н. Н. Лузину.

Определение. Если образ $f(e)$ любого множества e, имеющего меру, равную нулю, также есть множество меры нуль, то говорят, что функция $f(x)$ *обладает свойством* (N).

Теорема 2. *Для того чтобы образ $f(E)$ любого измеримого множества E представлял собою измеримое множество, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ обладала свойством (N).*

Доказательство. Пусть $f(x)$ обладает свойством (N) и E есть измеримое множество, лежащее на $[a, b]$. Тогда $E = A + e$, где A есть множество типа F_σ, а e — множество меры 0.[1])

Значит, $f(E) = f(A) + f(e)$ и, следовательно, множество $f(E)$ измеримо.

Теперь допустим, что функция $f(x)$ свойством N не обладает. Тогда найдется лежащее на сегменте $[a, b]$ множество e_0, мера которого равна нулю, но внешняя мера образа которого положительна $m^*f(e_0) > 0$.

Но тогда из множества $f(e_0)$ можно выделить неизмеримую часть B.[2]) Соотнеся каждому $y \in B$ такое $x \in e_0$, что $f(x) = y$, мы получим прообраз A множества B, причем $A \subset e_0$. Ясно, что множество A измеримо, ибо $m^*A \leqslant \leqslant me_0 = 0$. В то же время множество $f(A) = B$ неизмеримо, т. е. наша функция $f(x)$ отображает измеримое множество в множество неизмеримое.

Теорема 3. *Абсолютно непрерывные функции обладают свойством* (N).

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ абсолютно непрерывна и множество E имеет меру 0. Установим, что $mf(E) = 0$. Для этого допустим сначала, что точки a и b не принадлежат E, так что $E \subset (a, b)$.

Взяв произвольное $\varepsilon > 0$, найдем такое $\delta > 0$, что для любой конечной или счетной системы взаимно не налегающих интервалов $\{(a_k, b_k)\}$, сумма длин которых меньше δ, будет $\sum\limits_k (M_k - m_k) < \varepsilon$, где, как обычно, $m_k = = \min\{f(x)\}$, $M_k = \max\{f(x)\}$ $(x \in [a_k, b_k])$.

---

1) Чтобы доказать это утверждение, достаточно всякому натуральному n соотнести замкнутое множество $F_n \subset E$ с мерой $mF_n > mE - \frac{1}{n}$ и положить $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n$.

2) Если $f(e_0)$ неизмеримо, то полагаем $B = f(e_0)$, в противном случае применяем предложение, доказанное в конце § 6 гл. III.

Поскольку $mE=0$, можно найти такое открытое ограниченное множество G, что $E \subset G$, $mG < \delta$.

При этом можно считать, что $G \subset (a, b)$ (ибо E содержится в этом интервале). Но G есть сумма своих составляющих интервалов (a_k, b_k), сумма длин которых, стало быть, меньше δ. Значит

$$f(E) \subset f(G) = \sum_k f[(a_k, b_k)] \subset \sum_k f([a_k, b_k]),$$

откуда

$$m^* f(E) \leqslant \sum_k m^* f([a_k, b_k]).$$

С другой стороны, ясно, что $f([a_k, b_k]) = [m_k, M_k]$ и, следовательно,

$$m^* f(E) \leqslant \sum_k (M_k - m_k) < \varepsilon.$$

Отсюда, ввиду произвольности ε, и вытекает, что $mf(E)=0$.

Переходя к общему случаю, достаточно отметить, что выбрасывание из множества E точек a и b влечет удаление из множества $f(E)$ не больше чем двух точек $f(a)$ и $f(b)$, что, как известно, не отражается на мере множества $f(E)$.

Следствие. *Абсолютно непрерывная функция отображает измеримое множество в измеримое множество.*

Мы видели, что всякая абсолютно непрерывная функция имеет конечное изменение и что она обладает свойством (N). Оказывается, что эти два свойства характеризуют абсолютно непрерывные функции.

Теорема 4 (С. Банах—М. А. Зарецкий). *Если $f(x)$ есть непрерывная функция с конечным изменением, обладающая свойством N, то эта функция абсолютно непрерывна.*

Доказательство. Допустим, что $f(x)$ не абсолютна непрерывна. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что ни при каком $\delta > 0$ неравенство $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$ [при взаимно не налегающих интервалах (a_k, b_k)], вообще говоря, не обеспечивает неравенства $\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) < \varepsilon_0$.

Заметив это, возьмем сходящийся положительный ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i$ и для каждого δ_i найдем такую систему взаимно не налегающих интервалов $\left(a_k^{(i)}, b_k^{(i)}\right)$ $(k=1, 2, \ldots, n_i)$, что

$$\sum_{k=1}^{n_i} \left(b_k^{(i)} - a_k^{(i)}\right) < \delta_i, \quad \sum_{k=1}^{n_i} \left(M_k^{(i)} - m_k^{(i)}\right) \geqslant \varepsilon_0,$$

где $M_k^{(i)}$ и $m_k^{(i)}$ суть наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ в $\left[a_k^{(i)}, b_k^{(i)}\right]$.

Положим, $E_i = \sum_{k=1}^{n_i} \left(a_k^{(i)}, b_k^{(i)}\right), \qquad A = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n}^{\infty} E_i.$

Легко видеть, что $mA=0$, откуда следует, что

$$mf(A)=0. \tag{1}$$

Введем в рассмотрение функцию $L_k^{(i)}(y)$, равную 1 или 0, смотря по тому, есть или нет хоть один корень уравнения

$$f(x)=y \tag{2}$$

в интервале $\left(a_k^{(i)}, b_k^{(i)}\right)$. Эта функция равна единице при y, содержащемся в интервале $\left(m_k^{(i)}, M_k^{(i)}\right)$ и равна нулю при y, лежащем вне сегмента $\left[m_k^{(i)}, M_k^{(i)}\right]$, так что[1])

$$\int_m^M L_k^{(i)}(y)\,dy = M_k^{(i)} - m_k^{(i)}. \tag{3}$$

Пусть $N_i(y) = \sum_{k=1}^{n_i} L_k^{(i)}(y)$. Ясно, что $N_i(y)$ есть число тех интервалов $\left(a_k^{(i)}, b_k^{(i)}\right)$, в которых есть хоть один корень уравнения (2). Поэтому

$$N_i(y) \leqslant N(y), \tag{4}$$

где $N(y)$ есть индикатриса Банаха функции $f(x)$. В силу (3),

$$\int_m^M N_i(y)\,dy \geqslant \varepsilon_0. \tag{5}$$

Для доказательства теоремы достаточно обнаружить, что почти для всех y из $[m, M]$ будет

$$\lim_{n\to\infty} N_i(y) = 0, \tag{6}$$

ибо индикатриса Банаха $N(y)$ суммируема, и из (4) и (6) будет следовать, что $\lim\limits_{i\to\infty} \int_m^M N_i(y)\,dy = 0$, а это противоречит неравенству (5).

Обозначим через B множество тех точек y, в которых (6) не выполняется, а через C множество тех y, в которых $N(y) = +\infty$. Поскольку $N(y)$ есть суммируемая функция, $mC = 0$, и для доказательства теоремы достаточно установить, что

$$B - C \subset f(A). \tag{7}$$

Пусть $y_0 \in B - C$. Тогда найдется такая последовательность $\{i_r\}$, что

$$N_{i_r}(y_0) \geqslant 1 \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots).$$

Это значит, что существует при каждом r такая точка x_{i_r}, что

$$f(x_{i_r}) = y_0, \qquad x_{i_r} \in E_{i_r}.$$

Но, ввиду того что $N(y_0) < +\infty$, среди точек x_{i_r} может быть лишь конечное число различных. Поэтому одна из них — назовем ее через x_0 — встречается в последовательности $\{x_{i_r}\}$ бесконечно много раз.

Итак, нами найдена такая точка x_0, которая принадлежит бесконечному множеству множеств E_i, и в которой $f(x_0) = y_0$.

Но тогда, очевидно, что $x_0 \in A$, а стало быть, $y_0 \in f(A)$. Этим доказано включение (7), а с ним и теорема.

Теорема 5 (Г. М. Фихтенгольц). *Пусть $F(y)$ и $f(x)$ две абсолютно непрерывные функции, причем значения $f(x)$ падают в сегмент, на котором задана $F(y)$. Для того чтобы суперпозиция $F[f(x)]$ была абсолютна непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы она имела конечное изменение.*[2])

Доказательство. Необходимость условия теоремы очевидна. Чтобы доказать его достаточность, отметим, что суперпозиция двух функций, обладающих свойством (N), также, очевидно, обладает этим свойством.

---

[1]) Как обычно, $m = \min\{f(x)\}$; $M = \max\{f(x)\}$.

[2]) Впервые эта теорема была найдена Г. М. Фихтенгольцем в 1922 г. В 1925 г. желая дать новое ее доказательство, М. А. Зарецкий установил теорему 4, которую тогда же нашел и С. Банах.

§ 4. Неопределенный интеграл Лебега

Пусть на сегменте $[a, b]$ задана суммируемая функция $f(t)$. Функция

$$\Phi(x) = C + \int_a^x f(t)\,dt$$

называется *неопределенным интегралом* (Лебега) функции $f(t)$, так что у последней есть бесконечное множество неопределенных интегралов, отличающихся друг от друга постоянным слагаемым.

Теорема 1. *Неопределенный интеграл $\Phi(x)$ есть абсолютно непрерывная функция.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ существует (см. теорему 8, § 2, гл. VI) такое $\delta > 0$, что для всякого измеримого множества e с мерой $me < \delta$ будет $\left|\int_e f(t)\,dt\right| < \varepsilon$.

В частности, если сумма длин конечной системы взаимно не налегающих интервалов (a_k, b_k) меньше, чем δ, то

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} f(t)\,dt\right| < \varepsilon,$$

и остается заметить, что

$$\int_{a_k}^{b_k} f(t)\,dt = \Phi(b_k) - \Phi(a_k), \text{ откуда } \left|\sum_{k=1}^{n} \{\Phi(b_k) - \Phi(a_k)\}\right| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что $\Phi(x)$ почти везде имеет конечную производную, являющуюся суммируемой функцией. Однако, можно установить гораздо более точное предложение.

Теорема 2. *Производная неопределенного интеграла*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

почти везде равна подынтегральной функции $f(x)$.

Доказательство. Пусть $p < q$ два вещественных числа. Обозначим через $E_{p,q}$ множество тех точек $[a, b]$, в которых функция $\Phi(x)$ дифференцируема и ее производная $\Phi'(x)$ удовлетворяет неравенству $\Phi'(x) > q > p > f(x)$. Легко видеть, что множество $E_{p,q}$ измеримо. Нашей ближайшей задачей является доказать, что

$$mE_{p,q} = 0. \tag{1}$$

С этой целью, взяв произвольное $\varepsilon > 0$, найдем такое $\delta > 0$, что неравенство $me < \delta$ влечет неравенство

$$\left|\int_e f(t)\,dt\right| < \varepsilon,$$

и построим такое открытое множество[1]) $G \subset [a, b]$, что

$$G \supset E_{p,q}, \quad mG < mE_{p,q} + \delta.$$

Если $x \in E_{p,q}$, то при всех достаточно малых $h > 0$ окажется

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} > q. \tag{2}$$

Ясно, что множество $E_{p,q}$ покрыто сегментами $[x, x+h]$ [где $h > 0$ удовлетворяет условию (2)] в смысле Витали. Можно считать при этом, что все сегменты $[x, x+h]$ лежат в G. Поэтому можно выделить такое счетное множество этих сегментов

$$[x_1, x_1+h_1], \quad [x_2, x_2+h_2], \ldots,$$

чтобы они попарно не пересекались и чтобы оказалось

$$m\left\{E_{p,q} - \sum_{k=1}^{\infty} [x_k, x_k+h_k]\right\} = 0.$$

В силу (2), окажется, что

$$\frac{1}{h_k} \int_{x_k}^{x_k+h_k} f(t)\,dt > q.$$

Если мы положим $S = \sum_{k=1}^{\infty} [x_k, x_k+h_k]$, то из последнего неравенства следует, что $\int_S f(t)\,dt > q \cdot mS$, или, что то же самое,

$$\int_S f(t)\,dt > q\,[mE_{p,q} + \theta\varepsilon] \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 1). \tag{3}$$

С другой стороны, $S \subset G$, а потому $S - E_{p,q} \subset G - E_{p,q}$ и $m[S - E_{p,q}] < \delta$, так что

$$\int_{S - E_{p,q}} f(t)\,dt < \varepsilon,$$

и следовательно,[2])

$$\int_S f(t)\,dt < \int_{E_{p,q}} f(t)\,dt + \varepsilon. \tag{4}$$

Но на множестве $E_{p,q}$ будет $f(t) < p$ и, стало быть,

$$\int_{E_{p,q}} f(t)\,dt \leqslant p \cdot mE_{p,q}. \tag{5}$$

---

[1]) Можно считать, что точки a и b не входят в $E_{p,q}$; пусть, кроме того, $\delta < \varepsilon$.

[2]) Следует обратить внимание на то, что $m(E_{p,q} - S) = 0$ и, стало быть,

$$\int_{E_{p,q}} f\,dt = \int_{SE_{p,q}} f\,dt.$$

Из (3), (4) и (5) следует, что $q[mE_{p,q}+\theta\varepsilon]<pmE_{p,q}+\varepsilon$, откуда, ввиду произвольности ε, вытекает, что $qmE_{p,q}\leqslant pmE_{p,q}$, а это возможно лишь при $mE_{p,q}=0$.

Итак, равенство (1) доказано.

Пусть теперь E обозначает множество тех точек $[a, b]$, в которых функция $\Phi(x)$ дифференцируема и $\Phi'(x)>f(x)$.

Тогда $E=\sum\limits_{(p,q)} E_{p,q}$, где суммирование распространено на все пары (p, q) рациональных чисел, в которых $p<q$. В силу (1) будет $mE=0$.

Иначе говоря, если A есть множество точек, в которых существует производная $\Phi'(x)$, то почти везде на A будет

$$\Phi'(x)\leqslant f(x). \tag{6}$$

Отметив это, положим $g(x)=-f(x)$, $\Gamma(x)=\int\limits_a^x g(t)\,dt$.

Легко понять, что $\Gamma(x)=-\Phi(x)$, так что $\Gamma'(x)$ существует во всех точках A. Применяя уже доказанную часть теоремы к функции $\Gamma(x)$, получим, что почти везде на A

$$\Gamma'(x)\leqslant g(x),$$

или, что то же самое,

$$\Phi'(x)\geqslant f(x). \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что почти везде на A, а значит, и почти везде на $[a, b]$

$$\Phi'(x)=f(x),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Абсолютно непрерывная функция является неопределенным интегралом своей производной.*

Доказательство. Пусть функция $F(x)$ абсолютно непрерывна. Ее производная $F'(x)$ существует почти везде и суммируема.

Положим, $\Phi(x)=F(a)+\int\limits_a^x F'(t)\,dt$. Эта функция также абсолютно непрерывна и почти везде $\Phi'(x)=F'(x)$.

Значит (следствие теоремы 2, § 2), разность $F(x)-\Phi(x)$ постоянна, но, так как эта разность обращается в 0 при $x=a$, то функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ тождественны.

Теорему 2 можно значительно усилить. Для этого дадим

Определение. Если в точке x будет $f(x)\neq\pm\infty$ и

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt=0,$$

то точка x называется *точкой Лебега* функции $f(t)$.

Теорема 4. Если x точка Лебега функции $f(t)$, то в этой точке неопределенный интеграл $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ имеет производной число $f(x)$.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}-f(x)=\frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h}\{f(t)-f(x)\}\,dt,$$

откуда

$$\left|\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}-f(x)\right|\leqslant\frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt,$$

что и доказывает теорему. Заметим, что обратное предложение, вообще говоря, неверно.

Теорема 5. Если функция $f(x)$ суммируема на $[a, b]$, то почти всякая точка $[a, b]$ есть ее точка Лебега.

Доказательство. Пусть r — рациональное число. Функция $|f(t)-r|$ суммируема на $[a, b]$, а потому почти для всех точек $x\in[a, b]$ будет

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h}|f(t)-r|\,dt=|f(x)-r|. \tag{8}$$

Обозначим через $E(r)$ множество тех точек $[a, b]$, в которых (8) не выполняется. Ясно, что $mE(r)=0$. Перенумеруем все рациональные числа и положим

$$E=\sum_{n=1}^{\infty}E(r_n)+E(|f|=+\infty).$$

Тогда $mE=0$, и достаточно обнаружить, что все точки множества $[a, b]-E$ суть точки Лебега функции $f(t)$.

Пусть $x_0\in[a, b]-E$. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и найдем такое рациональное число r_n, что $|f(x_0)-r_n|<\frac{\varepsilon}{3}$.

Тогда, очевидно, $||f(t)-r_n|-|f(t)-f(x_0)||<\frac{\varepsilon}{3}$ и, стало быть,

$$\left|\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-r_n|\,dt-\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|\,dt\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

Но (поскольку $x_0\overline{\in}E$) для $|h|<\delta(\varepsilon)$ окажется

$$\left|\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-r_n|\,dt-|f(x_0)-r_n|\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

т. е.

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-r_n|\,dt<\frac{2}{3}\varepsilon,$$

и, стало быть, для этих h будет

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|\,dt<\varepsilon.$$

Теорема 6. *Всякая точка непрерывности суммируемой функции $f(x)$ есть ее точка Лебега.*

Доказательство. Пусть $f(t)$ непрерывна в точке x. Тогда всякому $\varepsilon>0$ отвечает такое $\delta>0$, что при $|t-x|<\delta$ окажется $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$. Но тогда при $|h|<\delta$ будет

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt<\varepsilon,$$

откуда и следует теорема.

Из теорем 1 и 3 вытекает, что для того чтобы функция $\Phi(x)$ служила неопределенным интегралом суммируемой функции, необходимо и достаточно, чтобы она была абсолютно непрерывна. В связи с этим естественно поставить вопрос о характеристическом признаке функции, являющейся неопределенным интегралом функции, входящей в L_p при $p>1$. Ответом служит

Теорема 7 (Ф. Рисс). *Для того, чтобы функция $F(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ представлялась в форме*

$$F(x)=C+\int\limits_a^x f(t)\,dt, \tag{9}$$

где $f(t)\in L_p$ $(p>1)$, необходимо и достаточно, чтобы при всяком разложении $[a, b]$ на части точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ было

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|F(x_{k+1})-F(x_k)|^p}{(x_{k+1}-x_k)^{p-1}}\leqslant K, \tag{10}$$

где K не зависит от способа разложения $[a, b]$. [1])

Доказательство. Необходимость условия (10) почти очевидна. В самом деле, в силу неравенства Гёльдера [глава 7, § 6, формула (1)]

$$|F(x_{k+1})-F(x_k)|=\left|\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}f(t)\,dt\right|\leqslant\sqrt[q]{x_{k+1}-x_k}\cdot\sqrt[p]{\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}|f(t)|^p\,dt},$$

где $q=\dfrac{p}{p-1}$. Откуда

$$\frac{|F(x_{k+1})-F(x_k)|^p}{(x_{k+1}-x_k)^{p-1}}\leqslant\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}|f(t)|^p\,dt,$$

и выполняется (10), причем за число K можно принять интеграл $\int\limits_a^b|f(t)|^p\,dt$.

---

[1]) Если $p=1$, то (10) есть условие конечности изменения функции $F(x)$. Таким образом, это условие остается необходимым, но перестает быть достаточным для представимости $F(x)$ в форме (9) с $f(t)\in L$.

Достаточность условия (10) устанавливается сложнее. Прежде всего заметим, что неравенство (10) лишь усилится, если отбросить некоторые слагаемые из его левой части. Поэтому для любой конечной системы взаимно не налегающих интервалов (a_k, b_k) $(k=1, 2, \ldots, n)$, содержащейся в $[a, b]$, будет

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|F(b_k)-F(a_k)|^p}{(b_k-a_k)^{p-1}} \leqslant K.$$

Но, в силу сумматорного неравенства Гёльдера [гл. VII, § 6, формула (8)],

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k)-F(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} \frac{|F(b_k)-F(a_k)|}{(b_k-a_k)^{\frac{p-1}{p}}} (b_k-a_k)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} \frac{|F(b_k)-F(a_k)|^p}{(b_k-a_k)^{p-1}}} \cdot \sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n} (b_k-a_k)}$$

и, стало быть,

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k)-F(a_k)| \leqslant \sqrt[p]{K} \cdot \sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n} (b_k-a_k)},$$

откуда вытекает абсолютная непрерывность функции $F(x)$. Значит, эта функция представима в форме (9), где $f(t) \in L$. Остается обнаружить, что $f(t) \in L_p$.

С этой целью, разложив $[a, b]$ на n равных частей точками $x_k^{(n)} = a + \frac{k}{n}(b-a)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$, введем функцию $f_n(t)$, полагая

$$f_n(t) = \frac{F\left(x_{k+1}^{(n)}\right) - F\left(x_k^{(n)}\right)}{x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}}, \quad \text{если} \quad x_k^{(n)} < t < x_{k+1}^{(n)}.$$

В самих же точках деления полагаем $f_n\left(x_k^{(n)}\right) = 0$.

Легко видеть, что почти везде [исключение могут составить точки деления и точки, в которых $F'(x) \neq f(x)$] будет[1] $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(t) = f(t)$. Отсюда, по теореме Фату

$$\int_a^b |f(t)|^p\, dt \leqslant \sup \left\{\int_a^b |f_n(t)|^p\, dt\right\}.$$

---

[1]) Если точка x не является точкой деления и в ней существует определенная $F'(x)$, то x лежит в каждом из бесконечной последовательности интервалов $\left(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_n+1}^{(n)}\right)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Так как $x_{k_n+1}^{(n)} - x_{k_n}^{(n)} = \frac{b-a}{n} \to 0$, то каждое из отношений $\frac{F\left(x_{k_n+1}^{(n)}\right) - F(x)}{x_{k_n+1}^{(n)} - x}$, $\frac{F(x) - F\left(x_{k_n}^{(n)}\right)}{x - x_{k_n}^{(n)}}$ с возрастанием n стремится к $F'(x)$. Но $f_n(x) = \frac{F\left(x_{k_n+1}^{(n)}\right) - F\left(x_{k_n}^{(n)}\right)}{x_{k_n+1}^{(n)} - x_{k_n}^{(n)}}$ лежит между этими отношениями и потому $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = F'(x)$.

Но

$$\int_a^b |f_n(t)|^p\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} |f_n(t)|^p\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left|F\left(x_{k+1}^{(n)}\right) - F\left(x_k^{(n)}\right)\right|^p}{\left(x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}\right)^{p-1}} \leqslant K$$

и, стало быть, $\int\limits_a^b |f(t)|^p\,dt < +\infty$.

Теорема доказана.

В заключение рассмотрим вопрос о том, каково *полное изменение* неопределенного интеграла.

Теорема 8. *Пусть на* $[a, b]$ *дана суммируемая функция* $f(t)$. *Если*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad \text{то} \quad \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(F) = \int_a^b |f(t)|\,dt,$$

т. е. *полное изменение абсолютно непрерывной функции равно интегралу от модуля ее производной.*

Доказательство. Если $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ есть некоторое разложение $[a, b]$ на части, то

$$\sum_{k=0}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t)|\,dt =$$

$$= \int_a^b |f(t)|\,dt,$$

откуда вытекает, что

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(F) \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Чтобы доказать, что здесь на самом деле имеет место точное равенство, положим $(a, b) = E$ и пусть $P = E(f \geqslant 0)$, $N = E(f < 0)$. Тогда

$$\int_a^b |f(t)|\,dt = \int_P f(t)\,dt - \int_N f(t)\,dt.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$. Благодаря абсолютной непрерывности интеграла, существует такое $\delta > 0$, что для любого измеримого множества $e \subset [a, b]$ с мерой $me < \delta$ будет $\int\limits_e |f(t)|\,dt < \varepsilon$.

Пусть $F(P)$ и $F(N)$ замкнутые множества, содержащиеся соответственно в P и N и такие, что

$$m[P - F(P)] < \delta, \quad m[N - F(N)] < \delta.$$

Тогда

$$\int_a^b |f(t)|\,dt < \int_{F(P)} f(t)\,dt - \int_{F(N)} f(t)\,dt + 2\varepsilon,$$

Согласно теореме отделимости найдутся открытые множества $\Gamma(P)$ и $\Gamma(N)$ такие, что $\Gamma(P) \supset F(P)$, $\Gamma(N) \supset F(N)$, $\Gamma(P) \cdot \Gamma(N) = 0$, при этом можно считать указанные множества содержащимися в (a, b). Найдем, далее, такие открытые ограниченные множества $A(P)$ и $A(N)$, чтобы они содержали, соответственно, $F(P)$ и $F(N)$ и чтобы было $m[A(P) - F(P)] < \delta$, $m[A(N) - F(N)] < \delta$. Сделав это, полагаем $G(P) = A(P) \cdot \Gamma(P)$, $G(N) = A(N) \cdot \Gamma(N)$.

Это тоже открытые множества, содержащиеся в (a, b), не пересекающиеся, содержащие соответственно $F(P)$ и $F(N)$, и такие, что $m[G(P) - F(P)] < \delta$, $m[G(N) - F(N)] < \delta$. Поэтому

$$\int_a^b |f(t)|\, dt < \int_{G(P)} f(t)\, dt - \int_{G(N)} f(t)\, dt + 4\varepsilon.$$

Множество $G(P)$ является суммой своих составляющих интервалов. Взяв достаточно большое конечное число этих интервалов, мы получим множество $B(P)$, которое по мере отличается от $G(P)$ меньше, чем на δ. Тогда окажется $\int_{G(P)} f(t)\, dt - \int_{B(P)} f(t)\, dt < \varepsilon$.

Пусть $B(P) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k, \mu_k)$. Тогда

$$\int_{B(P)} f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{\lambda_k}^{\mu_k} f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} [F(\mu_k) - F(\lambda_k)].$$

Итак,

$$\int_{G(P)} f(t)\, dt < \sum_{k=1}^{n} [F(\mu_k) - F(\lambda_k)] + \varepsilon.$$

Аналогичным образом можно найти конечное число составляющих интервалов множества $G(N)$, пусть это будут (σ_1, τ_1), (σ_2, τ_2), $\ldots$, (σ_m, τ_m), такого рода, что

$$\int_{G(N)} f(t)\, dt > \sum_{i=1}^{m} [F(\tau_i) - F(\sigma_i)] - \varepsilon.$$

Сопоставляя все сказанное, мы видим, что

$$\int_a^b |f(t)|\, dt < \sum_{k=1}^{n} [F(\mu_k) - F(\lambda_k)] - \sum_{i=1}^{m} [F(\tau_i) - F(\sigma_i)] + 6\varepsilon,$$

откуда и подавно

$$\int_a^b |f(t)|\, dt < \sum_{k=1}^{n} |F(\mu_k) - F(\lambda_k)| + \sum_{i=1}^{m} |F(\tau_i) - F(\sigma_i)| + 6\varepsilon.$$

Но интервалы (λ_k, μ_k) не пересекаются ни между собой, ни с интервалами (σ_i, τ_i), которые также не пересекаются друг с другом. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} |F(\mu_k) - F(\lambda_k)| + \sum_{i=1}^{m} |F(\tau_i) - F(\sigma_i)| \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(F).$$

Таким образом

$$\int_a^b |f(t)|\,dt < \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(F) + 6\varepsilon,$$

откуда, ввиду произвольности ε, и вытекает теорема.

§ 5. Замена переменной в интеграле Лебега

Общеизвестно, какое большое значение имеет в интегральном исчислении вопрос о замене переменной интегрирования. Здесь мы рассмотрим этот вопрос для интегралов Лебега, причем ограничимся случаем[1]), когда старая переменная интегрирования x является строго монотонной и абсолютно непрерывной функцией новой переменной t. Для определенности будем считать эту функцию возрастающей. Итак, пусть

$$x = \varphi(t) \qquad [p \leqslant t \leqslant q,\ a = \varphi(p),\ b = \varphi(q)],$$

где $\varphi(t)$ абсолютно непрерывна и строго возрастает на $[p, q]$.

Лемма 1. *Если E_t есть измеримое множество, содержащееся в $[p, q]$, а $E_x = \varphi(E_t)$ его образ при отображении $x = \varphi(t)$, то*[2])

$$mE_x = \int_{E_t} \varphi'(t)\,dt. \tag{1}$$

Доказательство. Измеримость E_x была доказана в § 3. Для случая, когда $E_t = [\alpha, \beta]$, формула (1) очевидна, ибо в этом случае $E_x = [\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$ и $mE_x = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = \int_\alpha^\beta \varphi'(t)\,dt$.

Аналогично обстоит дело, когда $E_t = (\alpha, \beta)$. Но тогда ясно, что (1) имеет место всякий раз, когда E_t есть открытое множество (в этом случае и E_x будет открытым множеством). Переходя к дополнениям, убеждаемся в справедливости (1) для случая, когда E_t есть замкнутое множество. Рассмотрим, наконец, общий случай, когда E_t есть произвольное измеримое множество. Взяв $\varepsilon > 0$, найдем такое замкнутое множество F_x и открытое множество G_x, чтобы оказалось [3])

$$F_x \subset E_x \subset G_x \subset (a, b),\ mF_x > mE_x - \varepsilon,\ mG_x < mE_x + \varepsilon.$$

---

[1]) Более обстоятельно вопрос изложен в книге Ш. Валле-Пуссена «Курс анализа бесконечно малых», т. I, стр. 298 (ГТТИ, 1933).

[2]) Чтобы символ $\varphi'(t)$ был всюду определен, мы, как и в гл. VIII, условимся, что $\varphi'(t) = 0$ на том множестве (меры 0), где у $\varphi(t)$ нет производной.

[3]) Не ограничивая общности, можно считать, что p и q не входят в E_t.

Пусть F_t и G_t суть прообразы множеств F_x и G_x. По доказанному (очевидно, что F_t замкнуто, а G_t открыто) будет

$$\int_{F_t} \varphi'(t)\,dt = mF_x, \quad \int_{G_t} \varphi'(t)\,dt = mG_x.$$

Так как $\varphi'(t) \geqslant 0$, то

$$\int_{F_t} \varphi'(t)\,dt \leqslant \int_{E_t} \varphi'(t)\,dt \leqslant \int_{G_t} \varphi'(t)\,dt.$$

Таким образом,

$$mF_x \leqslant \int_{F_t} \varphi'(t)\,dt \leqslant mG_x$$

и, тем более,

$$mE_x - \varepsilon < \int_{E_t} \varphi'(t)\,dt < mE_x + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть e_x есть измеримое множество меры* 0, *содержащееся в* $[a,\ b]$, *а e_t его прообраз. Тогда подмножество e_t^* тех точек e_t, где не выполнено соотношение*[1])

$$\varphi'(t) = 0 \tag{2}$$

имеет меру 0.

Доказательство. Отметим, что измеримости множества e_t мы не утверждаем.[2]) Построим [можно считать, что $e_x \subset (a,\ b)$] последовательность открытых множеств

$$(a,\ b) \supset G_x^{(1)} \supset G_x^{(2)} \supset G_x^{(3)} \supset \ldots,\ G_x^{(n)} \supset e_x,\ mG_x^{(n)} \to 0$$

и пусть

$$E_x = \prod_{n=1}^{\infty} G_x^{(n)}.$$

Если $G_t^{(n)}$ суть прообразы $G_x^{(n)}$, а E_t есть прообраз E_x, то $G_t^{(n)}$ открыты и $E_t = \prod\limits_{n=1}^{\infty} G_t^{(n)}$, откуда следует измеримость E_t. Ясно, что $mE_x = 0$. Значит, по лемме 1,

$$\int_{E_t} \varphi'(t)\,dt = 0. \tag{3}$$

Если через E_t^* обозначить множество тех точек E_t, где не выполнено (2), то из (3) вытекает, что $mE_t^* = 0$. Остается заметить, что $e_t^* \subset E_t^*$, ибо $e_x \subset E_x$ и $e_t \subset E_t$.

---

[1]) Иными словами, e_t^* есть та часть e_t, где существует (может быть бесконечная) $\varphi'(t) > 0$.

[2]) Хотя у $\varphi(t)$ есть обратная функция, но последняя не обязана быть абсолютно непрерывной.

Теорема. *Пусть $f(x)$ функция, суммируемая на*[1] $[a, b]$. *Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_p^q f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $f(x)$ непрерывна[2] на $[a, b]$, так что интеграл, стоящий в (4) слева, можно понимать в римановском смысле. Разложим $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ и пусть M_k и m_k суть наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ на $[x_k, x_{k+1}]$. Если $\varphi(t_k) = x_k$, то для $t \in [t_k, t_{k+1}]$ будет $m_k \leqslant f[\varphi(t)] \leqslant M_k$, откуда в связи с неравенством $\varphi'(t) \geqslant 0$ и соотношением

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi'(t)\,dt = x_{k+1} - x_k$$

следует, что интеграл

$$(L) \int_{t_k}^{t_{k+1}} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

содержится между числами $m_k(x_{k+1} - x_k)$ и $M_k(x_{k+1} - x_k)$. Стало быть, интеграл, стоящий в (4) справа, содержится между суммами Дарбу функции $f(x)$, отвечающими произведенному дроблению. Отсюда и следует (4).

Пусть теперь $f(x)$ измеримая, ограниченная функция $|f(x)| \leqslant M$. Найдется последовательность непрерывных функций $\{g_n(x)\}$, для которой почти везде на $[a, b]$ будет

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x). \tag{5}$$

Можно считать, что $|g_n(x)| \leqslant M$. Тогда (4) будет верно, если f заменить на g_n. Отсюда без труда следует, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_p^q g_n[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{6}$$

Покажем, что почти везде на $[p, q]$ будет

$$\lim_{n\to\infty} g_n[\varphi(t)]\,\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t). \tag{7}$$

Обозначим через e_x множество тех x, для которых нарушено (5). Это измеримое множество и $me_x = 0$. Обозначим через e_t прообраз множества e_x и пусть e_t^* есть подмножество тех t из e_t, для которых не выполнено (2).

Если $t \overline{\in} e_t$, то $\varphi(t) \overline{\in} e_x$, и (7) выполнено. Точно так же, если $t \in e_t - e_t^*$, то $\varphi'(t) = 0$, и снова выполнено (7). Таким обра-

[1]) Мы сохраняем введенные выше обозначения.

[2]) Тогда и $f[\varphi(t)]$, очевидно, непрерывна на $[p, q]$.

зом, единственные точки t, где может нарушаться (7), это точки множества e_t^*, а по лемме 2 будет $me_t^* = 0$.

Из того, что (7) имеет место почти везде на $[p, q]$, следует измеримость произведения[1] $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. Кроме, того

$$|g_n[\varphi(t)]\varphi'(t)| \leqslant M\varphi'(t)$$

и (7) обеспечивает возможность перейти к пределу в (6) под знаком интеграла, что и приводит к (4).

Пусть, наконец, $f(x)$ произвольная суммируемая функция. Можно предположить ее неотрицательной, ибо всякая суммируемая функция есть разность двух неотрицательных суммируемых же функций. Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } f(x) \leqslant n, \\ n & \text{при } f(x) > n. \end{cases}$$

По доказанному (4) будет верно, если заменить f на f_n. Отсюда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_p^q f_n[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \tag{8}$$

Но всюду на $[p, q]$ будет[2] $f[\varphi(t)]\varphi'(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n[\varphi(t)]\varphi'(t)$ и, кроме того, произведение $f_n[\varphi(t)]\varphi'(t)$ возрастает вместе с n. Поэтому, в силу теоремы 10 (Б. Леви) из § I, гл. VI, будет

$$\int_p^q f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_p^q f_n[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt,$$

откуда, в связи с (8), и вытекает (4).

Следствие. *Справедливы формулы*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a-h}^{b-h} f(t+h)\,dt, \quad \int_a^b f(x)\,dx = k\int_{a/k}^{b/k} f(kt)\,dt \quad (k \neq 0).$$

§ 6. Точки плотности. Аппроксимативная непрерывность

Пусть дано измеримое множество E. Взяв произвольную точку x и число $h > 0$, положим $E(x_0, h) = E \cdot [x_0 - h, x_0 + h]$.

Это тоже измеримое множество. Рассмотрим отношение

$$\frac{mE(x_0, h)}{2h}. \tag{1}$$

Его естественно считать «средней плотностью» множества E в сегменте $[x_0 - h, x_0 + h]$.

Определение 1. Предел отношения (1) при $h \to 0$ называется *плотностью* множества E в точке x_0 и обозначается через $D_{x_0}E$.

---

[1]) Этот факт замечателен тем, что множитель $f[\varphi(t)]$ вовсе не обязан быть измеримым.

[2]) Это обеспечивает измеримость произведения $f(\varphi)\varphi'$.

Если $D_{x_0}E=1$, то x_0 *есть точка плотности* множества E, а если $D_{x_0}E=0$, то x_0 — *точка разрежения* E.

Заметим, что, давая это определение, мы не считаем, что $x_0 \in E$. Далее, ясно, что измеримое множество вовсе не обязано иметь определенную плотность в каждой точке прямой.

Однако имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Почти все точки измеримого множества E суть его точки плотности.*

Доказательство. Пусть множество E измеримо. Возьмем какой-либо сегмент $[\alpha, \beta]$, содержащий множество E, и пусть $a=\alpha-1$, $b=\beta+1$. Тогда при $x \in E$ и $h \leqslant 1$ мы гарантированы, что сегмент $[x-h, x+h]$ не выходит из $[a, b]$. Впредь не оговаривая этого, мы будем считать, что $h \leqslant 1$.

Введем характеристическую функцию $\varphi(x)$ множества E

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1 \text{ при } x \in E, \\ 0 \text{ при } x \overline{\in} E, \end{cases}$$

рассматривая ее только на $[a, b]$. Эта функция измерима и ограничена. Пусть $\Phi(x)=\int\limits_a^x \varphi(t)\,dt$. Почти везде на $[a, b]$ будет $\Phi'(x)=$ $=\varphi(x)$ и, в частности, почти везде на E

$$\Phi'(x)=1. \tag{2}$$

Покажем, что точки, где имеет место (2), суть точки плотности множества E. Действительно, в такой точке

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\lim_{n\to 0}\frac{\Phi(x)-\Phi(x-h)}{h}=1.$$

откуда

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x-h)}{2h}=1.$$

Но $\Phi(x+h)-\Phi(x-h)=\int\limits_{x-h}^{x+h}\varphi(t)\,dt=mE(x, h)$, так что $D_xE=$ $=\lim\limits_{h\to 0}\frac{mE(x, h)}{2h}=1$, что и требовалось доказать.

В тесной связи с понятием о точках плотности находится одно важное обобщение понятия непрерывности функции.

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ задана на сегменте $[a, b]$ и $x_0 \in [a, b]$. Если существует такое измеримое множество E, лежащее на $[a, b]$ и имеющее точку x_0 точкой плотности,[1]) что

---

[1]) Если $x_0=a$, то вместо того, чтобы множество E имело x_0 точкой плотности, нужно требовать, чтобы в x_0 в единицу обращалась *правая плотность* множества E, т. е. чтобы было $\lim\limits_{h\to 0}\frac{m\{E\cdot[a, a+h]\}}{h}=1$. Для точки b определение аппроксимативной непрерывности также нужно несколько изменить, введя в рассмотрение *левую плотность*.

$f(x)$ вдоль E непрерывна в точке x_0, то говорят, что $f(x)$ *аппроксимативно непрерывна* в точке x_0.

Ясно, что всякая точка непрерывности функции и подавно есть ее точка аппроксимативной непрерывности. Измеримая функция может вовсе не иметь точек непрерывности. Такова, например, функция, равная 0 в иррациональных и 1 в рациональных точках.

Напротив, справедлива следующая теорема.

Теорема 2 (А. Данжуа). *Если $f(x)$ измеримая и почти везде конечная функция, заданная на сегменте $[a, b]$, то она аппроксимативно непрерывна почти во всех точках $[a, b]$.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$ и, опираясь на теорему Н. Н. Лузина, найдем такую непрерывную функцию $\varphi(x)$, что $mE(f \neq \varphi) < \varepsilon$.

Пусть A есть множество тех точек плотности множества $E(f = \varphi)$, которые принадлежат последнему. В силу предыдущей теоремы $mA = mE(f = \varphi) > b - a - \varepsilon$.

Если $x_0 \in A$, то $f(x)$, очевидно, аппроксимативно непрерывна в этой точке, ибо за множество E, фигурирующее в определении 2, можно взять множество $E(f = \varphi)$. Поэтому множество H всех точек аппроксимативной непрерывности $f(x)$ имеет внутреннюю меру $m_* H \geqslant mA > b - a - \varepsilon$, откуда ($\varepsilon$ произвольно!) $m_* H \geqslant b - a$.

Но $H \subset [a, b]$, так что $b - a \leqslant m_* H \leqslant m^* H \leqslant b - a$. Стало быть, H измеримо и $mH = b - a$, что и требовалось доказать.

Замечание. Данное выше определение понятия плотности можно обобщить. Именно, условимся называть плотностью множества E в точке x_0 предел отношения $\frac{mE(x_0, h_1, h_2)}{h_1 + h_2}$, когда $h_1 > 0$ и $h_2 > 0$ независимо друг от друга стремятся к нулю, причем $E(x_0, h_1, h_2)$, есть часть множества E, находящаяся в сегменте $[x_0 - h_1, x_0 + h_2]$. Однако это обобщение понятия плотности не меняет класса точек разрежения, а стало быть, и класса точек плотности множества E. Действительно, пусть x_0 точка разрежения множества E в смысле определения 1. Взяв числа $h_1 > 0$ и $h_2 > 0$, назовем через h большее из них. Тогда

$$E(x_0, h_1, h_2) \subset E(x_0, h),$$

а потому

$$\frac{mE(x_0, h_1, h_2)}{h_1 + h_2} \leqslant 2 \cdot \frac{mE(x_0, h)}{2h}.$$

Так как правая часть этого неравенства стремится к нулю вместе с h, то $\lim\limits_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}} \frac{mE(x_0, h_1, h_2)}{h_1 + h_2} = 0$ и x_0 есть точка разрежения множества E и в смысле обобщенного определения плотности. Обратное утверждение очевидно. Именно поэтому мы и дали выше определение плотности в частной его форме. Ясно, например, что определение точки аппроксимативной непрерывности не зависит от того, каково положенное в его основу определение плотности.

§ 7. Добавления к теории функций с конечным изменением и интегралов Стилтьеса

Пусть $f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ непрерывная функция с конечным изменением. Ее производная $f'(x)$ почти везде существует и суммируема. Положим $\varphi(x) = f(a) + \int\limits_a^x f'(t)\,dt$, $r(x) = f(x) - \varphi(x)$. Тогда $f(x) = \varphi(x) + r(x)$, где $\varphi(x)$ абсолютно непрерывная функция [причем $\varphi(a) = f(a)$], а $r(x)$ непрерывная функция с конечным изменением, производная которой, очевидно, почти везде равна нулю. Ясно, что $r(x)$ исчезает лишь тогда, когда сама $f(x)$ абсолютно непрерывна.

Определение. Отличная от постоянной непрерывная функция с конечным изменением, производная которой почти везде равна нулю, называется *сингулярной* функцией.

Ясно, что сингулярная функция не может быть абсолютно непрерывной, ибо иначе (теорема 2, § 2) она была бы постоянной. Примером сингулярной функции служит функция $\Theta(x)$, построенная в конце § 2, гл. VIII.

Теорема 1. *Непрерывная функция с конечным изменением $f(x)$ единственным образом представляется в форме*

$$f(x) = \varphi(x) + r(x),$$

где $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна и $\varphi(a) = f(a)$, а $r(x)$ — сингулярная функция (или нуль).

Доказательство. Возможность такого представления установлена выше. Обнаружим его единственность. Если бы таких представлений было два:

$$f(x) = \varphi(x) + r(x) = \varphi_1(x) + r_1(x),$$

то мы имели бы

$$\varphi(x) - \varphi_1(x) = r_1(x) - r(x).$$

Отсюда — производная разности $\varphi(x) - \varphi_1(x)$ почти везде равна 0, а так как эта разность абсолютно непрерывна, то она постоянна. Но $\varphi(a) = \varphi_1(a) = f(a)$. Значит, $\varphi(x) \equiv \varphi_1(x)$, откуда и $r(x) \equiv r_1(x)$.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ возрастает, то обе ее компоненты $\varphi(x)$ и $r(x)$ также возрастают.*

Доказательство. Очевидно, что $f'(x) \geqslant 0$ всюду, где эта производная существует. Отсюда вытекает, что функция $\varphi(x) = \varphi(a) + \int\limits_a^x f'(t)\,dt$, возрастает. Далее, теорема 5, § 2, гл. VIII дает нам, что $\int\limits_x^y f'(t)\,dt \leqslant f(y) - f(x)$ $(y > x)$, откуда

$$\varphi(y) - \varphi(x) \leqslant f(y) - f(x), \text{ или } r(x) \leqslant r(y).$$

Следствие. *Для того чтобы возрастающая непрерывная функция $f(x)$ была абсолютно непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы было*

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a). \tag{1}$$

Необходимость условия (1) очевидна. Обратно, пусть $f(x)$ не абсолютно непрерывна и $\varphi(x)$ и $r(x)$ суть абсолютно непрерывная и сингулярная компоненты $f(x)$. Тогда

$$f(b) - f(a) = \varphi(b) - \varphi(a) + r(b) - r(a),$$

или

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx + r(b) - r(a). \tag{2}$$

Но $r(x)$ возрастает и отлично от постоянной. Значит, $r(b) > r(a)$ и (1) не выполняется, откуда и следует достаточность условия теоремы.

В § 3, гл. VIII мы видели, что всякая функция с конечным изменением представима в форме суммы своей функции скачков и непрерывной функции с конечным изменением.

Сопоставив это с теоремой 1, мы получаем возможность представления всякой функции с конечным изменением в форме $f(x) = \varphi(x) + r(x) + s(x)$, где $\varphi(x)$ абсолютно непрерывная функция, $r(x)$ сингулярная функция, а $s(x)$ функция скачков (причем некоторые слагаемые могут здесь отсутствовать).

В § 7, гл. VIII мы свели вопрос о вычислении интеграла Стилтьеса $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ к случаю, когда $g(x)$ непрерывна. Оказывается, что случай, когда $g(x)$ абсолютно непрерывна, сводится к интегрированию в смысле Лебега.

Теорема 3. *Если $f(x)$ непрерывна, а $g(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$, то*

$$(S)\int_a^b f(x)\,dg(x) = (L)\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx. \tag{3}$$

Доказательство. Существование обоих интегралов очевидно. Докажем их равенство.

Для этого оценим разность между суммой

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,[g(x_{k+1}) - g(x_k)]$$

и интегралом

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx.$$

Так как

$$g(x_{k+1}) - g(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} g'(x)\,dx,$$

то

$$\sigma - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(\xi_k) - f(x)]\,g'(x)\,dx. \tag{4}$$

Если колебание функции $f(x)$ на $[x_k, x_{k+1}]$ есть ω_k, то из (4) следует, что

$$\left|\sigma - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} |g'(x)|\,dx \leqslant \alpha \int_a^b |g'(x)|\,dx,$$

где $\alpha = \max\{\omega_k\}$. Если длины сегментов $[x_k, x_{k+1}]$ стремятся к 0, то и $\alpha \to 0$, откуда следует, что σ стремится к интегралу $\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$. Но так как по определению $\lim \sigma$ есть интеграл $\int_a^b f(x)\,dg(x)$, то теорема доказана.

Таким образом, вопрос о вычислении интеграла Стилтьеса не сводится к лебегову интегрированию и суммированию ряда лишь тогда, когда в составе $g(x)$ есть сингулярная функция.

Аналогично теореме 3 доказывается и

Теорема 4. *Формула* (3) *справедлива и тогда, когда* $f(x)$ *имеет на* $[a, b]$ *конечное изменение, а* $g(x)$ *абсолютно непрерывна.*

Действительно, существование обоих интегралов и в этом случае очевидно. Точно также не требует новых разъяснений и соотношение (4). Если v_k есть полное изменение функции $f(x)$ на $[x_k, x_{k+1}]$, то (4) приводит к оценке

$$\left|\sigma - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} v_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} |g'(x)|\,dx \leqslant \beta \mathop{\mathrm{V}}_a^b(f),$$

где β означает наибольший из интегралов $\int_{x_k}^{x_{k+1}} |g'(x)|\,dx$. Остается заметить, что β стремится к нулю вместе с наибольшей из разностей $x_{k+1} - x_k$.

С помощью теоремы 3 (или 4) можно установить некоторые свойства интегралов Лебега. Например:

Теорема 5 (Интегрирование по частям). *Если* $f(x)$ *и* $g(x)$ *абсолютно непрерывны, то*

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,f'(x)\,dx = [f(x)\,g(x)]_a^b. \tag{5}$$

Для доказательства достаточно записать левую часть в форме

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)+\int_a^b g(x)\,df(x)$$

и применить формулу (1) § 6, гл. VIII.

Впрочем, соотношение (5) легко доказать и непосредственно, исходя из того, что абсолютно непрерывная функция $f(x)g(x)$ почти везде имеет конечную производную, равную сумме

$$f(x)g'(x)+f'(x)g(x).$$

§ 8. Восстановление первообразной функции

В § 5, гл. V мы уже решили вопрос о восстановлении непрерывной функции $f(x)$ по ее производной $f'(x)$, если последняя существует всюду и ограничена. Здесь мы рассмотрим вопрос о том, следует ли равенство

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,dt \tag{1}$$

из того, что $f'(x)$ существует всюду, но не обязательно ограничена. Совершенно ясно, что это так, если $f(x)$ абсолютно непрерывна. В этом случае достаточно было бы предположить, что $f'(x)$ существует лишь почти везде, что, вообще говоря,[1]) недостаточно для выполнения (1) даже тогда, когда $f(x)$ возрастающая непрерывная функция, производная $f'(x)$ которой почти везде равна нулю. Мы, однако, ставим целью формулировать условия равенства (1) в терминах, относящихся не к самой функции $f(x)$, а к ее производной $f'(x)$.

Теорема 1. *Если производная $f'(x)$ существует всюду, конечна и суммируема, то справедливо* (1).

Доказательство этой теоремы будет построено на двух леммах.

Лемма 1. *Пусть на $[a, b]$ задана конечная функция $\Phi(x)$. Если в каждой точке $[a, b]$ все производные числа $\Phi(x)$ не отрицательны, то $\Phi(x)$ возрастает.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon>0$ и положим

$$\Phi_1(x)=\Phi(x)+\varepsilon x.$$

Допустим, что $\Phi_1(b)<\Phi_1(a)$.

Тогда, если $c=\frac{a+b}{2}$, то хоть одна из разностей

$$\Phi_1(b)-\Phi_1(c),\quad \Phi_1(c)-\Phi_1(a)$$

отрицательна. Обозначим через $[a_1, b_1]$ тот из сегментов $[a, c]$ и $[c, b]$, для которого $\Phi_1(b_1)<\Phi_1(a_1)$, и положим $c_1=\frac{a_1+b_1}{2}$.

[1]) Как видно, хотя бы, из примера функции $\Theta(x)$, § 2, гл. VIII.

Хоть одна из разностей $\Phi_1(b_1)-\Phi_1(c_1)$, $\Phi_1(c_1)-\Phi_1(a_1)$ отрицательна. Обозначим через $[a_2, b_2]$ тот из сегментов $[a_1, c_1]$ и $[c_1, b_1]$, для которого $\Phi_1(b_2)<\Phi_1(a_2)$.

Продолжая этот процесс, мы построим последовательность вложенных сегментов $\{[a_n, b_n]\}$, для которых $\Phi_1(b_n)<\Phi_1(a_n)$.

Пусть x_0 есть точка, общая всем сегментам $[a_n, b_n]$. Тогда (при каждом n) одна из разностей $\Phi_1(b_n)-\Phi_1(x_0)$, $\Phi_1(x_0)-\Phi_1(a_n)$ отрицательна. Положим $h_n=b_n-x_0$, если $\Phi_1(b_n)<\Phi_1(x_0)$, и $h_n=a_n-x_0$, если $\Phi_1(b_n)\geqslant\Phi_1(x_0)$. Ясно, что

$$\Delta_n=\frac{\Phi_1(x_0+h_n)-\Phi_1(x_0)}{h_n}<0.$$

Выбрав подпоследовательность $\{\Delta_{n_k}\}$, имеющую (конечный или бесконечный) предел, мы приходим к производному числу $D\Phi_1(x_0)\leqslant 0$, что невозможно, поскольку ясно, что во всех точках $x\in[a, b]$

$$D\Phi_1(x)\geqslant\varepsilon.$$

Итак, неравенство $\Phi_1(b)<\Phi_1(a)$ невозможно. Значит, $\Phi_1(b)\geqslant\Phi_1(a)$, или, что то же самое, $\Phi(b)+\varepsilon b\geqslant\Phi(a)+\varepsilon a$.

Отсюда (ε произвольно!) $\Phi(b)\geqslant\Phi(a)$, что и доказывает лемму, ибо вместо $[a, b]$ можно было бы взять любой частичный сегмент $[x, y]$.

Лемма 2. *Пусть на $[a, b]$ задана конечная функция $\varphi(x)$. Если почти везде на $[a, b]$ все производные числа $\varphi(x)$ не отрицательны, и ни в одной точке $[a, b]$ ни одно из производных чисел $\varphi(x)$ не обращается в $-\infty$, то $\varphi(x)$ возрастает.*

Доказательство. Обозначим через E множество тех точек $[a, b]$, где хоть одно производное число $\varphi(x)$ отрицательно. По условию $mE=0$.

В силу теоремы 6, § 2, гл. VIII существует такая непрерывная возрастающая функция $\sigma(x)$, что во всех точках множества E будет $\sigma'(x)=+\infty$.

Положим, $\Phi(x)=\varphi(x)+\varepsilon\sigma(x)$, где $\varepsilon>0$, и покажем, что ни в одной точке $[a, b]$ ни одно производное число $\Phi(x)$ не может оказаться отрицательным. Действительно, прежде всего из возрастания $\sigma(x)$ следует, что

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}\geqslant\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h},$$

так что при $x\,\overline{\in}\,E$

$$D\Phi(x)\geqslant 0.$$

Но если $x\in E$, то $\Phi'(x)$ существует и равна $+\infty$, ибо при $h_n\to 0$ отношение $\frac{\varphi(x+h_n)-\varphi(x)}{h_n}$ ограничено снизу (иначе существовало бы производное число $D\varphi(x)=-\infty$), а $\sigma'(x)=+\infty$. Итак, всегда $D\Phi(x)\geqslant 0$.

Отсюда, по предыдущей лемме, $\Phi(x)$ возрастает, т. е. при $x<y$

$$\Phi(x) \leqslant \Phi(y)$$

или, что то же самое,

$$\varphi(x)+\varepsilon\sigma(x) \leqslant \varphi(y)+\varepsilon\sigma(y)$$

Устремив ε к нулю и перейдя к пределу, получим

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(y),$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1. Введем в рассмотрение функцию $\varphi_n(x)$, полагая

$$\varphi_n(x)=\begin{cases} f'(x), & \text{если } f'(x) \leqslant n, \\ n, & \text{если } f'(x)>n. \end{cases}$$

Легко видеть, что

$$|\varphi_n(x)| \leqslant |f'(x)|, \qquad (2)$$

так что $\varphi_n(x)$ суммируема. Положим,

$$R_n(x)=f(x)-\int_a^x \varphi_n(t)\,dt,$$

и покажем, что $R_n(x)$ возрастающая функция.

Для этого прежде всего отметим, что почти везде

$$R_n'(x)=f'(x)-\varphi_n(x) \geqslant 0,$$

так что множество точек, в которых хоть одно производное число функции $R_n(x)$ отрицательно, имеет меру нуль.

С другой стороны, $\varphi_n(x) \leqslant n$, так что и

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varphi_n(t)\,dt \leqslant n$$

и, стало быть,

$$\frac{R_n(x+h)-R_n(x)}{h} \geqslant \frac{f(x+h)-f(x)}{h}-n,$$

откуда ясно, что ни одно производное число функции $R_n(x)$ не обращается в $-\infty$. Поэтому, в силу предыдущей леммы, $R_n(x)$ возрастает. Значит, $R_n(b) \geqslant R_n(a)$ или, что то же самое, $f(b)-$ $-f(a) \geqslant \int_a^b \varphi_n(x)\,dx$.

Но $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)=f'(x)$, откуда, в связи с (2), $\lim\limits_{n\to\infty}\int_c^b \varphi_n(x)\,dx=$ $=\int_a^b f'(x)\,dx$ и, следовательно, $f(b)-f(a) \geqslant \int_a^b f'(x)\,dx$.

Но те же соображения, примененные к функции $-f(x)$, дают, что $f(b)-f(a) \leqslant \int_a^b f'(x)\,dx$.

Значит,

$$f(b)=f(a)+\int_a^b f'(x)\,dx,$$

что и доказывает теорему, ибо роль b может играть любое x, где $a<x\leqslant b$.

В заключение приведем два примера.

I. Пусть на $[0,\ 1]$ задана функция

$$f(x)=x^{\frac{3}{2}}\sin\frac{1}{x}\quad (x>0),\quad f(0)=0.$$

Эта функция всюду имеет конечную производную

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{x}-x^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{x}\quad (x>0),\quad f'(0)=0.$$

Эта производная суммируема, ибо

$$|f'(x)|\leqslant\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Поэтому функция $f(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Однако, легко видеть, что $f'(x)$ не ограничена, так что теорема § 5, гл. V к ней неприменима.

II. Пусть на $[0,1]$ задана функция

$$f(x)=x^2\cos\frac{\pi}{x^2}\quad (x>0),\quad f(0)=0.$$

Она также всюду имеет конечную производную $f'(x)$, но последняя не суммируема. Действительно, если $0<\alpha<\beta\leqslant 1$, то в сегменте $[\alpha,\ \beta]$ производная $f'(x)$ ограничена и, стало быть,

$$\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx=\beta^2\cos\frac{\pi}{\beta^2}-\alpha^2\cos\frac{\pi}{\alpha^2}.$$

В частности, при $\alpha_n=\sqrt{\frac{2}{4n+1}}$, $\beta_n=\frac{1}{\sqrt{2n}}$ будет

$$\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f'(x)\,dx=\frac{1}{2n}.$$

Но сегменты $[\alpha_n, \beta_n]$ $(n=1, 2, \ldots)$ попарно не пересекаются; значит, если $E=\sum_{n=1}^{\infty}[\alpha_n, \beta_n]$, то

$$\int_E |f'(x)|\,dx \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=+\infty$$

и $f'(x)$ не суммируема. Таким образом, операция интегрирования по Лебегу не может считаться полностью решающей задачу восстановления первообразной функции по ее производной. Полное решение задачи дает процесс интегрирования Перрона — Данжуа, обобщающий процесс Лебега. Этот процесс мы излагаем в гл. XVI.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ IX

1. Суммируемая функция аппроксимативно непрерывна в каждой своей точке Лебега. Обратное неверно.

2. Для ограниченной измеримой функции понятия точки Лебега и точки аппроксимативной непрерывности совпадают.

3. Из того, что в точке x_0 функция $f(x)$ есть производная своего неопределенного интеграла, не следует, что она аппроксимативно непрерывна в этой точке.

4. Если все производные числа функции $f(x)$ удовлетворяют неравенству $|Df(x)| \leqslant K$, то $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица.

5. Если функция $F[f(x)]$ абсолютно непрерывна при всякой абсолютно непрерывной $f(x)$, то $F(x)$ удовлетворяет условию Липшица (Г. М. Фихтенгольц).

6. Пусть на $[a, b]$ задана $f(x)$. Если всякому $\varepsilon>0$ отвечает такое $\delta>0$, что для всякой конечной системы интервалов $\{(a_k, b_k)\}$ с суммой длин, меньшей δ, будет

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\{f(b_k)-f(a_k)\}\right|<\varepsilon,$$

то $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица [1]) (Г. М. Фихтенгольц).

7. Прямым способом доказать следующий частный случай теоремы Банаха — Зарецкого: если непрерывная и строго возрастающая функция обладает свойством (N), то она абсолютно непрерывна.

8. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и E есть множество точек, где хоть одно производное число $f(x)$ не положительно. Если образ $f(E)$ множества E не содержит никакого сегмента, то $f(x)$ возрастающая функция (А. Зигмунд).

9. Пользуясь предыдущим результатом, следующим образом обобщить лемму 2, § 8: если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, почти в каждой точке $[a, b]$ все производные числа $f(x)$ неотрицательны и множество точек, в которых существует хоть одно производное число, равное $-\infty$, разве лишь счетно, то $f(x)$ возрастающая функция.

10. Пусть $f(x)$ непрерывна, а $f'(x)$ существует всюду и суммируема. Если множество $E(|f'|=+\infty)$ разве лишь счетно, то $f(x)$ абсолютно непрерывна. (Применить результат предыдущего упражнения.)

---

[1]) Этот результат показывает, что в определении понятия абсолютной непрерывности нельзя отбросить требование, чтобы интервалы (a_k, b_k) попарно не пересекались.

11. Функция, всюду имеющая конечную производную, обладает свойством (N).

12. Для того чтобы непрерывная строго возрастающая функция $f(x)$ была абсолютно непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы образ $f(E)$ множества E точек, в которых $f'(x) = +\infty$, имел меру 0. (М. А. Зарецкий.)

13. Для того чтобы функция, обратная непрерывной и строго возрастающей функции $f(x)$, была абсолютно непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы было $mE\,(f'=0)=0$. (М. А. Зарецкий.)

14. Пусть на $[a, b]$ заданы суммируемые функции $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$. Если для каждого измеримого множества $E \subset [a, b]$ существует конечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_E f_n(x)\,dx$, то сущетвует такая суммируемая функция $f(x)$, что для любой измеримой и ограниченной функции $g(x)$ будет[1])

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

---

[1]) Эту задачу можно решить методами гл. IX. Несколько проще было бы применить материал гл. XIII.

ГЛАВА X

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ. ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ

В этой главе мы намерены показать применения методов теории функций вещественной переменной к отдельным вопросам анализа. Попутно сообщаются некоторые новые сведения из области самой теории функций.

§ 1. Понятие сингулярного интеграла

Чтобы ознакомить читателя с идеей, лежащей в основе важного понятия сингулярного интеграла, начнем с примера.

Рассмотрим функцию

$$\Phi_n(t,\ x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{n}{1+n^2(t-x)^2}. \tag{1}$$

Если n и x фиксированы, а t меняется от 0 до 1, то эта функция есть непрерывная функция от t. Значит, для всякой суммируемой $f(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ можно образовать величину

$$f_n(x)=\frac{n}{\pi}\int\limits_0^1\frac{f(t)\,dt}{1+n^2(t-x)^2}. \tag{2}$$

Докажем, что во всякой точке $x\,(0<x<1)$, в которой функция $f(t)$ непрерывна, будет

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x). \tag{3}$$

Для этого прежде всего отметим, что при $n\to\infty$

$$\int\limits_0^1\Phi_n(t,\ x)\,dt=\frac{n}{\pi}\int\limits_0^1\frac{dt}{1+n^2(t-x)^2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-nx}^{n(1-x)}\frac{dz}{1+z^2}\to\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{1+z^2}=1. \tag{4}$$

Поэтому, чтобы установить (3), достаточно показать, что при $n\to\infty$ стремится к нулю разность

$$r_n=f_n(x)-f(x)\int\limits_0^1\Phi_n(t,\ x)\,dt=\frac{n}{\pi}\int\limits_0^1\frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(t-x)^2}\,dt.$$

С этой целью взяв произвольное $\varepsilon>0$, найдем такое $\delta>0$, что при $|t-x|<\delta$ будет $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$. Считая, что $0<x-\delta<x+b<1$, представим r_n в форме

$$r_n=\frac{n}{\pi}\int\limits_0^{x-\delta}\frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(t-x)^2}\,dt+\frac{n}{\pi}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta}\frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(t-x)^2}\,dt+$$

$$+\frac{n}{\pi}\int\limits_{x+\delta}^{1}\frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(t-x)^2}\,dt=A_n+B_n+C_n.$$

Интеграл B_n оценивается следующим образом:

$$|B_n| \leqslant \frac{n}{\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{|f(t)-f(x)|}{1+n^2(t-x)^2} dt \leqslant \varepsilon \cdot \frac{n}{\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{dt}{1+n^2(t-x)^2} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1+z^2} = \varepsilon.$$

Что касается интеграла A_n, то в этом интеграле будет $|t-x| \geqslant \delta$, так что

$$|A_n| \leqslant \frac{n}{\pi(1+n^2\delta^2)} \int_0^{x-\delta} |f(t)-f(x)|\, dt < \frac{A(\delta)}{n},$$

где $A(\delta)$ не зависит от n. Аналогично

$$|C_n| < \frac{C(\delta)}{n} \text{ и, стало быть, } |r_n| < \varepsilon + \frac{A(\delta)+C(\delta)}{n},$$

так что при достаточно больших n будет $|r_n| < 2\varepsilon$, т. е. r_n стремится к 0 с возрастанием n, что и требовалось доказать.

Нетрудно разобраться в том, какие именно свойства функции $\Phi_n(t, x)$ обеспечивают соотношение (3). Дело в том, что при весьма больших значениях n те значения $\Phi_n(t, x)$, которые отвечают сколько-нибудь заметно удаленным от x значениям t, весьма малы, так что величина интеграла (2) определяется в основном значениями подынтегральной функции в непосредственной близости точки x. Но около точки x функция $f(t)$ почти равна $f(x)$ (ибо она непрерывна при $t=x$). Значит, если n велико, то интеграл (2) мало изменяется при замене $f(t)$ на $f(x)$, т. е. он почти равен интегралу

$$f(x) \cdot \frac{n}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{1+n^2(t-x)^2}$$

и, в силу (4), почти равен $f(x)$.

Функция $\Phi_n(t, x)$, обладающая подобными свойствами, носит название *ядра*. Точное определение ядра таково:

Определение. *Ядром* называется функция $\Phi_n(t, x)$ $(n=1, 2, \ldots)$, заданная в квадрате $(a \leqslant t \leqslant b,\ a < x < b)$ и такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta \Phi_n(t, x)\, dt = 1,$$

если только $a \leqslant \alpha < x < \beta \leqslant b$. Само собою разумеется, что $\Phi_n(t, x)$ предполагается суммируемой по t при каждом фиксированном x.

Интеграл вида

$$f_n(x) = \int_a^b \Phi_n(t, x) f(t)\, dt,$$

где $\Phi_n(t, x)$ есть ядро, называется *сингулярным интегралом*.

Теория таких интегралов имеет многочисленные приложения. Основной вопрос этой теории состоит в установлении связи предельных значений интеграла $f_n(x)$ при $n\to\infty$ со значением функции $f(t)$ в точке x. Так как изменение значения функции $f(t)$ в одной точке никак не отражается на величине $f_n(x)$, то необходимо потребовать, чтобы значение $f(x)$ функции $f(t)$ в точке x было как-то связано с ее значениями в близких точках. Простей-

шая форма такой связи есть непрерывность функции $f(t)$ в точке $t=x$. Другими формами связи могут служить аппроксимативная непрерывность, требование, чтобы x была точкой Лебега функции $f(t)$, и т. п.

Приведем одну теорему Лебега, которая будет нам полезна в дальнейшем.

Теорема 1 (А. Лебег). *Пусть на $[a, b]$ задана последовательность измеримых функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$, ... Если существует такая постоянная K, что при всех n и t будет*

$$|\varphi_n(t)| < K, \tag{5}$$

и если при всяком c $(a \leqslant c \leqslant b)$ будет

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^c \varphi_n(t)\,dt = 0, \tag{6}$$

то, какова бы ни была суммируемая на $[a, b]$ функция $f(t)$, справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\,\varphi_n(t)\,dt = 0, \tag{7}$$

Доказательство. Если $[\alpha, \beta]$ есть сегмент, содержащийся в $[a, b]$, то из (6) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta \varphi_n(t)\,dt = 0. \tag{8}$$

Заметив это, рассмотрим какую-нибудь *непрерывную* функцию $f(t)$ и для наперед заданного $\varepsilon > 0$ разложим $[a, b]$ точками $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_m = b$ на столь малые части, чтобы в каждой из них колебание $f(t)$ было меньше, чем ε. Тогда

$$\int_a^b f(t)\,\varphi_n(t)\,dt = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(t) - f(x_k)]\,\varphi_n(t)\,dt + \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_n(t)\,dt. \tag{9}$$

Но

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(t) - f(x_k)]\,\varphi_n(t)\,dt \right| \leqslant K\varepsilon\,(x_{k+1} - x_k),$$

так что первая сумма из (9) не больше, чем $K\varepsilon\,(b-a)$. Вторая же сумма (9), в силу (8), стремится к нулю с возрастанием n и, стало быть, для $n > n_0$ окажется меньшей, чем ε. Для этих n будет

$$\left| \int_a^b f(t)\,\varphi_n(t)\,dt \right| < \varepsilon\,[K(b-a) + 1],$$

так что (7) доказано для непрерывной функции $f(t)$.

Пусть, далее, $f(t)$ измеримая *ограниченная* функция $|f(t)| \leqslant M$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и, пользуясь теоремой Н. Н. Лузина, найдем такую непрерывную функцию $g(t)$, что $mE(f \neq g) < \varepsilon$, $|g(t)| \leqslant M$.

Тогда

$$\int_a^b f(t)\,\varphi_n(t)\,dt = \int_a^b [f(t) - g(t)]\,\varphi_n(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,\varphi_n(t)\,dt.$$

Но

$$\left| \int_a^b [f(t) - g(t)]\,\varphi_n(t)\,dt \right| = \left| \int_{E(f\neq g)} [f(t) - g(t)]\,\varphi_n(t)\,dt \right| < 2KM\varepsilon,$$

интеграл же $\int\limits_a^b g\varphi_n\,dt$, по уже доказанному, стремится к нулю и для достаточно больших n становится меньше ε. Значит, для этих n будет

$$\left|\int\limits_a^b f(t)\,\varphi_n(t)\,dt\right| < (2KM+1)\,\varepsilon,$$

что доказывает (7) для случая ограниченной измеримой функции.

Пусть, наконец, $f(t)$ произвольная суммируемая функция.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и, пользуясь абсолютной непрерывностью интеграла, найдем такое $\delta > 0$, чтобы для любого измеримого множества $e \subset [a, b]$ с мерой $me < \delta$ было $\int\limits_e |f(t)|\,dt < \varepsilon$.

Сделав это, найдем такую измеримую ограниченную функцию (гл. IV, § 4, теорема 1) $g(t)$, чтобы было $mE(f \neq g) < \delta$.

Можно считать, что на множестве $E(f \neq g)$ функция $g(t)$ равна нулю. Тогда

$$\int\limits_a^b f(t)\,\varphi_n(t)\,dt = \int\limits_a^b [f(t)-g(t)]\,\varphi_n(t)\,dt + \int\limits_a^b g(t)\,\varphi_n(t)\,dt.$$

Но

$$\left|\int\limits_a^b [f(t)-g(t)]\,\varphi_n(t)\,dt\right| = \left|\int\limits_{E(f\neq g)} f(t)\,\varphi_n(t)\,dt\right| \leqslant K\varepsilon,$$

интеграл же $\int\limits_a^b g\varphi_n\,dt$ при достаточно больших n будет меньше ε, и при этих n окажется

$$\left|\int\limits_a^b f(t)\,\varphi_n(t)\,dt\right| < (K+1)\,\varepsilon,$$

что и доказывает теорему.

Пример. Пусть $\varphi_n(t) = \cos nt$. Тогда

$$\int\limits_a^c \varphi_n(t)\,dt = \frac{\sin nc - \sin na}{n} \to 0$$

и, очевидно, выполнены оба условия теоремы Лебега. Аналогично рассматривается случай $\varphi_n(t) = \sin nt$. Таким образом доказана

Теорема 2 (Риман — Лебег). *Для любой суммируемой на* $[a, b]$ *функции* $f(t)$ *будет*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f(t)\cos nt\,dt = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f(t)\sin nt\,dt = 0.$$

В частности, *коэффициенты Фурье*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$$

произвольной суммируемой функции стремятся к нулю[1]) *при* $n \to \infty$.

---

[1]) Для функции, *суммируемой с квадратом*, это предложение есть очевидное следствие сходимости ряда $\sum (a_n^2 + b_n^2)$.

Если соотношение (7) имеет место для всякой суммируемой на $[a, b]$ функции $f(t)$, то мы будем говорить, что последовательность $\{\varphi_n(t)\}$ *слабо сходится к нулю.* [1]

§ 2. Представление функции сингулярным интегралом в заданной точке

Во всем дальнейшем, не оговаривая этого специально, мы будем считать, что ядро $\Phi_n(t, x)$ при фиксированных n и x ограничено. Тогда сингулярный интеграл $f_n(x)=\int_a^b \Phi_n(t, x) f(t)\,dt$ имеет смысл при любой суммируемой функции $f(t)$.

Теорема 1 (*А. Лебег*). *Если при фиксированном* x $(a<x<b)$ *и любом* $\delta>0$ *ядро* $\Phi_n(t, x)$ *слабо сходится к нулю в каждом из промежутков* $[a, x-\delta]$, $[x+\delta, b]$ *и сверх того*

$$\int_a^b |\Phi_n(t, x)|\,dt<H(x),$$

где $H(x)$ *не зависит от* n, *то, какова бы ни была суммируемая функция* $f(t)$, *непрерывная в точке* x, *справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x).$$

Доказательство. Так как $\Phi_n(t, x)$ есть ядро, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \Phi_n(t, x)\,dt=1,$$

и достаточно обнаружить, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f(t)-f(x)]\,\Phi_n(t, x)\,dt=0.$$

С этой целью, взяв $\varepsilon>0$, найдем такое $\delta>0$, что при $|t-x|<\delta$ будет

$$|f(t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3H(x)}.$$

Тогда при любом n

$$\left|\int_{x-\delta}^{x+\delta} [f(t)-f(x)]\,\Phi_n(t, x)\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Но каждый из интегралов

$$\int_a^{x-\delta} [f(t)-f(x)]\,\Phi_n(t, x)\,dt, \quad \int_{x+\delta}^b [f(t)-f(x)]\,\Phi_n(t, x)\,dt$$

при $n\to\infty$ стремится к нулю, так что для $n>n_0$ каждый из них будет по абсолютной величине меньше $\varepsilon/3$, и для этих n, очевидно, окажется

$$\left|\int_a^b [f(t)-f(x)]\,\Phi_n(t, x)\,dt\right|<\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

---

[1]) Здесь имеется некоторое отклонение от терминологии функционального анализа.

Эта теорема относится к представлению суммируемой функции в точках непрерывности, но суммируемая функция, вообще говоря, не имеет ни одной точки непрерывности, что, конечно, понижает интерес этой теоремы.

Бóльший интерес представляет вопрос о представлении суммируемой функции в тех точках, где эта функция служит производной своего неопределенного интеграла, или в точках Лебега, ибо, как мы уже знаем, и те и другие точки заполняют почти весь сегмент задания функции.[1] К этому вопросу мы и переходим.

Лемма (И. П. Натансон). *Пусть на сегменте* $[a, b]$ *дана суммируемая функция* $f(t)$, *обладающая тем свойством, что*

$$M = \sup_{0 < h \leqslant b-a} \left\{ \frac{1}{h} \left| \int_a^{a+h} f(t)\, dt \right| \right\} < +\infty. \tag{1}$$

Какова бы ни была неотрицательная убывающая функция $g(t)$, *заданная и суммируемая на* $[a, b]$ *интеграл*

$$\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \tag{2}$$

существует (может быть как несобственный при $t = a$) *и справедливо неравенство*

$$\left| \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \right| \leqslant M \int_a^b g(t)\, dt. \tag{3}$$

В пояснение условий леммы заметим, что мы не исключаем случая, когда $g(a) = +\infty$. Если же $g(a) < +\infty$, то функция $g(t)$ ограничена и интеграл (2) существует как обычный интеграл Лебега.

Переходя к доказательству леммы, заметим, что не ограничивая общности, можно принять, что $g(b) = 0$. Действительно, если бы это не было так, то мы просто ввели бы вместо $g(t)$ функцию $g^*(t)$, определив ее равенствами

$$g^*(t) = \begin{cases} g(t), & \text{если } a \leqslant t < b, \\ 0, & \text{если } t = b. \end{cases}$$

Доказав теорему для $g^*(t)$, мы затем смогли бы всюду заменить $g^*(t)$ на $g(t)$, ибо такая замена не отражается на величине интересующих нас интегралов. Итак, мы считаем, что $g(b) = 0$.

Пусть $a < \alpha < b$. На сегменте $[\alpha, b]$ функция $g(t)$ ограничена и интеграл

$$\int_\alpha^n f(t)\, g(t)\, dt \tag{4}$$

заведомо существует. Если положить $F(t) = \int_a^t f(u)\, du$, то интеграл (4) можно

---

[1]) Другим типом «регулярной» точки для суммируемой (и вообще измеримой) функции является точка аппроксимативной непрерывности. Однако, для теории сингулярных интегралов эти точки не представляют большого интереса, ибо, как показано мною [I. Natanson, Sur la représentation des fonctions aux points de continuité approximative par des intégrales singulières, Fund. Math., 18, 1931, стр. 99—109] не существует таких сингулярных интегралов, которые представляли бы любую суммируемую функцию во всех ее точках аппроксимативной непрерывности.

записать в форме интеграла Стилтьеса

$$\int_{\alpha}^{b} f(t)\,g(t)\,dt=\int_{\alpha}^{b} g(t)\,dF(t),$$

откуда, после интегрирования по частям, находим

$$\int_{\alpha}^{b} f(t)\,g(t)\,dt=-F(\alpha)\,g(\alpha)+\int_{\alpha}^{b} F(t)\,d[-g(t)].$$

Но, в силу (1), мы имеем, что

$$|F(t)|\leqslant M\,(t-a), \tag{5}$$

а так как $g(t)$ убывает, то

$$g(\alpha)\,(\alpha-a)\leqslant\int_{a}^{\alpha} g(t)\,dt. \tag{6}$$

Значит $|F(\alpha)\,g(\alpha)|\leqslant M\int_{a}^{\alpha} g(t)\,dt$. С другой стороны, функция $-g(t)$ возрастает. Отсюда и из (5) следует, что

$$\left|\int_{\alpha}^{b} F(t)\,d[-g(t)]\right|\leqslant M\int_{\alpha}^{b}(t-a)\,d[-g(t)].$$

Преобразуем стоящий справо интеграл по формуле интегрирования по частям:

$$\int_{\alpha}^{b}(t-a)\,d[-g(t)]=g(\alpha)\,(\alpha-a)+\int_{\alpha}^{b} g(t)\,dt.$$

Отсюда, в связи с (6), следует, что

$$\left|\int_{\alpha}^{b}(t-a)\,d[-g(t)]\right|\leqslant\int_{a}^{b} g(t)\,dt.$$

Сопоставляя все сказанное, получаем:

$$\left|\int_{\alpha}^{b} f(t)\,g(t)\,dt\right|\leqslant M\left\{\int_{a}^{\alpha} g(t)\,dt+\int_{a}^{b} g(t)\,dt\right\}. \tag{7}$$

Хотя это неравенство установлено при предположении, что $g(b)=0$, но, как уже объяснено, оно останется верным и без этого предположения. Значит, мы можем заменить здесь предел b на β, где $\alpha<\beta<b$. Но тогда, устремляя α и β к a, мы убедимся, что

$$\lim\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,g(t)\,dt=0,$$

чем доказывается существование интеграла (2). Наконец, если в (7) перейти к пределу при $\alpha\to a$, то мы получим (3). Лемма доказана.[1]

Теорема 2 (П. И. Романовский). *Пусть ядро $\Phi_n(t, x)$ положительно и обладает следующим свойством: при фиксированных n и x ядро $\Phi_n(t, x)$,*

---

[1] В оценке (3) множителя M уменьшить нельзя, так как при $f(t)=1$ в (3) достигается равенство.

как функция одного лишь t, возрастает в сегменте $[a, x]$ и убывает в сегменте $[x, b]$.

Тогда для любой суммируемой функции $f(t)$, которая в точке x является производной своего неопределенного интеграла, будет

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\,\Phi_n(t, x)\,dt = f(x). \tag{8}$$

Доказательство. Так как $\Phi_n(t, x)$ есть ядро, то достаточно проверить, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f(t)-f(x)]\,\Phi_n(t, x)\,dt = 0. \tag{9}$$

Разбивая последний интеграл на два, распространенные на сегменте $[a, x]$ и $[x, b]$ займемся вторым из них, так как первый изучается аналогично.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем такое $\delta > 0$, что при $0 < h \leqslant \delta$ будет

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(t)-f(x)]\,dt\right| < \varepsilon,$$

что возможно, так как $f(t)$ в точке $t = x$ есть производная своего неопределенного интеграла.

Тогда по предыдущей лемме

$$\left|\int_x^{x+\delta}[f(t)-f(x)]\,\Phi_n(t, x)\,dt\right| \leqslant \varepsilon\int_x^{x+\delta}\Phi_n(t, x)\,dt \leqslant \varepsilon\int_a^b \Phi_n(t, x)\,dt.$$

Так как $\Phi_n(t, x)$ есть ядро, то $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b \Phi_n(t, x)\,dt = 1$.

Величина, имеющая конечный предел, ограничена. Значит, существует постоянная $K(x)$, такая, что $\int_a^b \Phi_n(t, x)\,dt < K(x)$.

Таким образом,

$$\left|\int_x^{x+\delta}[f(t)-f(x)]\,\Phi_n(t, x)\,dt\right| < \varepsilon K(x). \tag{10}$$

С другой стороны, если $x+\delta \leqslant t \leqslant b$, то

$$\Phi_n(t, x) \leqslant \Phi_n(x+\delta, x) \leqslant \frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta}\Phi_n(t, x)\,dt < \frac{K(x)}{\delta}.$$

Значит функции $\varphi_n(t) = \Phi_n(t, x)$ на сегменте $[x+\delta, b]$ равномерно ограничены и выполнено условие (5) теоремы Лебега из § 1. Но второе ее условие, т. е. условие (6), также выполнено для этих функций, ибо $\Phi_n(t, x)$ есть ядро. Стало быть, $\Phi_n(t, x)$ на сегменте $[x+\delta, b]$ слабо сходится к нулю, и для достаточно больших n будет

$$\left|\int_{x+\delta}^{b}[f(t)-f(x)]\,\Phi_n(t, x)\,dt\right| < \varepsilon.$$

При этих n окажется [см. (10)]

$$\left|\int_x^b [f(t)-f(x)]\,\Phi_n(t, x)\,dt\right| < \varepsilon [K(x)+1],$$

так что

$$\lim_{n\to\infty}\int_x^b [f(t)-f(x)]\,\Phi_n(t, x)\,dt = 0. \tag{11}$$

Теорема доказана.

В качестве примера ее приложения укажем на *интеграл Вейерштрасса*

$$W_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\int_a^b e^{-n^2(t-x)^2} f(t)\,dt.$$

Функция $W_n(t, x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(t-x)^2}$ есть ядро, ибо при $\alpha < x < \beta$

$$\int_\alpha^\beta W_n(t, x)\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{n(\alpha-x)}^{n(\beta-x)} e^{-z^2}\,dz \to \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz = 1.$$

Эта функция положительна, и она возрастает при $a \leqslant t \leqslant x$ и убывает при $x \leqslant t \leqslant b$. Значит, для всякой $f(t) \in L$ будет $\lim\limits_{n\to\infty} W_n(x) = f(x)$ в каждой точке x, где $f(t)$ есть производная своего неопределенного интеграла.

Условимся говорить, что функция $\Psi(t, x)$ является *горбатой мажорантой* функции $\Phi(t, x)$, если $|\Phi(t, x)| \leqslant \Psi(t, x)$ и если $\Psi(t, x)$ при фиксированном x возрастает на сегменте $[a, x]$ и убывает на сегменте $[x, b]$.

Теорема 3 (Д. К. Фаддеев). *Если ядро $\Phi_n(t, x)$ при каждом n имеет такую горбатую мажоранту $\Psi_n(t, x)$, что*

$$\int_a^b \Psi_n(t, x)\,dt < K(x) < +\infty,$$

где $K(x)$ зависит лишь от x, то для любой $f(t) \in L$, имеющей точку $t = x$ точкой Лебега, будет справедливо (8).

Доказательство. И здесь достаточно доказать равенство (11). Взяв $\varepsilon > 0$, находим такое $\delta > 0$, что при $0 < h \leqslant \delta$ будет

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\,dt < \varepsilon.$$

По лемме будем иметь

$$\left|\int_x^{x+\delta} \{f(t)-f(x)\}\,\Phi_n(t, x)\,dt\right| \leqslant \int_x^{x+\delta} |f(t)-f(x)|\cdot\Psi_n(t, x)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int_x^{x+\delta} \Psi_n(t, x)\,dt < \varepsilon K(x).$$

С другой стороны, в сегменте $[x+\delta, b]$ последовательность $\varphi_n(t)=\Phi_n(t, x)$ слабо сходится к нулю, ибо при $t \in [x+\delta, b]$ будет

$$|\Phi_n(t, x)| \leqslant \Psi_n(t, x) \leqslant \Psi_n(x+\delta, x) \leqslant \frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta} \Psi_n(t, x)\,dt < \frac{K(x)}{\delta}.$$

Заметив это, мы заканчиваем доказательство теоремы Фаддеева так же, как и выше.[1])

§ 3. Приложения в теории рядов Фурье

В § 3, гл. VII мы уже определили понятие ряда Фурье функции $f(x)$ по любой ортонормальной системе $\{\omega_k(x)\}$. В частности, если речь идет о тригонометрической системе

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \tag{1}$$

то рядом Фурье функции $f(x)$ служит ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{2}$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\,dx. \tag{3}$$

В гл. VII мы предполагали, что $f(x) \in L_2$. Это предположение обеспечило нам существование коэффициентов Фурье $c_k = \int_a^b f(x)\,\omega_k(x)\,dx$ функции $f(x)$ в любой ортонормальной системе. Но функции системы (1) ограничены. Поэтому коэффициенты (3), а с ними и ряд (2), можно образовать для любой суммируемой функции.

Вопрос о сходимости ряда (2) приводится к исследованию некоторого сингулярного интеграла. Действительно, если

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

то, в силу (3),

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x)\right] f(t)\,dt.$$

---

[1]) Д. К. Фаддеевым («О представлении суммируемых функций сингулярными интегралами в точках Lebesgue'а», Матем. сборник, т. 1 (43), № 3, 1936, стр. 351—368) доказано, что условия теоремы и необходимы для того, чтобы (8) имело место для всякой $f(t) \in L$, имеющей при $t=x$ точку Лебега.

Пользуясь известной формулой [1])

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}, \tag{4}$$

придадим сумме $S_n(x)$ вид

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}f(t)\,dt. \tag{5}$$

Этот интеграл есть сингулярный *интеграл Дирихле*.

Мы не будем останавливаться на вопросах сходимости ряда (2), отсылая интересующегося читателя к исчерпывающей монографии Зигмунда. [2]) Напротив, мы рассмотрим вопрос о суммировании ряда (2) по способу Чезаро. Этот способ состоит в отыскании предела среднего арифметического первых n сумм $S_k(x)$:

$$\sigma_n(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+\ldots+S_{n-1}(x)}{n}. \tag{6}$$

Известно, что в случае сходимости ряда (2) в точке x последовательность $\sigma_n(x)$ сходится к сумме ряда, но эта последовательность может сходиться и тогда, когда ряд (2) расходится. [3])

Для исследования $\sigma_n(x)$ преобразуем ее с помощью формулы (5)

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2k+1}{2}(t-x)\right]\frac{f(t)}{\sin\frac{t-x}{2}}\,dt.$$

Но

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)\alpha=\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}. \tag{7}$$

Действительно, складывая равенства

$$\cos 2k\alpha-\cos 2(k+1)\alpha=2\sin\alpha\sin(2k+1)\alpha\quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),$$

---

[1]) Впрочем, ее легко вывести. Для этого сложим равенства

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos k\alpha\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Это дает

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha\right],$$

откуда и следует (4).

[2]) А. Зигмунд. Тригонометрические ряды. ГОНТИ, 1939.

[3]) См., например: И. И. Привалов, Ряды Фурье (ОНТИ, 1934) или Л. В. Канторович, Определенные интегралы и ряды Фурье (изд. ЛГУ, 1940) или Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3 (ГТТИ, 1949).

находим

$$2\sin\alpha\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)\alpha = 1-\cos 2n\alpha = 2\sin^2 n\alpha,$$

откуда и следует (7).

С помощью (7) получаем

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^2 f(t)\,dt. \qquad (8)$$

Интеграл (8) есть сингулярный *интеграл Фейера*. Покажем, что для него выполнены условия теоремы Фаддеева.

Для этого рассмотрим функцию $f(t)=1$. Вычисляя ее коэффициенты Фурье по формулам (3), получим $a_0=2$, $a_k=b_k=0$ $(k=1, 2, \ldots)$.

Значит, для этой функции $S_n(x)=1$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, а следовательно и $\sigma_n(x)=1$.

Но выражая $\sigma_n(x)$ интегралом Фейера, получим, что

$$\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^2 dt = 1. \qquad (9)$$

Заметив это, рассмотрим точку $x\in(-\pi, \pi)$. Пусть $-\pi\leqslant\alpha<x<\beta\leqslant\pi$. Если $t\in[-\pi, \alpha]$, то

$$\frac{1}{\sin^2\frac{t-x}{2}}\leqslant\max\left\{\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha-x}{2}},\ \frac{1}{\sin^2\frac{-\pi-x}{2}}\right\} = A(x, \alpha),$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\alpha}\left[\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^2 dt < \frac{A(x, \alpha)}{n},$$

где $A(x, \alpha)$ не зависит от n. Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\alpha}\left[\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^2 dt = 0.$$

Аналогично мы убедимся, что стремится к нулю интеграл по промежутку $[\beta, \pi]$. Сопоставляя это с (9), находим, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^2 dt = 1,$$

так что функция

$$\frac{1}{2n\pi}\left[\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^2$$

есть ядро.

Для этого ядра легко построить горбатую мажоранту. Для этого заметим, что $|\sin z| \leqslant |z|$. Отсюда $\frac{1}{\sin^2 z} \geqslant \frac{1}{z^2}$. Но $\frac{1}{\sin^2 z} \geqslant 1$. Стало быть,

$$\frac{1}{\sin^2 z} \geqslant \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{z^2}\right) = \frac{z^2+1}{2z^2}$$

и

$$\sin^2 \frac{n(t-x)}{2} \leqslant \frac{2n^2(t-x)^2}{n^2(t-x)^2+4}. \tag{10}$$

С другой стороны, когда $|z| \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $|\sin z| \geqslant \frac{2}{\pi}|z|$, так что[1])

$$\sin^2 \frac{t-x}{2} \geqslant \frac{1}{\pi^2}(t-x)^2. \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует, что

$$\frac{1}{2n\pi}\left[\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^2 \leqslant \frac{1}{2n\pi}\,\frac{2n^2(t-x)^2}{n^2(t-x)^2+4}\cdot\frac{\pi^2}{(t-x)^2} = \frac{n\pi}{n^2(t-x)^2+4}.$$

Функция $\frac{n\pi}{n^2(t-x)^2+4}$ есть горбатая мажоранта ядра Фейера. Но

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{n\pi\,dt}{n^2(t-x)^2+4} < \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi\,dz}{z^2+4} = \frac{\pi^2}{2},$$

т. е. интегралы от мажоранты ограничены числом, не зависящим от n.

Итак, интеграл Фейера удовлетворяет условиям теоремы Д. К. Фаддеева. Отсюда следует

Теорема 1 (Л. Фейер—А. Лебег). *Почти везде на* $[-\pi, +\pi]$ *будет*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x). \tag{12}$$

Это соотношение выполняется во всех точках Лебега и тем более во всех точках непрерывности функции $f(t)$*, лежащих внутри* $[-\pi, +\pi]$.

В гл. VII мы установили, что тригонометрическая система (1) *полна*. Это означало, что всякая функция $f(x) \in L_2$, у которой все коэффициенты Фурье

---

[1]) Так как $-\pi < x < \pi$, $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$, то $\left|\frac{t-x}{2}\right|$ может оказаться и больше, чем $\frac{\pi}{2}$. Однако, это несущественно. В самом деле, положим $a = \max\{-\pi, x-\pi\}$, $b = \min\{\pi, x+\pi\}$. Нетрудно видеть, что разность между интегралом Фейера (8) и интегралом

$$\sigma_n^* = \frac{1}{2n\pi}\int_a^b \left[\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^2 f(t)\,dt.$$

при возрастании n стремится к нулю (ибо, например, при $-\pi \leqslant t \leqslant a$ будет $\left|\sin\frac{t-x}{2}\right| \geqslant \left|\sin\frac{-\pi-x}{2}\right|$), поэтому все рассуждения можно вести для интеграла σ_n^*.

(3) равны нулю, эквивалентна нулю. Теперь мы можем избавиться от ограничения, что $f(x)$ суммируема с квадратом. Справедлива следующая

Теорема 2. *Если все коэффициенты Фурье* (3) *суммируемой функции $f(x)$ равны нулю, то $f(x)$ эквивалентна нулю.*

В самом деле, в этом случае $\sigma_n(x)=0$ и, следовательно, $f(x)=0$ во всех точках, где имеет место (12), т. е. почти везде.

Теорема 1 позволяет делать некоторые высказывания и о поведении сумм $S_n(x)$. Для этого заметим, что

$$\sigma_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

так что

$$S_n(x)-\sigma_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \tag{13}$$

Отсюда

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[S_n(x)-\sigma_n(x)]^2\,dx=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^2}(a_k^2+b_k^2). \tag{14}$$

Рассмотрим последовательность $n_1, n_2, n_3, \ldots$ натуральных чисел, для которой

$$\frac{n_{i+1}}{n_i}>A>1. \tag{15}$$

Такая последовательность называется *лакунарной*. Справедлива следующая

Теорема 3 (А. Н. Колмогоров). *Пусть $f(x)$ суммируема с квадратом. Если $\{n_i\}$ лакунарная последовательность, то почти везде на $[-\pi, +\pi]$ будет*

$$\lim_{i\to\infty}S_{n_i}(x)=f(x).$$

Доказательство. В силу теоремы Фейера—Лебега достаточно показать, что почти везде будет $\lim\limits_{i\to\infty}\left[S_{n_i}(x)-\sigma_{n_i}(x)\right]=0$.

Для этого (теорема 11, § 1, гл. VI, следствие) достаточно показать, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(S_{n_i}-\sigma_{n_i}\right)^2dx<+\infty$, или, что то же самое, что

$$Q=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n_i^2}\sum_{k=1}^{n_i}k^2(a_k^2+b_k^2)\right]<+\infty.$$

Сумму Q можно записать так:

$$\begin{aligned}Q={}&\frac{1}{n_1^2}\sum_{k=1}^{n_1}u_k+\\&+\frac{1}{n_2^2}\sum_{k=1}^{n_1}u_k+\frac{1}{n_2^2}\sum_{k=n_1+1}^{n_2}u_k+\\&+\frac{1}{n_3^2}\sum_{k=1}^{n_1}u_k+\frac{1}{n_3^2}\sum_{k=n_1+1}^{n_2}u_k+\frac{1}{n_3^2}\sum_{k=n_2+1}^{n_3}u_k+\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

где $u_k = k^2(a_k^2 + b_k^2)$. Суммируя этот ряд по столбцам, получим

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{s=i}^{\infty}\frac{1}{n_s^2}\right)\left(\sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i} u_k\right) \qquad (n_0 = 0).$$

Но так как

$$\frac{n_i}{n_s} \leqslant \frac{1}{A^{s-i}},$$

то

$$\left(\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{n_s^2}\right)\left(\sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i} u_k\right) < \sum_{s=i}^{\infty}\left(\frac{n_i}{n_s}\right)^2 \cdot \sum_{n_{i-1}+1}^{n_i}(a_k^2 + b_k^2) <$$

$$< \sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{A^{2s}} \cdot \sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{A^2}{A^2 - 1}\sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i}(a_k^2 + b_k^2).$$

Отсюда

$$Q < \frac{A^2}{A^2-1}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{A^2}{A^2-1}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) < +\infty,$$

ибо ряд $\sum (a_k^2 + b_k^2)$ сходится. Теорема доказана.

Полезно отметить близость этой теоремы А. Н. Колмогорова и теорем Качмаша и Радемахера из § 3, гл. VII. Именно, в обоих случаях ищутся такие индексы n_i, чтобы частные суммы $S_{n_i}(x)$ ряда Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \omega_k(x)$ функции $f(x)$ сходились к $f(x)$ почти везде. Однако у Качмаша и Радемахера предполагаются заданными коэффициенты c_k и индексы n_i характеризуются через них независимо от системы $\{\omega_k(x)\}$. Напротив, А. Н. Колмогоров рассматривает *определенную* — тригонометрическую — ортонормальную систему и дает характеристику индексов n_i, не зависящую от коэффициентов c_k.

Определение. Тригонометрический ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(a_{n_i}\cos n_i x + b_{n_i}\sin n_i x\right)$$

называется *лакунарным*, если $\{n_i\}$ есть лакунарная последовательность.

Теорема 4 (А. Н. Колмогоров). *Если ряд Фурье суммируемой функции $f(x)$ оказывается лакунарным, то он сходится к $f(x)$ почти везде.*

Доказательство. Если $n_i \leqslant n < n_{i+1}$, то

$$S_n(x) = S_{n_i}(x), \quad \text{ибо} \quad a_{n_i+1} = b_{n_i+1} = a_{n_i+2} = \ldots = b_n = 0.$$

Поэтому достаточно показать, что почти везде оказывается

$$\lim_{i\to\infty} S_{n_i}(x) = f(x), \tag{*}$$

а это утверждение, в свою очередь, будет доказано, если мы установим, что почти везде

$$\lim_{i\to\infty}\left[S_{n_i}(x) - \sigma_{n_i}(x)\right] = 0. \tag{*_*}$$

Отметим, кстати, что для частного случая, когда $f(x) \in L_2$, равенство (*), а с ним и теорема сразу следуют из предыдущей теоремы Колмогорова.

Переходя к доказательству соотношения $(*_*)$, заметим, что в силу (13)

$$\left| S_{n_i}(x) - \sigma_{n_i}(x) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n_i} \frac{k}{n_i} (|a_k| + |b_k|).$$

Если k не совпадает с одним из чисел $n_1, n_2, n_3, \ldots$, то $a_k = b_k = 0$. Стало быть,

$$S_{n_i}(x) - \sigma_{n_i}(x) | \leqslant \sum_{m=1}^{i} \frac{n_m}{n_i} (|a_{n_m}| + |b_{n_m}|).$$

В силу теоремы Римана—Лебега (§ 1) $\lim\limits_{m\to\infty} a_{n_m} = \lim\limits_{m\to\infty} b_{n_m} = 0$.

Заметив это, возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем такое m_0, что при $m > m_0$ будет $|a_{n_m}| + |b_{n_m}| < \varepsilon$. Тогда, обозначая $\sum\limits_{m=1}^{m_0} n_m (|a_{n_m}| + |b_{n_m}|)$ через M, будем иметь, при $i > m_0$

$$\left| S_{n_i}(x) - \sigma_{n_i}(x) \right| < \frac{M}{n_i} + \varepsilon \sum_{m=m_0+1}^{i} \frac{n_m}{n_i}. \tag{16}$$

Но так как

$$\frac{n_m}{n_i} \leqslant \frac{1}{A^{i-m}}, \quad \text{то} \quad \sum_{m=m_0+1}^{i} \frac{n_m}{n_i} < \sum_{m=m_0+1}^{i} \frac{1}{A^{i-m}} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{A^k} = \frac{A}{A-1}.$$

Отсюда и из (16) следует, что

$$\left| S_{n_i}(x) - \sigma_{n_i}(x) \right| < \frac{M}{n_i} + \frac{A}{A-1} \varepsilon.$$

Если i достаточно велико, то $\frac{M}{n_i} < \varepsilon$, и при этих i будет

$$\left| S_{n_i}(x) - \sigma_{n_i}(x) \right| < \left(1 + \frac{A}{A-1}\right) \varepsilon,$$

что и доказывает теорему.

Замечание. Хорошо известен также способ Абеля—Пуассона для суммирования рядов Фурье.[1] Он состоит в образовании вспомогательного ряда $S_r(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, который сходится при $0 < r < 1$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{r\to 1-0} S_r(x)$, то этот предел и считается обобщенной суммой ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{17}$$

---

[1]) И. И. Привалов, Ряды Фурье, стр. 108; Л. В. Канторович, Определенные интегралы и ряды Фурье, стр. 217; Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3, стр. 723.

Нетрудно показать, что в каждой точке x, в которой ряд (17) суммируется процессом Чезаро — Фейера, он суммируется и процессом Абеля — Пуассона к той же сумме.[1] Значит *ряд Фурье суммируемой функции $f(x)$ суммируется к ней способом Абеля — Пуассона почти везде.* Этот факт можно доказать и не пользуясь теоремой Фейера — Лебега, а привлекая теорему П. И. Романовского[2]) к исследованию того сингулярного интеграла, которым выражается $S_r(x)$:

$$S_r(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2}\,dt$$

(интеграл Пуассона). Мы не будем останавливаться на этом.

§ 4. Дальнейшие свойства тригонометрических рядов и рядов Фурье

Не всякий тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

является рядом Фурье какой-нибудь суммируемой функции, даже если его коэффициенты стремятся к нулю. Чтобы в этом убедиться, установим некоторые предложения, имеющие и самостоятельный интерес.

Лемма 1 (Н. Абель). *Пусть даны числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Положим*

$$s_k=\sum_{i=1}^{k}a_i$$

и пусть

$$|s_k|\leqslant A \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Если $q_1>q_2>\ldots>q_n>0$, то

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kq_k\right|\leqslant Aq_1.$$

Доказательство. Если $k>1$, то $a_k=s_k-s_{k-1}$. Значит

$$\sum_{k=1}^{n}a_kq_k=s_1q_1+\sum_{k=2}^{n}(s_k-s_{k-1})\,q_k=\sum_{k=1}^{n}s_kq_k-\sum_{k=2}^{n}s_{k-1}q_k$$

и, стало быть,

$$\sum_{k=1}^{n}a_kq_k=\sum_{k=1}^{n-1}s_k(q_k-q_{k+1})+s_nq_n.$$

---

[1]) И. И. Привалов, Ряды Фурье, стр. 110; Л. В. Канторович, Определенные интегралы и ряды Фурье, стр. 218; Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3, стр. 731.

[2]) Путь, основанный на теореме Романовского, дает более сильный результат, чем теорема Фейера — Лебега. Именно, он показывает, что ряд Фурье функции $f(x)$ суммируется процессом Абеля — Пуассона в каждой точке, где $f(x)$ есть производная своего неопределенного интеграла (а не только в точках Лебега, как это следует из теоремы Фейера — Лебега).

Отсюда

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k q_k\right| \leqslant A\left[\sum_{k=1}^{n-1}(q_k - q_{k+1}) + q_n\right] = Aq_1,$$

что и требовалось доказать.

Определение. Будем говорить, что ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, удовлетворяет *условию Абеля*, если

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant A \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Лемма 2. *Каждый из рядов*

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots \qquad (x \neq 2k\pi),$$
$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots \qquad (x \text{ — любой})$$

при фиксированном x удовлетворяет условию Абеля.

Доказательство. Положим, $A_n = \sum_{k=1}^{n} \cos kx$, $B_n = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$. Чтобы не повторяться, оценим эти суммы способом, отличным от применявшегося нами в аналогичных случаях выше.

Эти суммы представляют собой вещественную и мнимую части суммы

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} e^{kxi} = \frac{e^{xi} - e^{(n+1)xi}}{1 - e^{xi}}.$$

Значит, достаточно оценить модуль последней суммы. Очевидно

$$|C_n| \leqslant \frac{2}{|1 - e^{xi}|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Отсюда

$$|A_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}, \qquad |B_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

и лемма доказана при $x \neq 2k\pi$. Если же $x = 2k\pi$, то для ряда синусов лемма тривиальна.

Теорема 1 (Н. Абель). *Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ удовлетворяет условию Абеля. Если*

$$q_1 > q_2 > \ldots > q_n > ,\ \ldots,\ \lim_{n\to\infty} q_n = 0,$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k q_k$ сходится.

Доказательство. Положим, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k q_k$. Тогда, по лемме Абеля, при $m > n$

$$|S_m - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k q_k\right| \leqslant 2Aq_{n+1}$$

и при достаточно большом n эта величина сколь угодно мала, откуда и следует теорема.

Следствие. *Если*

$$q_1 > q_2 > \ldots > q_n > \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} q_n = 0,$$

то каждый из рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos nx \qquad (x \neq 2k\pi), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin nx \qquad (x \text{ — любой})$$

сходится.

Например, *ряд*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n} \tag{1}$$

сходится при всяком x. Мы покажем ниже, что (1) не является рядом Фурье никакой суммируемой функции. Для этого нужна

Лемма 3. *Пусть*

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}.$$

Каковы бы ни были x и n, справедлива оценка $|\psi_n(x)| < 2\sqrt{\pi}$.

Доказательство. Пусть сначала $0 < x < \pi$. Пусть q целое число, такое, что $q \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{x} < q+1$. Тогда

$$|\psi_n(x)| \leqslant |\psi_q(x)| + \left| \sum_{k=q+1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \right|.$$

(Если $q=0$, то исчезает первое, а если $q \geqslant n$, то — второе слагаемое правой части). Так как $|\sin\alpha| \leqslant |\alpha|$, то

$$|\psi_q(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{q} \frac{|\sin kx|}{k} \leqslant qx \leqslant \sqrt{\pi}. \tag{2}$$

С другой стороны, в силу леммы Абеля,

$$\left| \sum_{k=q+1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \right| \leqslant \frac{A}{q+1},$$

где $A = \max \left| \sum_{k=q+1}^{i} \sin kx \right|$ $(q+1 \leqslant i \leqslant n)$. Но, буквально повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 2, мы увидим, что

$$\left| \sum_{k=q+1}^{i} \sin kx \right| \leqslant \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|},$$

значит $A \leqslant \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$ и, следовательно,

$$\left| \sum_{k=q+1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \right| \leqslant \frac{1}{(q+1)\sin \frac{x}{2}}.$$

Принимая во внимание, что $\sin\frac{x}{2}\geqslant\frac{x}{\pi}$, а $q+1>\frac{\sqrt{\pi}}{x}$, имеем

$$\left|\sum_{k=q+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|<\frac{1}{\frac{\sqrt{\pi}}{x}\cdot\frac{x}{\pi}}=\sqrt{\pi},$$

откуда, в связи с (2), и следует требуемая оценка. Ввиду того что $|\psi_n(x)|$ четная функция, эта оценка верна и для $-\pi<x<0$. Для $x=0$ и π эта оценка тривиальна, т. е. она верна для $-\pi<x\leqslant\pi$, а тогда, в силу периодичности $\psi_n(x)$, она верна всегда, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ суммируемая функция. Если*

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\quad \textit{то ряд}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$$

сходится. [1]

Доказательство. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ сходится по следствию теоремы 1. Если его сумма есть $\psi(x)$, то при всех x

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)f(x)=\psi(x)f(x).$$

В силу леммы 3,

$$|\psi_n(x)f(x)|\leqslant 2\sqrt{\pi}\,|f(x)|.$$

Значит, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_n(x)f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)f(x)\,dx.$$

Но

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_n(x)f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k},$$

откуда и следует теорема.

Обращаясь к ряду (1), мы видим, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ расходится. [2] Значит (1) дает *пример всюду сходящегося тригонометрического ряда, не являющегося рядом Фурье никакой суммируемой функции.*

В том же порядке идей доказывается следующая теорема.

---

[1]) Если $f(x)\in L_2$, то теорема есть очевидное следствие сходимости обоих рядов $\sum b_n^2$ и $\sum\frac{1}{n^2}$ и неравенства $\frac{|b_n|}{n}<b_n^2+\frac{1}{n^2}$. В этом случае сходится также и ряд $\sum\frac{a_n}{n}$, который для произвольной суммируемой функции может расходиться.

[2]) Так как функция $\frac{1}{x\ln x}$ убывает, то $\frac{1}{n\ln n}>\int_{n}^{n+1}\frac{dx}{x\ln x}$.

Отсюда

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n\ln n}>\int_{2}^{N}\frac{dx}{x\ln x}=\ln\ln N-\ln\ln 2.$$

***Теорема* 3.** *Пусть в промежутке* $[-\pi, \pi]$ *задана суммируемая функция* $f(x)$, *имеющая ряд*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx+b_n \sin nx)$$

своим рядом Фурье. Если $[A, B] \subset [-\pi, \pi]$, *то*

$$\int_A^B f(x)\,dx=\int_A^B \frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_A^B (a_n \cos nx+b_n \sin nx)\,dx.$$

Иначе говоря, ряд Фурье суммируемой функции можно почленно интегрировать. Этот факт весьма замечателен, поскольку сам этот ряд может и не сходиться.

Для того случая, когда функция $f(x)$ суммируема с *квадратом*, наша теорема немедленно вытекает из замкнутости тригонометрической системы и следствия теоремы 1, § 3, гл. VII.

Чтобы доказать теорему в общем случае, положим

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \text{при } x \in [A, B],\\ 0 & \text{при } x \overline{\in} [A, B].\end{cases}$$

Эта функция, как известно из элементов Анализа, разлагается в ряд Фурье

$$\varphi(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k \cos kx+\beta_k \sin kx)$$

во всех точках сегмента $[-\pi, \pi]$, кроме разве лишь точек $-\pi$, A, B, π.

Пусть $S_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx+\beta_k \sin kx)$.

Эту сумму можно представить иначе, если фактически вычислить коэффициенты α_k и β_k:

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\,dx=\frac{B-A}{\pi},$$

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos kx\,dx=\frac{\sin kB-\sin kA}{k\pi},$$

$$\beta_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin kx\,dx=\frac{\cos kA-\cos kB}{k\pi}.$$

Подставляя эти величины в выражение $S_n(x)$, найдем:

$$S_n(x)=\frac{B-A}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin k(B-x)}{k}-\frac{\sin k(A-x)}{k}\right].$$

Отсюда, в силу леммы 3, при всех x и n

$$|S_n(x)| \leqslant \frac{B-A}{2\pi}+\frac{4}{\sqrt{\pi}},$$

т. е. суммы $S_n(x)$ равномерно органичены. Пользуясь теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, мы находим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,S_n(x)\,dx,$$

что можно записать и так:

$$\int_A^B f(x)\,dx = \frac{\alpha_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx + \beta_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\right]$$

или так:

$$\int_A^B f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}(B-A) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \frac{\sin kB - \sin kA}{k} + b_k \frac{\cos kA - \cos kB}{k}\right],$$

а это равенство и представляет доказываемую теорему.

Теорема 4 (Г. Кантор — А. Лебег). *Если во всех точках множества E положительной меры будет*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0, \quad \textit{то} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Доказательство. Положим $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Тогда для любого n существует угол θ_n, для которого

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = r_n \cos(nx + \theta_n).$$

Допуская, что r_n не стремится к 0, мы сможем выделить последовательность $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, для которой $r_{n_k} > \sigma > 0$. Но при $x \in E$ будет

$$r_n \cos(nx + \theta_n) \to 0,$$

значит при этих x

$$\cos\left(n_k x + \theta_{n_k}\right) \to 0.$$

Отсюда, в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \cos^2\left(n_k x + \theta_{n_k}\right) dx = 0. \tag{3}$$

С другой стороны,

$$\int_E \cos^2(nx + \theta_n)\,dx = \frac{1}{2}\int_E [1 + \cos(2nx + 2\theta_n)]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\, mE + \cos 2\theta_n \int_E \cos 2nx\,dx - \sin 2\theta_n \int_E \sin 2nx\,dx.$$

Интегралы $\int_E \cos nx\,dx$, $\int_E \sin nx\,dx$, будучи коэффициентами Фурье характеристической функции множества E, стремятся к 0 (следствие теоремы Римана — Лебега). Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \cos^2(nx + \theta_n)\,dx = \frac{1}{2}\, mE,$$

что противоречит (3). Теорема доказана.

Следствие. *Если тригонометрический ряд сходится на множестве положительной меры, то его коэффициенты стремятся к нулю.*

Весьма близко по идее доказательство следующей теоремы.

Теорема 5 (Н. Н. Лузин — А. Данжуа). *Если тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

абсолютно сходится на множестве E положительной меры, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)<+\infty.$$

Доказательство. Сохраняя обозначения предыдущей теоремы, будем иметь для $x\in E$

$$\sum_{n=1}^{\infty}r_n\cos^2(nx+\theta_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}r_n|\cos(nx+\theta_n)|<+\infty.$$

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r_n\cos^2(nx+\theta_n)=A(x)$. Эта функция измерима и конечна на множестве E. Значит, из E выделяется подмножество E_0 ($mE_0>0$), на котором $A(x)$ ограничена и, стало быть, суммируема.

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r_n\int\limits_{E_0}\cos^2(nx+\theta_n)\,dx=\int\limits_{E_0}A(x)\,dx<+\infty$. Но при доказательстве теоремы 4 мы видели, что

$$\int\limits_{E_0}\cos^2(nx+\theta_n)\,dx\to\frac{mE_0}{2}.$$

Значит, для $n\geqslant n_0$ этот интеграл будет больше, чем $mE_0/3$ и, стало быть,

$$\frac{mE_0}{3}\sum_{n=n_0}^{\infty}r_n<\sum_{n=n_0}^{\infty}r_n\int\limits_{E_0}\cos^2(nx+\theta_n)\,dx<+\infty,$$

откуда следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r_n$.

Теорема доказана.

§ 5. Производные Шварца и выпуклые функции

Мы имеем в виду изложить некоторые факты, связанные с вопросами единственности разложения функции в тригонометрический ряд. Для этого нам понадобятся некоторые новые сведения, представляющие и самостоятельный интерес. Настоящий параграф мы и посвятим изложению этих сведений.

Определение 1. Пусть функция $F(x)$ определена в некоторой окрестности точки x. Если существует определенный предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h},$$

то он называется *производной Шварца* функции $F(x)$ в точке x и обозначается через $F^{(')}(x)$.

Если в точке x существует обыкновенная производная $F'(x)$, то существует и производная Шварца, причем $F^{(')}(x)=F'(x)$.

Это утверждение непосредственно следует из того, что правая часть равенства

$$\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h}=\frac{1}{2}\left[\frac{F(x+h)-F(x)}{h}+\frac{F(x-h)-F(x)}{-h}\right]$$

при $h\to 0$ стремится к $F'(x)$.

Но возможны случаи, когда $F'(x)$ не существует, а $F^{(')}(x)$ существует. Так, например, обстоит дело в точке $x=0$ у функции

$$F(x)=x\sin\frac{1}{x} \qquad [F(0)=0].$$

Таким образом, понятие производной Шварца есть обобщение понятия производной. Аналогичным способом можно обобщить понятие второй производной.

Определение 2. Пусть функция $F(x)$ определена в некоторой окрестности точки x. Если существует определенный предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-2F(x)+F(x-h)}{h^2},$$

то он называется *второй производной Шварца* и обозначается через $F^{('')}(x)$.

Если в точке x существует обыкновенная вторая производная $F''(x)$, то существует и $F^{('')}(x)$, причем $F^{('')}(x)=F''(x)$.

В самом деле, наличие в точке x второй производной предполагает, что в окрестности этой точки существует первая производная $F'(x)$. Положив

$$F(x+h)+F(x-h)=\varphi(h),$$

мы сможем к правой части равенства

$$\frac{F(x+h)-2F(x)+F(x-h)}{h^2}=\frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h^2}$$

применить известную формулу Коши, что дает

$$\frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h^2}=\frac{\varphi'(\theta h)}{2\theta h} \qquad (0<\theta<1),$$

откуда

$$\frac{F(x+h)-2F(x)+F(x-h)}{h^2}=\frac{F'(x+\theta h)-F'(x-h\theta)}{2\theta h},$$

а правая часть этого равенства, как мы видели, стремится (при $h\to 0$) к $F''(x)$.

Пример функции

$$F(x)=\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\,dt \tag{1}$$

показывает, что $F^{('')}(x)$ может существовать и тогда, когда $F''(x)$ не существует [у функции (1) так обстоит дело в точке $x=0$].

Теорема 1 (Г. А. Шварц). *Пусть функция $F(x)$ задана и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если всюду в интервале (a, b) будет*

$$F^{('')}(x)=0,$$

то $F(x)$ есть линейная функция.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon>0$ и положим

$$\varphi(x)=F(x)-\left[F(a)+\frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\right]+\varepsilon(x-a)(x-b).$$

Очевидно $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. Кроме того, всюду в (a, b) будет

$$\varphi^{('')}(x)=2\varepsilon. \tag{2}$$

Покажем, что всюду в $[a, b]$ будет

$$\varphi(x)\leqslant 0. \tag{3}$$

Действительно, если бы это было не так, то функция $\varphi(x)$ в какой-то внутренней точке x_0 принимала бы свое наибольшее значение $\varphi(x_0)$ и тогда неравенство $\frac{\varphi(x_0+h)-2\varphi(x_0)+\varphi(x_0-h)}{h^2}\leqslant 0$ дало бы в пределе $\varphi^{('')}(x_0)\leqslant 0$, что противоречит (2).

Аналогично мы убедимся, что функция

$$\psi(x)=-\left\{F(x)-\left[F(a)+\frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\right]\right\}+\varepsilon(x-a)(x-b)$$

всюду удовлетворяет неравенству

$$\psi(x)\leqslant 0. \tag{4}$$

Объединяя (3) и (4), получим

$$\left|F(x)-\left\{F(a)+\frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\right\}\right|\leqslant\varepsilon\,|(x-a)(x-b)|,$$

откуда, ввиду произвольности ε, следует, что

$$F(x)=F(a)+\frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a).$$

Теорема доказана.

Теперь мы займемся вопросом о том, можно ли, зная вторую производную Шварца $F^{('')}(x)$, восстановить исходную функцию $F(x)$. Ход идей здесь весьма напоминает те рассуждения, которые мы проводили в § 8 гл. IX, когда занимались вопросом восстановления первообразной функции по ее производной. Рекомендуем читателю освежить в памяти указанный параграф.

Определение 3. Число λ (конечное или бесконечное) мы будем называть *вторым производным числом Шварца* функции $F(x)$ в точке x, если существует такая стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел h_1, h_2, h_3, ..., что

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\frac{F(x+h_n)-2F(x)+F(x-h_n)}{h_n^2}.$$

Легко проверить, что во всякой точке x любая функция $F(x)$ имеет вторые производные числа Шварца и что для того, чтобы в точке x существовала вторая производная Шварца, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке все вторые производные числа Шварца были равны между собой.

Определение 4. Функция $F(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, называется *выпуклой вниз*, если для любых двух точек x_1 и x_2 отрезка $[a, b]$ будет

$$F\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{F(x_1)+F(x_2)}{2}. \tag{5}$$

Простейшим примером такой функции служит линейная функция, у которой в (5) стоит знак равенства. Менее тривиальные примеры доставляет

Лемма 1. *Если функция $f(t)$ возрастает на отрезке $[a, b]$, то ее неопределенный интеграл*

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

есть функция, выпуклая вниз.

Доказательство. Пусть $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. Тогда

$$F(x_1) - 2F\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + F(x_2) = \int\limits_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_2} f(t)\,dt - \int\limits_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} f(t)\,dt.$$

Так как $f(t)$ возрастает, то

$$\int\limits_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_2} f(t)\,dt \geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\frac{x_2-x_1}{2} \geqslant \int\limits_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} f(t)\,dt,$$

откуда и следует, что $F(x_1) - 2F\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + F(x_2) \geqslant 0$.

Легко видеть, далее, что

1) сумма конечного числа функций, выпуклых вниз, есть функция, выпуклая вниз;

2) предел сходящейся последовательности функций, выпуклых вниз, есть функция, выпуклая вниз;

3) сумма сходящегося ряда функций, выпуклых вниз, есть функция, выпуклая вниз.

Переходя к дифференциальным свойствам таких функций, прежде всего отметим, что все вторые производные числа Шварца функции, выпуклой вниз, неотрицательны. Это свойство характеризует такие функции. Именно, имеет место

Лемма 2. *Если все вторые производные числа Шварца непрерывной функции $F(x)$ неотрицательны, то эта функция выпукла вниз.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$ и, так же как при доказательстве теоремы Шварца, введем функцию

$$\varphi(x) = F(x) - \left[F(a) + \frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\right] + \varepsilon(x-a)(x-b).$$

Она непрерывна; $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ и все вторые производные числа Шварца λ этой функции удовлетворяют неравенству $\lambda \geqslant 2\varepsilon$. Отсюда, так же как и в теореме Шварца, следует, что $\varphi(x) \leqslant 0$.

Из этого неравенства, переходом к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$F(x) \leqslant F(a) + \frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)$$

и, в частности,

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{F(a)+F(b)}{2}.$$

Это и доказывает лемму потому, что вместо чисел a и b мы могли бы взять любые другие числа x_1 и x_2.

Лемма 3. *Пусть функция $F(x)$ задана и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если почти везде на (a, b) все вторые производные числа Шварца неотрицательны и ни в одной точке (a, b) ни одно второе производное число Шварца не равно $-\infty$, то функция $F(x)$ выпукла вниз.*

Доказательство. Обозначим через E множество тех точек (a, b), в которых хоть одно второе производное число Шварца функции $F(x)$ отрицательно. По условию $mE = 0$.

Поэтому, в силу теоремы 6 § 2 гл. VIII, существует непрерывная возрастающая функция $\sigma(x)$, такая, что во всех точках множества E будет

$$\sigma'(x) = +\infty. \tag{6}$$

Положим $\tau(x)=\int_a^x \sigma(t)\,dt$. В силу (6) во всех точках множества E будет

$$\tau''(x)=+\infty. \tag{7}$$

Заметив это, возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и рассмотрим функцию $\Phi(x)=F(x)+\varepsilon\tau(x)$.

Все вторые производные числа Шварца функции $\Phi(x)$ неотрицательны. Действительно, по лемме 1, функция $\tau(x)$ выпукла вниз, а потому

$$\frac{\Phi(x+h)-2\Phi(x)+\Phi(x-h)}{h^2}\geqslant\frac{F(x+h)-2F(x)+F(x-h)}{h^2}.$$

Значит, если бы у функции $\Phi(x)$ при $x\,\overline{\in}\,E$ существовало бы отрицательное второе производное число Шварца, то при этом же x должно было бы существовать отрицательное второе производное число Шварца и у $F(x)$, что невозможно по самому определению множества E. Если же $x\in E$, то отношение $\frac{F(x+h)-2F(x)+F(x-h)}{h^2}$ должно оказаться ограниченным снизу (иначе в точке x существовало бы второе производное число Шварца, равное $-\infty$) и потому [в силу (7)] $\Phi^{('')}(x)=+\infty$.

Итак, $\Phi(x)$ удовлетворяет условиям предыдущей леммы и потому выпукла вниз. Но тогда и $F(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\Phi(x)$ выпукла вниз. Лемма доказана.

Теперь мы можем доказать интересующий нас результат о восстановлении функции по ее второй производной Шварца.

Теорема 2 (Ш. Ж. Валле-Пуссен). *Пусть на $[a, b]$ задана непрерывная функция $F(x)$, имеющая всюду в интервале (a, b) вторую производную Шварца $F^{('')}(x)=f(x)$.*

Если $f(x)$ всюду конечна и суммируема, то справедливо равенство

$$F(x)=\int_a^x dt\int_a^t f(u)\,du+Ax+B. \tag{8}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию $\varphi_n(x)$, полагая

$$\varphi_n(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } f(x)\leqslant n,\\ n, & \text{если } f(x)>n.\end{cases}$$

Так как

$$|\varphi_n(x)|\leqslant|f(x)|, \tag{9}$$

то $\varphi_n(x)$ суммируема.

Пусть $\Phi_n(x)=\int_a^x dt\int_a^t \varphi_n(u)\,du$ и $R_n(x)=F(x)-\Phi_n(x)$. Ввиду непрерывности интеграла $\int_a^t \varphi_n(u)\,du$, мы имеем для всех $x\in[a, b]$

$$\Phi_n'(x)=\int_a^x \varphi_n(u)\,du.$$

А так как правая часть этого равенства почти везде имеет производную, равную $\varphi_n(x)$, то почти для всех x оказывается

$$\Phi_n''(x)=\varphi_n(x). \tag{10}$$

Но всюду, где имеет место (10), разность $R_n(x)$ имеет вторую производную Шварца $R_n^{('')}(x)=f(x)-\varphi_n(x)\geqslant 0$.

Итак, множество точек, где хоть одно второе производное число Шварца функции $R_n(x)$ отрицательно, имеет меру 0.

С другой стороны, по формуле Коши

$$\frac{\Phi_n(x+h)-2\Phi_n(x)+\Phi_n(x-h)}{h^2}=\frac{\Phi_n'(x+\theta h)-\Phi_n'(x-\theta h)}{2\theta h}=$$

$$=\frac{1}{2\theta h}\int\limits_{x-\theta h}^{x+\theta h}\varphi_n(u)\,du\leqslant n$$

и, стало быть,

$$\frac{R_n(x+h)-2R_n(x)+R_n(x-h)}{h^2}\geqslant\frac{F(x+h)-2F(x)+F(x-h)}{h^2}-n.$$

Отсюда ясно, что ни одно второе производное число Шварца функции $R_n(x)$ не равно $-\infty$. Поэтому, в силу леммы 3, функция $R_n(x)$ выпукла вниз.

Если $n\to\infty$, то $\varphi_n(x)\to f(x)$. Отсюда и из (9) вытекает, что при любом t будет

$$\int\limits_a^t\varphi_n(u)\,du\to\int\limits_a^t f(u)\,du.$$

Но

$$\left|\int\limits_a^t\varphi_n(u)\,du\right|\leqslant\int\limits_a^b|f(u)|\,du$$

и потому, при каждом x будет

$$\Phi_n(x)=\int\limits_a^x dt\int\limits_a^t\varphi_n(u)\,du\to\int\limits_a^x dt\int\limits_a^t f(u)\,du.$$

Значит, функция

$$R(x)=F(x)-\int\limits_a^x dt\int\limits_a^t f(u)\,du,$$

будучи предельной для выпуклой функции $R_n(x)$, и сама выпукла вниз.

Это означает, что при любых x_1 и x_2 окажется

$$R\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{R(x_1)+R(x_2)}{2}. \qquad (11)$$

Но, если бы вместо $F(x)$ мы стали бы говорить о функции $-F(x)$, то вместо $f(x)$ появилась бы функция $-f(x)$. Вместе с ней изменила бы знак и $R(x)$, так что неравенство (11) приняло бы вид

$$R\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{R(x_1)+R(x_2)}{2}. \qquad (12)$$

Из (11) и (12) следует, что при любых x_1 и x_2

$$R\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{R(x_1)+R(x_2)}{2}.$$

Отсюда при любом $x\in(a,b)$ и достаточно малом $h>0$ будет

$$R(x+h)-2R(x)+R(x-h)=0 \text{ и, следовательно, } R^{(''\,)}(x)=0.$$

По теореме Шварца отсюда следует, что $R(x)=Ax+B$, а это равносильно доказываемой теореме.

Для теории тригонометрических рядов нам достаточно изложенных сведений. Однако мы хотим установить еще некоторые предложения о выпуклых функциях, ввиду их самостоятельного интереса, хотя ссылаться на них нам и не придется.

Теорема 3. Если $f(x)$ задана, ограничена и выпукла вниз на отрезке $[a, b]$, то во всех точках интервала (a, b) она непрерывна.

Доказательство. Пусть $a < x_0 < b$ и $M(x)$ и $m(x)$ суть верхняя и нижняя функции Бэра функции $f(x)$, введенные нами в § 4 гл. V. Покажем, что можно найти такую последовательность $\{x_n\}$, чтобы $x_n \to x_0$ и $f(x_n) \to M(x_0)$. В самом деле, если $n \to \infty$, то $M_{1/n}(x_0) \to M(x_0)$, а по самому определению $M_{1/n}(x_0)$ в интервале $\left(x_0 - \frac{1}{n},\ x_0 + \frac{1}{n}\right)$ найдется такая точка x_n, что $M_{1/n}(x_0) - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M_{1/n}(x_0)$. Очевидно $\{x_n\}$ и есть требуемая последовательность. [1])

Взяв такую последовательность, положим $y_n = 2x_n - x_0$. Тогда и $y_n \to x_0$ и

$$f(x_n) = f\left(\frac{x_0 + y_n}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_0) + f(y_n)}{2}.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Если δ достаточно мало, то [2]) $M_\delta(x_0) < M(x_0) + \varepsilon$, а так как при достаточно больших n окажется $y_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то для этих n будет

$$f(x_n) < \frac{f(x_0) + M(x_0) + \varepsilon}{2}.$$

Переходя к пределу, сначала при $n \to \infty$, а потом при $\varepsilon \to 0$, получим

$$M(x_0) \leqslant \frac{f(x_0) + M(x_0)}{2}, \quad \text{откуда} \quad M(x_0) \leqslant f(x_0)$$

и, стало быть,

$$M(x_0) = f(x_0). \tag{13}$$

Это справедливо и тогда, когда $x_0 = a$, или $x_0 = b$, потому что точка y_n лежит с той же стороны точки x_0, что и x_n.

Теперь найдем такую последовательность $\{x_n\}$, чтобы оказалось $x_n \to x_0$, $f(x_n) \to m(x_0)$, и положим $y_n = 2x_0 - x_n$.

Если $a < x_0 < b$, то для достаточно больших n точка y_n попадет в $[a, b]$ (ибо $y_n \to x_0$) и тогда окажется

$$f(x_0) = f\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_n) + f(y_n)}{2}.$$

Для достаточно больших n, как и выше, мы будем иметь

$$f(x_0) \leqslant \frac{f(x_n) + M(x_0) + \varepsilon}{2},$$

откуда, переходя к пределу сначала при $n \to \infty$, а потом при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$f(x_0) \leqslant \frac{m(x_0) + M(x_0)}{2}.$$

В силу (13) и очевидного соотношения $m(x) \leqslant M(x)$, отсюда следует, что $M(x_0) = m(x_0)$.

По теореме Бэра (§ 4, гл. V) $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Замечания. 1) Условие ограниченности функции $f(x)$ существенно. Существуют конечные, всюду разрывные, выпуклые функции, но они не ограничены ни в одном интервале.

---

[1]) Аналогично, конечно, можно найти и такую последовательность $\{x_n\}$, чтобы было $x_n \to x_0$, $f(x_n) \to m(x_0)$.

[2]) Ввиду ограниченности $f(x)$ обе функции Бэра $M(x)$ и $m(x)$ всюду конечны.

2) Функция

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } -1<x<+1, \\ 1, & \text{если } x=\pm 1 \end{cases}$$

показывает, что на концах отрезка своего задания выпуклая функция может быть разрывна.

Теорема 4. *Если $f(x)$ выпукла вниз, то при всяком натуральном n*

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}. \tag{14}$$

Доказательство. Если $n=2$, то (14) равносильно соотношению (5), определяющему понятие функции, выпуклой вниз. Пусть для $n=2^m$ неравенство (14) доказано и пусть $n=2^{m+1}$. Положим

$$x'=\frac{x_1+\ldots+x_{2^m}}{2^m}, \qquad x''=\frac{x_{2^m+1}+\ldots+x_{2^{m+1}}}{2^m}.$$

Тогда

$$f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)=f\left(\frac{x'+x''}{2}\right)\leqslant\frac{f(x')+f(x'')}{2}\leqslant\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}.$$

Таким образом, (14) доказано для всех n вида 2^m.

Пусть теперь n не есть число вида 2^m. Подберем столь большое m, чтобы оказалось $2^m>n$, и положим

$$A=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Тогда

$$A=\frac{(x_1+\ldots+x_n)+(2^m-n)A}{2^m}$$

и по уже доказанному

$$f(A)\leqslant\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)+(2^m-n)f(A)}{2^m}, \quad \text{или} \quad f(A)\leqslant\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n},$$

что и доказывает теорему. Этот остроумный способ рассуждения принадлежит Коши.

Следствие. *Если $p_1, p_2, \ldots, p_n$ не отрицательные числа, причем*

$$p_1+p_2+\ldots+p_n>0,$$

а $f(x)$ непрерывная выпуклая вниз функция, то[1]

$$f\left(\frac{p_1x_1+\ldots+p_nx_n}{p_1+\ldots+p_n}\right)\leqslant\frac{p_1f(x_1)+\ldots+p_nf(x_n)}{p_1+\ldots+p_n}. \tag{15}$$

В самом деле, если все p_i рациональны, то (15) приводится к (14). Общий случай получается предельным переходом [для чего и нужна непрерывность $f(x)$], исходя из рациональных p_i. В частности,

$$f(\alpha x+\beta y)\leqslant\alpha f(x)+\beta f(y) \qquad (\alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0,\ \alpha+\beta=1). \tag{16}$$

Из неравенства (16) вытекает

Теорема 5. *Если $\Phi(u)$ непрерывная, выпуклая вниз функция, заданная на всей оси, то существует такая линейная функция $Au+B$, что при всех вещественных u оказывается*

$$\Phi(u)>Au+B. \tag{17}$$

---

[1]) Соотношение (15) называется сумматорным неравенством Иенсена.

Доказательство. Пусть

$$l(u)=\frac{\Phi(1)-\Phi(-1)}{2}u+\frac{\Phi(1)+\Phi(-1)}{2}.$$

Очевидно $l(1)=\Phi(1)$, $l(-1)=\Phi(-1)$.

Покажем, что при $|u|>1$ будет

$$\Phi(u)\geqslant l(u). \tag{18}$$

Пусть, например, $u>1$. Положим $\alpha=\frac{u-1}{u+1}$, $\beta=\frac{2}{u+1}$.

Если в неравенстве (16) положить $x=-1$, $y=u$, то оно примет вид

$$\Phi(1)\leqslant\frac{u-1}{u+1}\Phi(-1)+\frac{2}{u+1}\Phi(u),$$

откуда и следует (18). Для $u<-1$ рассуждение аналогично.

На отрезке $[-1, +1]$ функция $\Phi(u)$, будучи непрерывной, ограничена и потому найдется столь большая постоянная K, что при всех $u\in[-1, +1]$ будет

$$K>\frac{\Phi(1)-\Phi(-1)}{2}u-\Phi(u). \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует (17), если взять

$$A=\frac{\Phi(1)-\Phi(-1)}{2},\quad B<-K,\quad B<\frac{\Phi(1)+\Phi(-1)}{2}.$$

Следствие. *Пусть $\Phi(u)$ удовлетворяет условиям теоремы 5. Если $f(x)$ и $p(x)\geqslant 0$ заданы на $[a, b]$, $f(x)$ измерима и почти везде конечна, а $p(x)$ и $p(x)f(x)$ суммируемы, то интеграл*

$$\int_a^b \Phi[f(x)]\,p(x)\,dx \tag{20}$$

имеет числовое значение, конечное или равное $+\infty$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать $f(x)$ конечной. Сложная функция $\varphi(x)=\Phi[f(x)]$ измерима потому, что она является почти при всех x пределом последовательности непрерывных функций $\Phi[f_n(x)]$, где $f_n(x)$ непрерывные функции, почти везде удовлетворяющие соотношению $f_n(x)\to f(x)$. Пусть

$$\varphi_+(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{при } \varphi(x)\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } \varphi(x)<0,\end{cases}\qquad \varphi_-(x)=\begin{cases}0 & \text{при } \varphi(x)\geqslant 0,\\ -\varphi(x) & \text{при } \varphi(x)<0.\end{cases}$$

Интеграл (20) имеет числовое значение, если его имеет разность

$$\int_a^b \varphi_+(x)\,p(x)\,dx-\int_a^b \varphi_-(x)\,p(x)\,dx.$$

Но по теореме 5 будет $\varphi(x)>Af(x)+B$. В частности, это выполнено на множестве N тех x, при которых $\varphi(x)<0$. Значит, для этих x будет

$$0\leqslant\varphi_-(x)\leqslant -Af(x)-B.$$

Умножая это неравенство на $p(x)$, убеждаемся в суммируемости функции $\varphi_-(x)\,p(x)$ на N. Но вне N это произведение равно нулю. Стало быть,

$$\int_a^b \varphi_-(x)\,p(x)\,dx\neq\infty.$$

Остальное ясно.

Теорема 6. *Если в условиях предыдущего следствия будет*

$$\int_a^b p(x)\,dx > 0,$$

то справедливо неравенство

$$\Phi\left[\frac{\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx}\right] \leqslant \frac{\int_a^b \Phi[f(x)]\,p(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx}, \tag{21}$$

называемое интегральным неравенством Иенсена.

Доказательство. Пусть сначала обе функции $f(x)$ и $p(x)$ непрерывны. Положим

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

В силу (15) имеем[1])

$$\Phi\left[\frac{f(x_0)\,p(x_0)+\ldots+f(x_{n-1})\,p(x_{n-1})}{p(x_0)+\ldots+p(x_{n-1})}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\Phi[f(x_0)]\,p(x_0)+\ldots+\Phi[f(x_{n-1})]\,p(x_{n-1})}{p(x_0)+\ldots+p(x_{n-1})}.$$

Отсюда

$$\Phi\left[\frac{\sum f(x_k)\,p(x_k)\,\Delta x_k}{\sum p(x_k)\,\Delta x_k}\right] \leqslant \frac{\sum \Phi[f(x_k)]\,p(x_k)\,\Delta x_k}{\sum p(x_k)\,\Delta x_k},$$

и (21) получается предельным переходом при $n \to \infty$.

Откажемся теперь от предположения непрерывности $p(x)$, продолжая пока считать, что $f(x)$ непрерывна.

Легко убедиться в существовании такой последовательности непрерывных функций $p_n(x) > 0$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |p_n(x) - p(x)|\,dx = 0.$$

По доказанному, неравенство (21) будет справедливо, если в нем вместо $p(x)$ написать $p_n(x)$. Остается перейти к пределу при $n \to \infty$.

Рассмотрим теперь случай, когда $f(x)$ измерима и ограничена, $|f(x)| \leqslant K$. Тогда $\Phi[f(x)]$ также будет измеримой и ограниченной функцией

$$|\Phi[f(x)]| \leqslant M, \quad M = \max_{-K \leqslant u \leqslant K} |\Phi(u)|.$$

Пусть последовательность непрерывных функций $f_n(x)$ такова, что почти везде на $[a, b]$ будет $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Можно считать при этом, что $|f_n(x)| \leqslant K$. Тогда

$$|\Phi[f_n(x)]\,p(x)| \leqslant Mp(x), \qquad |f_n(x)\,p(x)| \leqslant Kp(x),$$

и (21) получается предельным переходом при $n \to \infty$ из такого же неравенства для $f_n(x)$.

Перейдем, наконец, к общему случаю. Как мы видели выше, правая часть неравенства (21) имеет определенное числовое значение. Можно считать его конечным, ибо иначе нечего доказывать.

---

[1]) Легко проверить, что при больших n будет $p(x_0)+\ldots+p(x_{n-1}) > 0$.

Но тогда, взяв произвольное $\varepsilon > 0$, мы можем найти такое $\delta > 0$, чтобы из $me < \delta$ вытекали неравенства

$$\int_e |\Phi[f(x)]\, p(x)\, dx < \varepsilon, \qquad \int_e p(x)\, dx < \varepsilon.$$

Построим измеримую ограниченную функцию $f_\varepsilon(x)$, для которой

$$mE(f_\varepsilon \neq f) < \delta.$$

Можно считать, что там, где $f_\varepsilon(x) \neq f(x)$, будет $f_\varepsilon(x) = 0$. Если $\varepsilon \to 0$, то $f_\varepsilon(x)$ по мере сходится к $f(x)$. Кроме того, $|f_\varepsilon(x)| \leqslant |f(x)|$. Поэтому [1])

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b f_\varepsilon(x)\, p(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, p(x)\, dx.$$

Значит, если написать (21) с заменой $f(x)$ на $f_\varepsilon(x)$, то левая часть полученного неравенства при $\varepsilon \to 0$ будет стремиться к левой части (21).

С другой стороны,

$$\int_a^b \Phi(f)\, p\, dx - \int_a^b \Phi(f_\varepsilon)\, p\, dx = \int_{E(f_\varepsilon \neq f)} \Phi(f)\, p\, dx - \Phi(0) \int_{E(f_\varepsilon \neq f)} p\, dx.$$

Отсюда

$$\left| \int_a^b \Phi(f)\, p\, dx - \int_a^b \Phi(f_\varepsilon)\, p\, dx \right| \leqslant \varepsilon \{1 + |\Phi(0)|\}.$$

Поэтому при $\varepsilon \to 0$ и в правой части упомянутого неравенства допустим предельный переход, приводящий к правой части (21).

§ 6. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о том, сколькими способами можно разложить (если это вообще возможно) данную функцию в тригонометрический ряд.

Мы начнем с рассмотрения функций, заданных на всей оси и имеющих период 2π. По отношению к таким функциям справедлива следующая элементарная

Теорема 1. *Если функция, заданная на всей оси, разлагается в равномерно сходящийся тригонометрический ряд, то это есть ее ряд Фурье.*

Эту теорему можно высказать и в такой форме:

Теорема 1. *Если тригонометрический ряд равномерно сходится на всей оси, то он есть ряд Фурье своей (очевидно непрерывной) суммы.*

Справедливость теоремы вытекает из того, что равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

можно почленно проинтегрировать, умножив его предварительно на $\cos nx$ или $\sin nx$ (что, очевидно, не нарушает равномерной сходимости ряда). В результате получаются равенства

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

доказывающие теорему.

---

[1]) Так как $p(x)$ почти везде конечна, то $f_\varepsilon p \Rightarrow fp$.

Для дальнейшего нужна

Лемма 1 (Б. Риман). *Рассмотрим сходящийся ряд*

$$a_0+a_1+a_2+\ldots=S. \tag{1}$$

Исходя из (1), *построим ряд*

$$a_0+a_1\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2+a_2\left(\frac{\sin 2h}{2h}\right)^2+\ldots \tag{2}$$

Тогда ряд (2) *сходится при любом $h\neq 0$ и его сумма $S(h)$ удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{h\to 0} S(h)=S. \tag{3}$$

Доказательство. Из сходимости ряда (1) вытекает, что все его члены ограничены одним числом, $|a_k|<M$, а потому ряд (2) мажорируется сходящимся рядом $\sum\frac{M}{k^2h^2}$ и, стало быть, сходится.

Положим

$$r_n=\sum_{k=n}^{\infty} a_k, \qquad r_n(h)=\sum_{k=n}^{\infty} a_k\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2.$$

Взяв $\varepsilon>0$, можно найти такое n, чтобы при $k\geqslant n$ было

$$|r_k|<\varepsilon. \tag{4}$$

Закрепим это n и не будем менять его до конца рассуждения.

Так как $a_k=r_k-r_{k+1}$, то

$$r_n(h)=\sum_{k=n}^{\infty}(r_k-r_{k+1})\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2,$$

откуда

$$r_n(h)=r_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2+\sum_{k=n+1}^{\infty} r_k\left\{\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2-\left(\frac{\sin (k-1)h}{(k-1)h}\right)^2\right\}.$$

Но

$$\left|\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2-\left(\frac{\sin (k-1)h}{(k-1)h}\right)^2\right|=\left|\int_{(k-1)h}^{kh}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx\right|\leqslant\int_{(k-1)h}^{kh}\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right| dx.$$

Поэтому

$$|r_n(h)|\leqslant|r_n|+\sum_{k=n+1}^{\infty}|r_k|\int_{(k-1)h}^{kh}\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right| dx$$

и, в силу (4),

$$|r_n(h)|<\varepsilon\left\{1+\int_{nh}^{+\infty}\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right| dx\right\}. \tag{5}$$

Если мы положим[1])

$$L=\int_0^{+\infty}\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right|dx, \tag{6}$$

то неравенство (5) примет вид

$$|r_n(h)|<\varepsilon(1+L).$$

Заметив это, мы можем, исходя из равенства

$$S(h)-S=\sum_{k=1}^{n-1}a_k\left\{\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2-1\right\}+r_n(h)-r_n,$$

утверждать, что

$$|S(h)-S|\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}|a_k|\cdot\left|\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2-1\right|+(L+2)\varepsilon.$$

При фиксированном k будет $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2=1$. Поэтому нашему ε отвечает такое $\delta>0$, что при $|h|<\delta$ оказывается

$$\sum_{k=1}^{n-1}|a_k|\cdot\left|\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2-1\right|<\varepsilon.$$

При этих h будет $|S(h)-S|<(L+3)\varepsilon$, что и доказывает лемму.

Рассмотрим тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{7}$$

подчиненный условию

$$|a_n|<M, \quad |b_n|<M, \tag{8}$$

где M не зависит от n.

Если мы формально дважды проинтегрируем почленно ряд (7), то получим ряд

$$\frac{a_0x^2}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}. \tag{9}$$

---

[1]) Этот интеграл конечен. Действительно,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

Вблизи точки $x=0$ эта функция ограничена, и интеграл (6) не является несобственным, а неравенство

$$\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right|\leqslant 2\frac{x+1}{x^3}$$

устанавливает его сходимость и на бесконечности.

В силу (8) ряд (9) мажорируется рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2M}{n^2}$ и потому сходится равномерно на всей оси к некоторой непрерывной функции $F(x)$, которую мы будем называть *функцией Римана* ряда (7).

Таким образом, всякий ряд (7), удовлетворяющий условию (8), имеет функцию Римана. В частности, по теореме Кантора—Лебега из § 4, ряд, сходящийся на множестве положительной меры, удовлетворяет условию (8). Заметим, что из сходимости ряда (7) в одной точке не вытекает, что он имеет функцию Римана. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin nx$, сходящийся в точке $x=0$, после двукратного интегрирования превращается в ряд $-\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$, расходящийся[1]) при $x \neq k\pi$.

Определение. Если в некоторой точке x_0 функция Римана $F(x)$ имеет конечную вторую производную Шварца, то эта производная $F^{(\prime\prime)}(x_0)$ называется *суммой ряда* (7) *в точке* x_0 *в смысле Римана.*

Теорема 2 (Б. Риман). *Если ряд* (7) *удовлетворяет условию* (8) *и сходится в некоторой точке* x_0, *то в этой точке он имеет сумму в смысле Римана, совпадающую с его обычной суммой.*

Доказательство. Исходя из равенства

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

после простых вычислений мы придем к равенству

$$\frac{F(x_0+2h) - 2F(x_0) + F(x_0-2h)}{4h^2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2. \quad (10)$$

Ряд (10) получен из ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) \quad (11)$$

таким же образом, каким ряд (2) получался из (1). Отсюда, в силу леммы 1,

$$\lim_{n \to 0} \frac{F(x_0+2h) - 2F(x_0) + F(x_0-2h)}{4h^2} = S,$$

где S есть сумма ряда (11). Это и доказывает теорему.

Из этой теоремы вытекает

Теорема 3 (Г. Кантор). *Если тригонометрический ряд сходится на всей оси и его сумма везде равна нулю, то и все его коэффициенты равны нулю.*

---

[1]) Действительно, если $x \neq k\pi$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

а эта величина не имеет предела при $n \to \infty$.

Доказательство. По теореме Кантора—Лебега ряд удовлетворяет условию (8) и, стало быть, имеет функцию Римана $F(x)$. По предыдущей теореме вторая производная Шварца $F^{(''')}(x)$ всюду равна нулю $F^{(''')}(x)=0$, откуда, в силу теоремы Шварца из § 5, функция Римана $F(x)$ должна оказаться линейной $F(x)=Ax+B$.

Таким образом, при всех вещественных x будет

$$Ax+B=\frac{a_0x^2}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}. \tag{12}$$

Полагая здесь $x=\pi$, а затем $x=-\pi$ и вычитая полученные равенства друг из друга, убедимся, что $A=0$. Точно так же, полагая сначала $x=0$, а потом $x=2\pi$ и вычитая, получаем $a_0=0$. Поэтому равенство (12) принимает вид

$$-B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}.$$

Ряд направо сходится равномерно. Значит, по теореме 1, он есть ряд Фурье левой части, откуда $\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(-B)\cos nx\,dx=0$ и, стало быть, $a_n=0$. Аналогично и $b_n=0$. Теорема доказана.

Теорема 4 (Г. Кантор). *Если два всюду сходящихся тригонометрических ряда имеют одинаковые суммы, то эти ряды тождественны,* т. е. *их соответствующие коэффициенты попарно равны друг другу.*

Действительно, вычитая почленно один ряд из другого, получим всюду сходящееся разложение нуля.

Все коэффициенты этого разложения по доказанному должны равняться нулю, а это и означает справедливость теоремы 4. Ее можно формулировать и так: *функция может разлагаться только в один тригонометрический ряд.*

В связи с доказанной теоремой естественно встает вопрос о том, каким образом определяются коэффициенты тригонометрического ряда по его сумме. Теорема 1 отвечает на него в случае равномерной сходимости. Гораздо более общей является замечательная

Теорема 5 (П. Дюбуа-Реймонд—Ш. Ж. де ля Валле-Пуссен). *Если сумма всюду сходящегося тригонометрического ряда интегрируема* (*L*), *то этот ряд есть ее ряд Фурье.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ есть конечная суммируемая функция, для которой при всех x будет

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{13}$$

Так как ряд (13) удовлетворяет условию (8), то он имеет непрерывную функцию Римана $F(x)$.

Согласно теореме Римана, всюду $F^{(''')}(x)=f(x)$, откуда по теореме Валле-Пуссена из § 5 $F(x)=\Phi(x)+Ax+B$, где положено для краткости $\Phi(x)=\int\limits_0^x dt\int\limits_0^t f(u)\,du$.

Таким образом,

$$\Phi(x)=\frac{a_0x^2}{4}-Ax-B-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}.$$

Отсюда после небольшого вычисления вытекает, что

$$\frac{\Phi(x+2h)-2\Phi(x)+\Phi(x-2h)}{4h^2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2.$$

Ряд направо сходится равномерно и, следовательно, является рядом Фурье левой части. Значит

$$a_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi(x+2h)-2\Phi(x)+\Phi(x-h)}{4h^2}\cos nx\,dx.$$

Отсюда

$$\frac{4\pi a_n\sin^2 nh}{n^2}=\int_0^{2\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx, \tag{14}$$

где для краткости положено

$$\varphi(x)=\Phi(x+2h)-2\Phi(x)+\Phi(x-2h).$$

Но, интегрируя по частям, получим

$$\alpha(h)=\int_0^{2\pi}\Phi(x+2h)\cos nx\,dx=\left[\Phi(x+2h)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\Phi'(x+2h)\frac{\sin nx}{n}\,dx,$$

откуда

$$\alpha(h)=-\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{x+2h}f(u)\,du\right)\sin nx\,dx.$$

Снова интегрируя по частям, находим

$$\alpha(h)=\frac{1}{n^2}\int_{2h}^{2\pi+2h}f(u)\,du-\frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi}f(x+2h)\cos nx\,dx.$$

Пользуясь периодичностью $f(x)$, это равенство можно записать так:

$$\alpha(h)=\frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi}f(x)\,[1-\cos n(x-2h)]\,dx.$$

Отсюда

$$\int_0^{2\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx=\alpha(h)-2\alpha(0)+\alpha(-h)=\frac{4\sin^2 nh}{n^2}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx.$$

Сопоставляя это с (14), получаем $a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx$.

Аналогично убеждаемся, что a_0 и b_n также суть коэффициенты Фурье $f(x)$, что и требовалось доказать.

Замечания. 1) Дюбуа-Реймонд доказал эту теорему для функций, интегрируемых (R), а Валле-Пуссен придал ей полную общность.

2) Теорема 3 является частным случаем теоремы Дюбуа-Реймонда — Валле-Пуссена. Действительно, так как функция, тождественно равная нулю,

суммируема, то ее тригонометрическое разложение, будучи рядом Фурье нуля, имеет и все коэффициенты равными нулю.

3) В § 4 мы встретили всюду сходящийся тригонометрический ряд, не являющийся рядом Фурье никакой суммируемой функции. Ясно, что сумма подобного ряда не интегрируема (L). В связи с этим возникает задача такого обобщения интеграла Лебега, чтобы всякий всюду сходящийся тригонометрический ряд оказывался «рядом Фурье» своей суммы. Этой задачей занимался А. Данжуа. [1]

До сих пор мы рассматривали всюду сходящиеся тригонометрические ряды. Для них проблема единственности разрешается теоремами Кантора и Дюбуа-Реймонда — Валле-Пуссена. Теперь мы остановимся на случае не всюду сходящихся рядов. Для них проблема единственности ставится так:

Известно, что *тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{15}$$

сходится к нулю [2] *во всех точках отрезка* $[-\pi, \pi]$, *кроме, может быть, точек некоторого множества* $E\subset[-\pi, \pi]$.

Если из этого предложения вытекает, что все коэффициенты ряда (15) равны нулю

$$a_n=b_n=0 \tag{16}$$

(так что ряд сходится к нулю и на множестве E), то множество E называется множеством *типа* U (от французского слова unicité — единственность). Если же существуют ряды (15), сходящиеся вне E к нулю, но не удовлетворяющие условию (16), то E называется множеством *типа* M (от французского слова multiplicité — множественность). Требуется установить условия принадлежности множества E к одному из этих типов.

Указанной проблемой занимались Г. Кантор, В. Юнг, Д. Е. Меньшов, Н. К. Бари, А. Райхман и др. Мы приведем лишь самые элементарные результаты из этой области. Значительно глубже эта тема изложена в неоднократно цитированной книге Зигмунда. Современное состояние вопроса читатель найдет в обзорной статье Н. К. Бари. [3]

Теорема 6. *Если множество* A *есть множество типа* M, *то и всякое содержащее его множество* B, $B\supset A$, *есть множество типа* M.

Действительно, существует ряд с коэффициентами, отличными от нуля, сходящийся к нулю всюду вне A. Но тогда он и подавно сходится к нулю всюду вне B.

Следствие. *Если множество* B *есть множество типа* U, *то и всякая его часть* A *есть множество типа* U.

Грубо говоря, чем обширнее множество E, тем вероятнее, что оно типа M; чем беднее оно, тем больше оснований, что оно типа U. Хорошей иллюстрацией сказанного служит

Теорема 7. *Всякое множество* E *положительной внутренней меры* $m_*E>0$ *есть множество типа* M.

Доказательство. По определению внутренней меры можно найти замкнутое множество F положительной меры, содержащееся в E. Можно считать, что точки π и $-\pi$ не входят в F. Тогда F получается из $[-\pi, \pi]$ удалением конечного числа или счетного множества попарно не пересекающихся интервалов и двух промежутков $[-\pi, \alpha)$, $(\beta, \pi]$ (где α и β суть крайние точки F). Пусть $f(x)$ есть характеристическая функция множества F.

---

[1] A. Denjoy, Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique. Paris, Gauthier — Villars, I, II, III (1941); IV_1, IV_2 (1949).

[2] Мы будем говорить, что ряд сходится к нулю, если он сходится и его сумма равна нулю.

[3] Н. К. Бари, Проблема единственности разложения функции в тригонометрический ряд. Усп. матем. наук, 4, вып. 3 (31), 1949, 3—68.

Тогда ряд Фурье этой функции всюду на множестве $[-\pi, \pi]-F$ сходится к нулю, но в то же время $a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{mF}{\pi}>0$, и условие (16) не выполнено.[1] Значит F и тем более $E\supset F$ суть множества типа M.

Желая привести хоть один пример U-множества, докажем следующую теорему:

Теорема 8 (Г. Кантор). *Всякое конечное множество есть множество типа U.*

Для доказательства этого утверждения нам понадобятся некоторые леммы.

Лемма 2 (А. Г. Шварц). *Пусть функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если всюду в (a, b), кроме, может быть, конечного числа точек*

$$x_1<x_2<\ldots<x_m, \tag{17}$$

будет

$$F^{(\prime\prime)}(x)=0, \tag{18}$$

а в точках (17) *оказывается*

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_k+h)-2F(x_k)+F(x_k-h)}{h}=0, \tag{19}$$

то $F(x)$ есть линейная функция.

Доказательство. По теореме Шварца из § 5 функция $F(x)$ должна быть линейной на каждом из отрезков

$$[a, x_1],\ [x_1, x_2],\ \ldots,\ [x_m, b].$$

Пусть

$$F(x)=\begin{cases} Ax+B & \text{при } a\leqslant x\leqslant x_1,\\ Cx+D & \text{при } x_1\leqslant x\leqslant x_2.\end{cases}$$

Условие (19) в точке x_1 дает, что

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{h}-\frac{F(x_1)-F(x_1-h)}{h}\right]=0,$$

откуда $C=A$.

С другой стороны, $F(x_1)=Ax_1+B=Cx_1+D$ и потому $D=B$.

Таким образом, $F(x)$ оказывается линейной на отрезке $[a, x_2]$. Аналогично мы установим ее линейность на всем $[a, b]$.

Лемма 3. *Если $h>0$, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2 kh}{k^2}<3h. \tag{20}$$

Доказательство. Найдем такое натуральное n, что

$$n-1<\frac{1}{h}\leqslant n.$$

Тогда в силу неравенства $|\sin\alpha|\leqslant|\alpha|$ окажется

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin^2 kh}{k^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2h^2}{k^2}=(n-1)h^2<h.$$

---

[1] Нарушение (16) видно и из равенства Парсеваля

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx=\frac{mF}{\pi}>0.$$

С другой стороны [1])

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sin^2 kh}{k^2} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{2}{n} \leqslant 2h,$$

откуда и вытекает (20).

Лемма 4. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то*

$$\lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \frac{\sin^2 kh}{k^2 h} = 0.$$

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем такое n, чтобы при $k \geqslant n$ было $|a_k| < \varepsilon$.

Тогда, в силу (20),

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k \frac{\sin^2 kh}{k^2 h} \right| < \frac{\varepsilon}{|h|} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 kh}{k^2} < 3\varepsilon.$$

С другой стороны, при фиксированном k будет $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin^2 kh}{h} = 0$ и для достаточно малых $|h|$ окажется $\left| \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k \frac{\sin^2 kh}{k^2 h} \right| < \varepsilon$.

При этих h, очевидно, будет

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\sin^2 kh}{k^2 h} \right| < 4\varepsilon,$$

что и доказывает лемму.

Лемма 5. Если тригонометрический ряд удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

то в любой точке x функция Римана $F(x)$ нашего ряда удовлетворяет соотношению

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - 2F(x) + F(x-h)}{h} = 0.$$

Доказательство. Исходя из равенства

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2},$$

определяющего функцию Римана, легко найти, что

$$\frac{F(x+2h) - 2F(x) + F(x-2h)}{4h} = \frac{a_0 h}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \frac{\sin^2 nh}{n^2 h},$$

и дело сводится к предыдущей лемме.

---

[1]) $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n^2} + \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} \leqslant \frac{1}{n} + \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{2}{n}.$

Теперь можно дать

Доказательство теоремы 8. Пусть тригонометрический ряд сходится к нулю всюду в $[-\pi, \pi]$, кроме, может быть, точек $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$. Тогда его коэффициенты стремятся к нулю, и, в силу лемм 5 и 2 и теоремы 2, функция Римана этого ряда линейна в любом конечном промежутке, а значит, и на всей оси. После этого замечания доказательство уже буквально ничем не отличается от доказательства теоремы 3.

Теорема 8 была обобщена В. Юнгом, показавшим (1909), что всякое счетное множество есть множество типа U. В связи с этими результатами среди специалистов было распространено мнение, что всякое множество меры 0 есть U-множество. Однако в 1916 году Д. Е. Меньшов опроверг это, построив пример M-множества меры 0. Разумеется, множество, построенное Д. Е. Меньшовым, было несчетным. Тогда стали подозревать, что вообще все несчетные множества имеют тип M. Но и это мнение оказалось неправильным: в 1921 году, независимо друг от друга, Н. К. Бари и А. Райхман построили некоторые классы совершенных U-множеств. В частности, канторово совершенное множество P_0 оказалось U-множеством. Вопрос об (не тавтологических) условиях, необходимых и достаточных для того, чтобы данное множество меры 0 имело тип U, до сих пор не решен.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ X

Условимся говорить, что точка x есть *точка* d суммируемой функции $f(t)$, если в этой точке производная неопределенного интеграла функции $f(t)$ равна $f(x)$ (причем $f(x) \neq \pm\infty$).

1. Интеграл $L_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int\limits_0^1 [1-(t-x)^2]^n f(t)\,dt$ есть сингулярный интеграл Ландау. Если $x\,(0 < x < 1)$ есть точка d суммируемой функции $f(t)$, то $L_n(x) \to f(x)$ (Ф. Рисс).

2. Интеграл

$$P_r(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2} f(t)\,dt \qquad (0 < r < 1)$$

есть сингулярный интеграл Пуассона. Если $x\,(-\pi < x < \pi)$ есть точка d суммируемой функции $f(t)$, то

$$\lim_{r \to 1-0} P_r(x) = f(x)$$

(П. Фату).

3. Интеграл $V_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}\frac{t-x}{2} f(t)\,dt$ есть сингулярный интеграл Валле-Пуссена. Если $x\,(-\pi < x < \pi)$ есть точка d суммируемой функции $f(t)$, то $V_n(x) \to f(x)$ (Ш. Ж. Валле-Пуссен).

4. Полином

$$K_n(x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \int\limits_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)\,dt$$

есть сингулярный интеграл Л. В. Канторовича. Если $x\,(0 < x < 1)$ есть точка d суммируемой функции $f(t)$, то $K_n(x) \to f(x)$ (Л. В. Канторович).

5. Пусть $S_n(x)$ сумма первых n членов ряда Фурье суммируемой функции $f(t)$ и

$$B_n(x) = \frac{1}{2}\left[S_n(x) + S_n\left(x + \frac{2\pi}{2n+1}\right)\right].$$

$B_n(x)$ есть сингулярный интеграл С. Н. Бернштейна. Если $x\,(-\pi<x<\pi)$ очка Лебега $f(t)$, то $B_n(x)\to f(x)$ (И. П. Натансон).

6. Для того чтобы равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b \varphi_n(t)\,f(t)\,dt=0$ имело место для всякой суммируемой функции $f(t)$, необходимо, чтобы все функции $\varphi_n(t)$ были ограничены одним числом, $|\varphi_n(t)|<K$ (А. Лебег).

7. Нельзя построить такого ядра $\Phi_n(t,\ x)$, чтобы равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b \Phi_n(t,\ x)\,f(t)\,dt=f(x)$$

имело место для любой суммируемой функции $f(x)$, аппроксимативно непрерывной в точке x (И. П. Натансон).

8. Построить ядро, удовлетворяющее условиям теоремы Лебега из § 2 и не удовлетворяющее условиям теоремы Фаддеева.

9. Пусть ядро $\Phi_n(t,\ x)$ удовлетворяет условиям теоремы П. И. Романовского. Пусть $F(t)$ ограничена и при некотором $x\in(a,\ b)$ имеет смысл интеграл Стилтьеса $I_n=\int\limits_a^b \Phi_n(t,\ x)\,dF(t)$. Если при этом x существует конечная $F'(x)$, то $I_n\to F'(x)$ (И. П. Натансон).

10. Вывести теорему П. И. Романовского из результата упражнения 9.

11. Пусть $M(u)$ $(-\infty<u<+\infty)$ четная, выпуклая вниз функция; $M(0)=0$, $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{M(u)}{u}=+\infty$. Чтобы $F(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ могла быть представлена в виде $F(x)=C+\int\limits_a^x f(t)\,dt$, где $\int\limits_a^b M[f(t)]\,dt<+\infty$, необходимо и достаточно, чтобы множество сумм $\sum M\left(\dfrac{\Delta F(x_i)}{\Delta x_i}\right)\Delta x_i$, отвечающих любым дроблениям $[a,\ b]$, было ограничено (Ю. Т. Медведев).

12. Выпуклая вниз функция удовлетворяет условию Липшица в каждом отрезке, лежащем внутри интервала ее задания.

ГЛАВА XI

ТОЧЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Замкнутые множества

До сих пор мы занимались изучением функций одной переменной. Для теории функций нескольких переменных следует ознакомиться с точечными множествами в многомерных пространствах. Этому и посвящена настоящая глава. Надо заметить, что все наиболее существенные факты теории многомерных точечных множеств можно наблюдать уже в двумерном случае, каковым мы и ограничимся для простоты формулировок и записей; переход на пространства более высокого числа измерений представляет лишь технические трудности.

Как и в линейном случае, наиболее простыми множествами являются замкнутые и открытые. С них мы и начнем.

Определение 1. Точка M_0 называется *предельной точкой* плоского множества E, если всякий *открытый круг*, содержащий M_0, содержит хотя бы одну точку множества E, отличную от M_0.

При этом открытым кругом называется[1]) множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2,$$

где a, b и $r>0$ постоянные числа. Точка (a, b) называется *центром* круга, а число r его *радиусом*. Если присоединить к открытому кругу его контур, т. е. те точки, для которых $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, то получится *замкнутый* круг.

Как и в линейном случае, легко показать, что точка M_0 будет предельной точкой множества E тогда и только тогда, когда из E выделяется последовательность различных точек M_1, M_2, M_3, ..., такого рода, что $M_0=\lim M_n$.

Это последнее соотношение означает, что *расстояние* $\rho(M_0, M_n)$ стремится к нулю с возрастанием n. Под расстоянием $\rho(A, B)$ между точками $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$ разумеется число

$$\rho(A, B)=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}.$$

---

[1]) Само собою разумеется, что для плоского случая термины «круг», «центр», «радиус» хорошо известны читателю. Мы, однако, останавливаемся на чисто арифметическом определении этих понятий, ибо хотим дать образец, которому надлежит следовать и при переходе на n-мерный случай.

Легко показать, что если M_0 предельная точка множества E, то всякий круг, содержащий M_0, содержит бесконечное множество точек E.

Совокупность всех предельных точек множества E обозначается через E' и называется *производным* множеством. Точки множества $E - E'$ суть *изолированные* точки множества E.

Важную роль и здесь играет

Теорема 1 (Б. Больцано — К. Вейерштрасс). *Всякое бесконечное ограниченное множество E имеет хотя бы одну предельную точку.*

Доказательство в основном такое же, как в линейном случае. Именно, множество E заключают в прямоугольник $R(a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d)$ и разлагают его прямыми $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{c+d}{2}$ на четыре прямоугольника, из которых выбирают тот, в котором содержится бесконечное множество точек множества E. Продолжая подобный процесс, получают последовательность вложенных прямоугольников, стягивающуюся в некоторую точку (x_0, y_0). Легко проверить, что она и будет предельной точкой множества E.

Нетрудно перенести эту теорему и на последовательности точек и получить такой результат:

Теорема 2. *Из всякой ограниченной последовательности $M_1, M_2, M_3, \ldots,$ точек плоскости выделяется подпоследовательность $M_{n_1}, M_{n_2}, M_{n_3}, \ldots$ $(n_1 < n_2 < n_3 < \ldots)$, сходящаяся к некоторой точке M_0*

$$\lim M_{n_k} = M_0.$$

Определение 2. Точечное множество F называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки, т. е. если $E' \subset E$. Если $E' = E$, то множество E называется *совершенным*.

В качестве примеров замкнутого множества можно привести замкнутый круг $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant r^2$, замкнутый прямоугольник $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, а также множество точек M, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству $F(x, y) \geqslant 0$, где $F(x, y)$ любая непрерывная функция, заданная на всей плоскости.

Мы не будем так подробно изучать замкнутые множества, как в линейном случае, а ограничимся рассмотрением лишь тех из их свойств, которые непосредственно используются ниже.

Теорема 3. *Пересечение произвольного множества замкнутых множеств есть множество замкнутое. Сумма конечного числа замкнутых множеств есть множество замкнутое.*

Доказательство этой теоремы ничем не отличается от линейного случая.

Определение 3. Пусть E — точечное множество, а $\mathfrak{M}$ — некоторая система открытых кругов. Если для каждой точки $M \in E$ существует круг $K \in \mathfrak{M}$, такой что $M \in K$, то говорят, что множество E *покрыто* системой $\mathfrak{M}$.

Теорема 4 (Э. Борель). *Если замкнутое ограниченное множество F покрыто бесконечной системой открытых кугов $\mathfrak{M}$, то*

из последней можно извлечь конечную систему $\mathfrak{M}^*$, также покрывающую множество F.

Доказательство, как и в линейном случае, ведется от противного. Именно, предполагая, что F нельзя покрыть конечным числом кругов системы $\mathfrak{M}$, заключим F в прямоугольник $R(a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d)$ и разобьем его прямыми $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{c+d}{2}$ на четыре прямоугольника. Хоть один из них будет содержать часть F, не могущую быть покрытой конечным числом кругов из системы $\mathfrak{M}$. Разбивая его на четыре части и продолжая этот процесс, придем к последовательности вложенных прямоугольников, каждый из которых содержит часть F, не покрывающуюся конечной частью $\mathfrak{M}$.

Эти прямоугольники будут стягиваться к некоторой точке M_0, относительно которой легко показать, что она будет принадлежать F. После этого так же, как и в линейном случае, без труда получается противоречие.

§ 2. Открытые множества

Определение 1. Точка M_0 называется *внутренней* точкой множества E, если существует открытый круг K, содержащий точку M_0 и сам содержащийся в множестве E:

$$M_0 \in K \subset E.$$

Определение 2. Если все точки множества E суть его внутренние точки, то E называется *открытым* множеством. Примером открытого множества может служить открытый круг.

Теорема 1. *Сумма любого множества открытых множеств есть открытое множество.*

Доказательство такое же, как для линейного случая.

Теорема 2. *Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.*

Достаточно показать, что пересечение двух открытых множеств G_1 и G_2 есть открытое множество. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — точка этого пересечения. Тогда найдутся открытые круги

$$K_i: \quad (x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 < r_i^2 \qquad (i = 1, 2)$$

такие, что

$$M_0 \in K_i \subset G_i \qquad (i = 1, 2).$$

Если мы покажем, что существует круг K, содержащий точку M_0 и сам содержащийся в пересечении кругов K_1 и K_2, то теорема будет доказана. Нетрудно видеть, что таким кругом K является хотя бы круг

$$K: \qquad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \rho^2,$$

где

$$\rho = \min_{i=1,2} \left\{ r_i - \sqrt{(a_i-x_0)^2 + (b_i-y_0)^2} \right\}.$$

Будем обозначать через CE дополнение плоского множества E до всей плоскости. Тогда совершенно так же, как и в линейном случае, мы докажем, что справедлива

Теорема 3. *Дополнение CG открытого множества G есть множество замкнутое. Дополнение CF замкнутого множества F есть множество открытое.*

Далее, с помощью тех же рассуждений, что и в § 4 гл. II, мы установим «теорему отделимости»:

Теорема 4. *Если F_1 и F_2 два ограниченных, не пересекающихся замкнутых множества, то существуют два открытых множества G_1 и G_2 таких, что*

$$G_1 \supset F_1, \quad G_2 \supset F_2, \quad G_1G_2 = 0.$$

Что касается до структуры открытых множеств, то это первый вопрос, в котором обнаруживается существенная разница между одномерными и двумерными открытыми множествами. Именно, в двумерном случае нет понятия *составляющего интервала* открытого множества. Поэтому основная теорема о структуре открытого множества для плоского случая имеет менее четкий характер, чем для случая линейного.

Теорема 5. *Всякое не пустое открытое множество есть сумма счетного множества замкнутых квадратов, стороны которых параллельны осям координат и которые попарно не имеют общих внутренних точек.*

Доказательство. Рассмотрим две системы прямых

$$x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots; \; y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Эти прямые разбивают всю плоскость на счетное множество квадратов (к каждому из которых мы причисляем его контур) со стороной, равной 1. Эти квадраты попарно не имеют общих внутренних точек. Назовем их квадратами 1-го ранга. Далее, проведем прямые вида

$$x = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \ldots; \; y = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \ldots$$

Те замкнутые квадраты, на которые разбивается плоскость этими прямыми, назовем квадратами 2-го ранга. Ясно, что каждый квадрат 1-го ранга состоит из четырех квадратов 2-го ранга. Проводя, далее, системы прямых вида

$$x = \frac{n}{4}, \; y = \frac{m}{4} \qquad (n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$x = \frac{n}{8}, \; y = \frac{m}{8} \qquad (n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

и продолжая этот процесс неограниченно, мы получим квадраты рангов 3, 4, 5, ...

Все эти квадраты замкнуты, стороны их параллельны осям, два квадрата одного и того же ранга не имеют общих внутренних точек,

всякий квадрат ранга k состоит из четырех квадратов ранга $k+1$, сторона квадрата ранга k имеет длину 2^{1-k}; наконец, множество всех таких квадратов счетно.

Проделав это предварительное построение, рассмотрим какое-нибудь не пустое открытое множество G. Если M_0 произвольная точка этого множества, то можно указать (может быть не единственным способом) последовательность вложенных друг в друга квадратов 1-го, 2-го, 3-го, ... рангов, содержащих точку M_0. Пусть это будут квадраты $Q^{(1)} \supset Q^{(2)} \supset Q^{(3)} \supset \ldots$

Так как точка M_0 есть внутренняя точка множества G, а сторона квадратов $Q^{(n)}$ с возрастанием n стремится к нулю, то все квадраты $Q^{(n)}$, начиная с некоторого из них, содержатся в G. Таким образом *существуют* квадраты построенной выше сети, содержащиеся в G. Заметив это, назовем через T_1 множество всех квадратов 1-го ранга, содержащихся в G, через T_2 множество всех тех квадратов 2-го ранга, которые содержатся в G, но не содержатся ни в одном квадрате системы T_1, через T_3 множество всех квадратов 3-го ранга, которые содержатся в G, но не содержатся ни в одном квадрате систем T_1 и T_2 и т. д.

Каждая из систем $T_1, T_2, T_3, \ldots$, а значит и сумма их T, разве лишь счетна. Перенумеруем все квадраты системы T и пусть это будут квадраты $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ Покажем, что

$$G = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k. \qquad (*)$$

То обстоятельство, что G содержит сумму всех Q_k, тривиально. Обратно, если M_0 точка G, то, как мы видели выше, существуют квадраты исходной сети, содержащиеся в G и содержащие M_0. Пусть P есть множество *номеров* рангов таких квадратов. P есть не пустое множество натуральных чисел, значит в нем есть наименьшее число. Пусть это будет m. Тогда существует квадрат ранга m, содержащий M_0 и содержащийся в G. Этот квадрат не содержится ни в каком квадрате сети, который содержал бы M_0, содержался в G и имел ранг, меньший m, ибо иначе m не было бы наименьшим числом из P. Но тогда упомянутый квадрат входит в систему T_m, чем показано, что $G \subset \sum_{k=1}^{\infty} Q_k$.

Таким образом, равенство (*) доказано. Остается показать, что в правой части действительно счетное, а не конечное, множество слагаемых. Но если бы их было конечное число, то G, будучи суммой конечного числа замкнутых квадратов, было бы множеством замкнутым.

Единственное не пустое плоское множество, которое одновременно является открытым и замкнутым, есть вся плоскость, [1]) но если бы G совпадало со всей плоскостью, то уж конечно не пред-

---

[1]) Теорема 2, § 4, гл. II переносится на двумерный случай.

ставлялось бы суммой конечного числа квадратов, так что эта последняя возможность исключается.

Следует отметить, что представление открытого множества в форме, указываемой этой теоремой, возможно не единственным образом; можно, например, разбить один из рассматриваемых квадратов на части, или с самого начала строить сеть, деля квадраты не на 4, а на 9 частей и т. п. Это мы и имели в виду выше, говоря, что в плоском случае основная теорема о структуре открытого множества имеет менее четкий характер, чем в линейном.

В заключение докажем следующее обобщение теоремы Бореля.

Теорема 6. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *некоторая система открытых множеств, а* F *замкнутое ограниченное множество. Если каждая точка* F *принадлежит хотя бы одному множеству* $G \in \mathfrak{M}$, *то из* $\mathfrak{M}$ *выделяется конечное число открытых множеств, сумма которых содержит* F.

Действительно, каждое открытое множество есть сумма всех содержащихся в нем открытых кругов. Поэтому F покрыто системой всех открытых кругов, содержащихся в множествах системы $\mathfrak{M}$. Применяя к этим кругам теорему Бореля, получим конечное число их, покрывающее F. Каждый из них содержится в каком-то множестве системы $\mathfrak{M}$. Отбирая эти множества, мы и получим требуемую конечную подсистему $\mathfrak{M}$.

Отсюда, в частности, видно, что в теореме Бореля можно было бы говорить не о кругах, а, например, о квадратах.

§ 3. Теория измерения плоских множеств

Теория измерения плоских множеств строится совершенно так же, как и для линейного случая. Различие имеется только в исходных пунктах этих теорий, ибо плоское открытое множество не допускает однозначного разложения на составляющие интервалы, а дополнение замкнутого ограниченного множества до содержащего его наименьшего прямоугольника не обязательно открыто.

Определение 1. *Мерой* открытого прямоугольника $R\,(a < x < b,\ c < y < d)$ называется его *площадь*, т. е. число

$$mR = (b-a)(d-c).$$

То же число называется мерой замкнутого прямоугольника $\bar{R}\,(a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d)$. (В обоих случаях заранее предполагается $a \leqslant b$, $c \leqslant d$. В случае равенства $a = b$, открытый прямоугольник R есть пустое множество.)

Лемма 1. *Пусть на плоскости дано конечное число прямоугольников* $R_1, R_2, \ldots, R_n$, *стороны которых параллельны осям. Эти прямоугольники могут пересекаться или не пересекаться между собой. Некоторые из них открыты, а некоторые замкнуты. Тогда существует такая конечная система открытых прямоугольников* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N$, *со сторонами, параллельными осям, которая обладает следующими свойствами:*

1. *Прямоугольники* γ_k *не пересекаются между собой.*

2. *Если* $R_i\gamma_k \neq 0$, *то* $R_i \supset \gamma_k$.

3. *Площадь каждого* R_i *равна сумме площадей тех* γ_k, *которые имеют с* R_i *общие точки.*

Доказательство. Пусть (смотря по тому, замкнут или открыт R_i)

$$R_i = R_i(a_i \leqslant x \leqslant b_i,\ c_i \leqslant y \leqslant d_i),\quad R_i = R_i(a_i < x < b_i,\ c_i < y < d_i).$$

Рассмотрим множество точек $\{a_i\}+\{b_i\}$ и перенумеруем их так, чтобы они образовали возрастающую конечную последовательность $x_0 < x_1 < \ldots < x_p$.

Аналогично, пусть $y_0 < y_1 < \ldots < y_q$ есть расположенное в порядке возрастания множество $\{c_i\}+\{d_i\}$. Требуемое множество прямоугольников γ_k мы получим, рассматривая прямоугольники

$$(x_\lambda < x < x_{\lambda+1},\ y_\mu < y < y_{\mu+1})$$
$$(\lambda = 0, 1, \ldots, p-1;\ \mu = 0, 1, \ldots, q-1).$$

Доказательство этого простого факта представляется читателю.

Лемма 2. *Пусть* $\{\alpha_i\}$ *и* $\{\beta_j\}$ *две конечные системы прямоугольников,* [1] *причем прямоугольники* α_i *попарно не имеют общих внутренних точек. Если* $\sum \alpha_i \subset \sum \beta_j$, *то* $\sum m\alpha_i \leqslant \sum m\beta_j$.

Для доказательства объединяем обе системы $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_j\}$ в одну общую систему $\{R_s\}$, к которой применяем предыдущую лемму. Так как прямоугольники α_i не имеют общих внутренних точек, то один и тот же прямоугольник γ_k не может содержаться в двух разных α_i. Поэтому те γ_k, которые содержатся в $\sum\alpha_i$, можно распределить по группам, относя в группу T_i те γ_k, которые содержатся в α_i. Важно заметить, что эти группы не пересекаются. Поэтому $\sum m\alpha_i = \sum\limits_i \Big(\sum\limits_{T_i} m\gamma_k = \Big) \sum\limits_T m\gamma_k$, где T — множество всех γ_k, содержащихся в $\sum\alpha_i$.

Произведем перераспределение прямоугольников $\gamma_k \in T$ на другие группы. Именно, пусть S_1 множество тех $\gamma_k \in T$, которые содержатся в β_1, S_2 множество тех $\gamma_k \in T$, которые содержатся в β_2, но не входят в S_1, S_3 множество тех $\gamma_k \in T$, которые содержатся в β_3, но не входят в $S_1 + S_2$, и т. д.

Тогда $\sum\limits_{S_j} m\gamma_k \leqslant m\beta_j$, ибо $m\beta_j$ равна сумме площадей всех γ_k, содержащихся в β_j. Значит

$$\sum m\alpha_i = \sum_T m\gamma_k = \sum_j \Big(\sum_{S_j} m\gamma_k\Big) \leqslant \sum m\beta_j.$$

Лемма доказана.

---

[1]) Имеются в виду прямоугольники, стороны которых параллельны осям, но мы больше не будем делать этой оговорки, ибо других случаев вообще не рассматриваем.

Следствие. *Если прямоугольники конечной или счетной системы $\{\alpha_i\}$, попарно не имеют общих внутренних точек и все содержатся в одном прямоугольнике R, то*

$$\sum m\alpha_i \leqslant mR.$$

Действительно, случай конечного числа прямоугольников α_i является частным случаем леммы, а случай их счетного множества получается отсюда предельным переходом.

Лемма 3. *Пусть A и B — два плоских ограниченных множества, каждое из которых представимо в форме суммы счетного множества замкнутых прямоугольников*

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i, \quad B = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j,$$

причем прямоугольники α_i попарно не имеют общих внутренних точек. Если $A \subset B$, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} m\alpha_i \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} m\beta_j.$$

Заметим, что ряд, стоящий здесь направо, может расходиться, ибо прямоугольники β_j могут налегать. Но в этом случае лемма тривиальна, ибо сумма расходящегося положительного ряда равна $+\infty$. Чтобы доказать лемму при условии сходимости ряда $\sum m\beta_j$, допустим, что она неверна. Тогда можно найти столь большое натуральное n, что

$$\sum_{i=1}^{n} m\alpha_i > \sum_{j=1}^{\infty} m\beta_j. \qquad (*)$$

Заключим каждый прямоугольник β_j в *открытый* прямоугольник β_j^*, выбрав его так, чтобы оказалось $m\beta_j^* < m\beta_j + \frac{\varepsilon}{2^j}$, где ε — положительная разность между левой и правой частями неравенства (*). Тогда система открытых множеств $\{\beta_j^*\}$ покрывает ограниченное, замкнутое множество $F = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

По обобщенной теореме Бореля можно указать конечное число прямоугольников $\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_m^*$ таких, что $F \subset \sum_{j=1}^{m} \beta_j^*$. В силу леммы 2 мы получим

$$\sum_{i=1}^{n} m\alpha_i \leqslant \sum_{j=1}^{m} m\beta_j^* < \sum_{j=1}^{m} m\beta_j + \varepsilon,$$

откуда и подавно $\sum_{i=1}^{n} m\alpha_i < \sum_{j=1}^{\infty} m\beta_j + \varepsilon$, что противоречит определению числа ε.

В частности множества A и B могут совпадать. Поэтому справедлива

Лемма 4. *Если плоское ограниченное множество E двумя способами представимо в форме суммы счетного множества замкнутых прямоугольников*

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j,$$

причем прямоугольники каждого из этих представлений попарно не имеют общих внутренних точек, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} m\alpha_i = \sum_{j=1}^{\infty} m\beta_j.$$

Каждое открытое множество есть сумма счетного множества замкнутых квадратов. Естественно меру такого множества определить как сумму площадей этих квадратов. Этот путь аналогичен принятому нами в линейном случае, где вместо квадратов фигурировали составляющие интервалы. Но здесь, в отличие от линейного случая, нет *однозначности* указанного разложения и потому можно было бы сомневаться, будет ли при разных разложениях получаться одна и та же сумма площадей. Лемма 4 устраняет такие сомнения, и мы вправе дать

Определение 2. *Мерой mG* плоского ограниченного открытого множества G называется сумма площадей замкнутых квадратов, попарно без общих внутренних точек, суммой которых является G.

Из леммы 3 вытекает

Теорема 1. *Если G_1 и G_2 ограниченные открытые множества и $G_1 \subset G_2$, то*

$$mG_1 \leqslant mG_2.$$

Далее справедлива

Теорема 2. *Если открытое ограниченное множество G является суммой конечного числа или счетного множества взаимно не пересекающихся открытых множеств G_k, то*

$$mG = \sum_k mG_k.$$

Если же отбросить условие отсутствия у слагаемых общих точек, то

$$mG \leqslant \sum_k mG_k.$$

Действительно, пусть равенство $G_k = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{(k)}$ дает представление G_k в форме суммы замкнутых квадратов без общих внутренних точек. Тогда

$$G = \sum_{i,\,k} \alpha_i^{(k)}. \qquad (*)$$

Если множества G_k попарно не пересекаются, то в представлении (*) отдельные квадраты $\alpha_i^{(k)}$ попарно не имеют общих внутренних точек и по самому определению 2 окажется

$$mG = \sum_{i,k} m\alpha_i^{(k)} = \sum_k \left(\sum_{i=1}^{\infty} m\alpha_i^{(k)} \right) = \sum_k mG_k.$$

Если же условия $G_k G_{k'} = 0$ не ставить, то G нужно разложить на квадраты каким-то другим способом $G = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j$ и, по лемме 3,

$$mG = \sum_{j=1}^{\infty} m\delta_j \leqslant \sum_{i,k} m\alpha_i^{(k)} = \sum_k \left(\sum_{i=1}^{\infty} m\alpha_i^{(k)} \right) = \sum_k mG_k.$$

Таким образом, мы видим, что, хотя определение меры открытого множества несколько осложнилось по сравнению с линейным случаем, но основные свойства ее, выражаемые тремя теоремами § 1, гл. III, сохраняются.

Переходя к определению меры *замкнутого* ограниченного множества F, заключим его внутрь *открытого* прямоугольника R. Легко понять, что множество $C_R F = R - F$ будет открытым, ибо оно представимо в форме пересечения $R \cdot CF$ двух открытых множеств. Покажем, что число

$$mR - mC_R F \tag{*}$$

не зависит от выбора прямоугольника R. В самом деле, если R_1 и R_2 — два таких прямоугольника, то можно указать третий прямоугольник R_3, содержащий их внутри себя.

Если мы покажем, что

$$mR_1 - mC_{R_1}F = mR_3 - mC_{R_3}F, \quad mR_2 - mC_{R_2}F = mR_3 - mC_{R_3}F,$$

то этим будет установлена требуемая независимость разности (*) от R. Итак, достаточно рассмотреть случай, когда $R_1 \subset R_2$.

Можно считать, что

$$R_1 = R_1(a_1 < x < b_1,\ c_1 < y < d_1),\ R_2 = R_2(a_2 < x < b_2,\ c_2 < y < d_2),$$

где

$$a_2 < a_1, \quad b_2 > b_1, \quad c_2 < c_1, \quad d_2 > d_1.$$

Значит, чтобы перейти от R_1 к R_2 надо у R_1 отодвинуть левую сторону налево, правую направо, верхнюю наверх и нижнюю вниз. Эти преобразования можно произвести последовательно, а так как они совершенно однотипны, то достаточно сравнить числа

$$mR - mC_R F \quad \text{и} \quad mR' - mC_{R'}F,$$

где

$$R = R(a < x < b,\ c < y < d), \qquad R' = R'(a < x < b + h,\ c < y < d)$$
$$(h > 0).$$

Но ясно, что $mR' = mR + h(d-c)$. С другой стороны, $C_{R'}F = (R' - R) + C_R F$.

Отсюда без труда[1]) устанавливается, что

$$mC_{R'}F = h(d-c) + mC_R F,$$

чем и доказывается наше утверждение.

Это позволяет ввести

Определение 3. *Мерой* mF ограниченного замкнутого множества F называется разность

$$mR - mC_R F,$$

где R произвольный открытый прямоугольник, содержащий множество F.

Легко показать, что если множество F есть сумма конечного числа замкнутых квадратов, попарно не имеющих общих внутренних точек $F = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$, то согласно данному определению будет $mF = \sum_{k=1}^{n} m\alpha_k$.

В самом деле, множество $C_R F$, будучи открытым, представимо в форме $C_R F = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i$, где β_i замкнутые квадраты, попарно не имеющие общих внутренних точек друг с другом. Тем более, нет никаких общих точек у α_k и β_i. Значит $R = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i$ и потому $mR = \sum_{k=1}^{n} m\alpha_k + \sum_{i=1}^{\infty} m\beta_i$, откуда

$$\sum_{k=1}^{n} m\alpha_k = mR - \sum_{i=1}^{\infty} m\beta_i = mR - mC_R F = mF.$$

---

[1]) Это было бы совсем просто, если бы множество $R' - R$ было открытым, но это не так. Поэтому надо рассуждать несколько сложнее. Именно, возьмем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим открытые прямоугольники

$$U = U(b - \varepsilon < x < b + h,\ c < y < d),\quad V = V(b + \varepsilon < x < b + h,\ c < y < d).$$

Очевидно, $U \supset R' - R \supset V$. Значит

$$U + C_R F \supset C_{R'}F \supset V + C_R F$$

и

$$m[U + C_R F] \geqslant mC_{R'}F \geqslant m[V + C_R F].$$

Множества V и $C_R F$ не пересекаются. Поэтому

$$mU + mC_R F \geqslant mC_{R'}F \geqslant mV + mV + mC_R F,$$

откуда

$$(h + \varepsilon)(d - c) + mC_R F \geqslant mC_{R'}F \geqslant (h - \varepsilon)(d - c) + mC_R F,$$

и остается перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Если мы вернемся к § 2, гл. III и просмотрим все теоремы о мере линейного замкнутого ограниченного множества, но заметим, что все они основаны не столько на определении меры mF, сколько на лемме, гласящей, что $mF = m\Delta - mC_\Delta F$, где Δ произвольный интервал, содержащий F, и на том, что мера суммы конечного числа сегментов без общих точек равна сумме их длин. [1]) Но мы видели, что оба эти свойства оказались переносимыми в теорию плоских множеств. Поэтому мы, не входя в дальнейшие подробности, можем утверждать, что и вся теория измерения замкнутых множеств переносится с линейного случая на плоский. Так, например, если $F_1 \subset F_2$, то $mF_1 \leqslant mF_2$, если G — открытое ограниченное множество, то его мера есть точная верхняя граница мер содержащихся в нем замкнутых множеств и т. п.

Но тогда, уже дословно, как в § 3, гл. III, можно определить понятия внешней и внутренней меры произвольного ограниченного множества E. Все 7 теорем § 3, гл. III переносятся на двумерный случай без изменения, лишь вместо интервалов Δ, упоминаемых в гл. III, придется говорить об открытых прямоугольниках.

Наконец, можно ввести основное определение измеримого множества, как такого ограниченного множества, у которого внутренняя мера равна внешней. После этого на плоский случай без труда переносится содержание §§ 4 и 6, гл. III.. Мы не будем входить здесь в подробности и лишь пополним уже известный материал одним предложением, полезным для дальнейшего изложения.

Теорема 3. *Для всякого ограниченного множества E существуют множества A и B, обладающие следующими свойствами:*

1) *A множество типа F_σ, а B множество типа G_δ;*
2) *$A \subset E \subset B$;*
3) *$mA = m_*E$, $mB = m^*E$.*

Для доказательства поставим каждому натуральному n в соответствие замкнутое множество F_n и открытое множество G_n, для которых

$$F_n \subset E \subset G_n, \quad mF_n > m_*E - \frac{1}{n}, \quad mG_n < m^*E + \frac{1}{n},$$

после чего полагаем

$$A = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots, \quad B = G_1 G_2 G_3 \ldots.$$

Что касается теоремы Витали, составляющей предмет § 8, гл. III, то она переносится на плоский случай без изменений. Именно, условимся говорить, что множество E покрыто системой $\mathfrak{M}$ замкнутых квадратов [2]) *в смысле Витали*, если для каждой

---

[1]) Это свойство использовано в теореме 4, § 2, гл. III.

[2]) Напомним, что мы всегда предполагаем, что стороны рассматриваемых квадратов параллельны осям.

точки из E в системе $\mathfrak{M}$ найдутся содержащие ее квадраты сколь угодно малой площади. С помощью этого определения, почти буквально повторяя рассуждения § 8, гл. III, можно установить две формы теоремы Витали:

Теорема 4. *Если плоское ограниченное множество E покрыто в смысле Витали системой замкнутых квадратов $\mathfrak{M}=\{Q\}$, то из $\mathfrak{M}$ выделяется счетное множество попарно не пересекающихся квадратов $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$, сумма которых покрывает множество E с точностью до множества меры нуль*, т. е.

$$Q_k Q_{k'} = 0 \ (k \neq k'), \qquad m\left[E - \sum_{k=1}^{\infty} Q_k\right] = 0.$$

Теорема 5. *В условиях предыдущей теоремы всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое конечное множество $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ попарно не пересекающихся квадратов из $\mathfrak{M}$, что*

$$m^*\left[E - \sum_{k=1}^{n} Q_k\right] < \varepsilon.$$

В особом положении оказывается § 5, гл. III, трактующий вопросы инвариантности меры относительно движения. Перенос соответствующих результатов на многомерный случай представляет существенные трудности, и мы посвятим этому следующий параграф.

§ 4. Измеримость и мера как инварианты движения

Определение 1. Однозначное отображение $M^* = \varphi(M)$ плоскости R_2 в себя называется *движением*, если расстояние между образами любых двух точек плоскости равно расстоянию между самими этими точками:

$$\rho[\varphi(M), \quad \varphi(N)] = \rho(M, N).$$

Ясно, что разным точкам M отвечают разные же образы M^*, так что движение есть преобразование обратно однозначное.

Пусть образами точек $P_0(0, 0)$, $P_1(1, 0)$ и $P_2(0, 1)$ будут точки $P_0^*(\alpha_0, \beta_0)$, $P_1^*(\alpha_1, \beta_1)$ и $P_2^*(\alpha_2, \beta_2)$.

Так как $\rho(P_0, P_1) = 1$, $\rho(P_0, P_2) = 1$, $\rho(P_1, P_2) = \sqrt{2}$, то таковы же расстояния и между их образами. Значит

$$(\alpha_1 - \alpha_0)^2 + (\beta_1 - \beta_0)^2 = 1, \quad (\alpha_2 - \alpha_0)^2 + (\beta_2 - \beta_0)^2 = 1,$$
$$(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \beta_1)^2 = 2.$$

Представив разности $\alpha_2 - \alpha_1$ и $\beta_2 - \beta_1$ в форме

$$(\alpha_2 - \alpha_0) - (\alpha_1 - \alpha_0), \qquad (\beta_2 - \beta_0) - (\beta_1 - \beta_0),$$

мы из предыдущих равенств без труда получим, что

$$(\alpha_2 - \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) + (\beta_2 - \beta_0)(\beta_1 - \beta_0) = 0.$$

Заметив это, рассмотрим определитель

$$D=\begin{vmatrix}\alpha_1-\alpha_0 & \beta_1-\beta_0\\ \alpha_2-\alpha_0 & \beta_2-\beta_0\end{vmatrix};$$

его квадрат, составленный по правилу перемножения «строка на строку», равен $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$ и потому $|D|=1$.

Пусть, далее, $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости, а $M^*(x^*, y^*)$ — ее образ. Приравнивая друг другу расстояния $\rho(M, P_i)$ и $\rho(M^*, P_i^*)$ $(i=0, 1, 2)$, мы получим три равенства;

$$x^2+y^2=(x^*-\alpha_0)^2+(y^*-\beta_0)^2,$$
$$(x-1)^2+y^2=(x^*-\alpha_1)^2+(y^*-\beta_1)^2,$$
$$x^2+(y-1)^2=(x^*-\alpha_2)^2+(y^*-\beta_2)^2.$$

Вычитая второе и третье равенства из первого, находим:

$$\left.\begin{aligned}x&=(\alpha_1-\alpha_0)x^*+(\beta_1-\beta_0)y^*+\gamma_1,\\ y&=(\alpha_2-\alpha_0)x^*+(\beta_2-\beta_0)y^*+\gamma_2,\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где γ_1 и γ_2 — постоянные, точные выражения которых нам не нужны.

Покажем, что каждая точка плоскости $Q(\lambda, \mu)$ есть образ какой-то точки $M(x, y)$. Действительно, пусть

$$x=(\alpha_1-\alpha_0)\lambda+(\beta_1-\beta_0)\mu+\gamma_1, \quad (2)$$
$$y=(\alpha_2-\alpha_0)\lambda+(\beta_2-\beta_0)\mu+\gamma_2.$$

Образ точки $M(x, y)$ надо находить по x и y из уравнений (1). Но определитель системы (1) есть $D\neq 0$. Значит есть только одна пара чисел (x^*, y^*), удовлетворяющая уравнениям (1), а тогда из (2) видно, что $x^*=\lambda$, $y^*=\mu$.

Таким образом, движение есть обратно-однозначное отображение всей плоскости $\boldsymbol{R}_2$ в себя. Ясно, что обратное отображение также есть движение. Но тогда, меняя ролями точки — образы и прообразы, — мы увидим, что координаты образа выражаются через координаты прообраза равенствами типа (1). Итак, доказана

Теорема 1. *Координаты (x^*, y^*) точки M^*, являющейся образом точки $M(x, y)$ при некотором движении, выражаются формулами*

$$x^*=a_1x+b_1y+c_1, \quad y^*=a_2x+b_2y+c_2. \quad (3)$$

Если

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix} \quad (4)$$

то $|\Delta|=1$.

Определение 2. Всякое преобразование $M^*=\varphi(M)$ плоскости $\boldsymbol{R}_2$ в себя, при котором координаты образа $M^*(x^*, y^*)$ выражаются через координаты прообраза $M(x, y)$ формулами (3),

называется *аффинным* преобразованием. Если при этом определитель (4) (называемый *определителем преобразования*) отличен от нуля, то говорят, что преобразование *невыродившееся*.

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Всякое движение есть аффинное преобразование, модуль определителя которого равен единице*[1]) $|\Delta| = 1$.

Далее, имеет место

Теорема 3. *Два последовательно произведенных аффинных преобразования равносильны одному аффинному преобразованию, определитель которого равен произведению определителей исходных преобразований.*

Простое доказательство этого факта предоставляется читателю.

Теорема 4. *Пусть $R(\alpha \leqslant x \leqslant \beta,\ \gamma \leqslant y \leqslant \delta)$ есть замкнутый прямоугольник. В результате каждого из четырех аффинных преобразований*

$$\text{I)}\ \begin{aligned} x^* &= y,\\ y^* &= x, \end{aligned} \quad \text{II)}\ \begin{aligned} x^* &= x + y,\\ y^* &= y, \end{aligned} \quad \text{III)}\ \begin{aligned} x^* &= x + a,\\ y^* &= y + b, \end{aligned} \quad \text{IV)}\ \begin{aligned} x^* &= kx,\\ y^* &= ly, \end{aligned} \qquad (kl \neq 0)$$

прямоугольник R переходит в измеримое множество R^*, мера которого есть

$$mR^* = |\Delta| \cdot mR,$$

где Δ есть определитель преобразования.

В самом деле, в случаях I, III и IV наш прямоугольник R переходит в прямоугольник же R^*, определяемый, соответственно, неравенствами:

$$\text{I)}\ \begin{aligned} \gamma \leqslant x^* \leqslant \delta,\\ \alpha \leqslant y^* \leqslant \beta, \end{aligned} \quad \text{III)}\ \begin{aligned} \alpha + a \leqslant x^* \leqslant \beta + a,\\ \gamma + b \leqslant y^* \leqslant \delta + b, \end{aligned} \quad \text{IV)}\ \begin{aligned} k\alpha \leqslant x^* \leqslant k\beta,\\ l\gamma \leqslant y^* \leqslant l\delta \end{aligned}$$

(последние неравенства написаны для случая $k > 0$, $l > 0$. Если, например, $k < 0$, то первое из них надо заменить неравенством $k\beta \leqslant x^* \leqslant k\alpha$).

Отсюда видна справедливость теоремы для преобразований I, III, IV. Изучение преобразования II значительно сложнее. Заметим, прежде всего, что R^* в случае II определяется неравенствами

$$\alpha \leqslant x^* - y^* \leqslant \beta, \quad \gamma \leqslant y^* \leqslant \delta.$$

Возьмем, далее, натуральное число n и разложим R^* на части

$$R^* = S_1 + S_2 + \ldots + S_n,$$

---

[1]) Полезно заметить, что обратная теорема неверна. Например, преобразование $x^* = 2x$, $y^* = \frac{1}{2}y$ не есть движение. Аффинное преобразование (3) будет движением тогда и только тогда, когда

$$a_1^2 + a_2^2 = 1,\ b_1^2 + b_2^2 = 1,\ a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

где S_k при $k=1, 2, \ldots, n-1$ определяется неравенствами

$$\alpha \leqslant x^* - y^* \leqslant \beta, \quad \gamma + \frac{k-1}{n}(\delta-\gamma) \leqslant y^* < \gamma + \frac{k}{n}(\delta-\gamma),$$

а S_n определяется неравенствами

$$\alpha \leqslant x^* - y^* \leqslant \beta, \quad \gamma + \frac{n-1}{n}(\delta-\gamma) \leqslant y^* \leqslant \delta.$$

Очевидно, множества S_k попарно не пересекаются.

Легко видеть, что $U_k \subset S_k \subset V_k$, где U_k и V_k прямоугольники, определяемые неравенствами

$$U_k = U_k\Big[\alpha+\gamma+\frac{k}{n}(\delta-\gamma) \leqslant x^* \leqslant \beta+\gamma+\frac{k-1}{n}(\delta-\gamma),$$
$$\gamma+\frac{k-1}{n}(\delta-\gamma) \leqslant y^* < \gamma+\frac{k}{n}(\delta-\gamma)\Big],$$
$$V_k = V_k\Big[\alpha+\gamma+\frac{k-1}{n}(\delta-\gamma) \leqslant x^* \leqslant \beta+\gamma+\frac{k}{n}(\delta-\gamma),$$
$$\gamma+\frac{k-1}{n}(\delta-\gamma) \leqslant y^* \leqslant \gamma+\frac{k}{n}(\delta-\gamma)\Big].$$

Поэтому

$$mU_k \leqslant m_*S_k \leqslant m^*S_k \leqslant mV_k$$

или

$$\left(\beta-\alpha-\frac{\delta-\gamma}{n}\right)\frac{\delta-\gamma}{n} \leqslant m_*S_k \leqslant m^*S_k \leqslant \left(\beta-\alpha+\frac{\delta-\gamma}{n}\right)\frac{\delta-\gamma}{n}.$$

Складывая такие неравенства и замечая, что

$$m_*R^* \geqslant \sum_{k=1}^{n} m_*S_k, \quad m^*R^* \leqslant \sum_{k=1}^{n} m^*S_k,$$

находим:

$$(\beta-\alpha)(\delta-\gamma) - \frac{(\delta-\gamma)^2}{n} \leqslant m_*R^* \leqslant m^*R^* \leqslant (\beta-\alpha)(\delta-\gamma) + \frac{(\delta-\gamma)^2}{n}.$$

Так как n произвольно, то отсюда вытекает, что

$$m_*R^* = m^*R^* = (\beta-\alpha)(\delta-\gamma) = mR.$$

Теорема доказана полностью.

Теорема 5. *Пусть G есть открытое ограниченное множество. В результате каждого из рассмотренных аффинных преобразований* I, II, III, IV, *множество G переходит в измеримое множество G^*, мера которого есть*

$$mG^* = |\Delta| \cdot mG,$$

где Δ определитель преобразования.

Действительно, условие $\Delta \neq 0$ показывает, что всякое невыродившееся аффинное преобразование $M^* = \varphi(M)$, будучи однозначно обратимо, сохраняет инцидентность, т. е. из соотношений

$$M \in E, \ A \subset B, \ AB = 0, \ E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$$

вытекают соотношения

$$M^* \in E^*, \ A^* \subset B^*, \ A^*B^* = 0, \ E^* = \sum_{k=1}^{\infty} E_k^*,$$

где употребляемые обозначения понятны сами собой.

Кроме того, нетрудно видеть, что в результате аффинного преобразования ограниченное множество переходит опять в ограниченное множество.

Заметив это, возьмем какое-нибудь открытое ограниченное множество G и представим его в форме $G = \sum_{k=1}^{\infty} R_k$, где R_k замкнутые квадраты без общих внутренних точек. Если $G^* = \varphi(G)$ и $R_k^* = \varphi(R_k)$ суть образы множеств G и R_k при одном из преобразований **I — IV**, то $G^* = \sum_{k=1}^{\infty} R_k^*$.

Отсюда видна измеримость G^* и справедливость[1]) равенства

$$mG^* = \sum_{k=1}^{\infty} mR_k^* = \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta| \cdot mR_k = |\Delta| \cdot mG.$$

Теорема доказана.

Теорема 6. *Всякое невырождившееся аффинное преобразование* (3) *является результатом последовательности простейших преобразований* **I — IV**.

Действительно, если в преобразовании

$$x^* = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad y^* = a_2 x + b_2 y + c_2$$

ни один из коэффициентов a_1, a_2, b_1 не нуль, то это преобразование есть результирующее для следующих восьми преобразований типа **I — IV**:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = a_1 x \\ y_1 = b_1 y \end{array} \right| \ \left. \begin{array}{l} x_2 = x_1 + y_1 \\ y_2 = y_1 \end{array} \right| \ \left. \begin{array}{l} x_3 = y_2 \\ y_3 = x_2 \end{array} \right| \ \begin{array}{l} x_4 = \dfrac{\Delta}{a_1 b_1} x_3 \\ y_4 = \dfrac{a_2}{a_1} y_3 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_5 = x_4 + y_4 \\ y_5 = y_4 \end{array} \right| \ \left. \begin{array}{l} x_6 = x_5 \\ y_6 = \dfrac{a_1}{a_2} y_5 \end{array} \right| \ \left. \begin{array}{l} x_7 = x_6 \\ y_7 = x_6 \end{array} \right| \ \left. \begin{array}{l} x^* = x_7 + c_1 \\ y^* = y_7 + c_2 \end{array} \right|$$

В случае, если некоторые из указанных коэффициентов равны нулю, рассуждение лишь упрощается.

---

[1]) Следует заметить, что множества R_k^* могут пересекаться, ибо у квадратов R_k могут быть общие стороны. Но каждая такая сторона есть прямолинейный отрезок, параллельный одной из осей, и, стало быть, мера такой стороны равна нулю. На каждый отрезок, параллельный оси, можно смотреть как на прямоугольник. Значит по предыдущей теореме мера образа такого отрезка есть 0. Поэтому множество точек, общих нескольким R_k^*, имеет меру нуль, и этим множеством при подсчете mG^* можно пренебречь.

Теорема 7. *В результате невырождившегося аффинного преобразования ограниченное плоское множество E переходит в ограниченное плоское множество E^*, внешняя мера которого есть*

$$m^*E^* = |\Delta| \cdot m^*E,$$

где Δ — определитель преобразования.

В самом деле, пусть сначала нами производится одно из простейших преобразований типа **I**, **II**, **III**, **IV**. Взяв произвольное ограниченное множество E, найдем такое открытое ограниченное множество G, что $G \supset E$, $mG < m^*E + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ взято наперед. Если E^* и G^* суть образы множеств E и G в результате преобразования, то

$$m^*E^* \leqslant mG^* = |\Delta| \cdot mG < |\Delta| \cdot (m^*E + \varepsilon),$$

откуда, ввиду произвольности ε, вытекает, что $m^*E^* \leqslant |\Delta| \cdot m^*E$.

Так как любое невырождившееся преобразование можно заменить последовательностью простейших, причем определитель результирующего преобразования равен произведению определителей составляющих преобразований, то для всякого невырождившегося преобразования будет $m^*E^* \leqslant |\Delta| \cdot m^*E$.

Но преобразование, обратное невырождившемуся аффинному преобразованию, также есть невырождившееся аффинное преобразование с определителем $1/\Delta$, причем при переходе к этому преобразованию множества E и E^* меняются ролями. Значит, по доказанному

$$m^*E \leqslant \frac{1}{|\Delta|} \cdot m^*E^*,$$

откуда и следует теорема.

Отметим далее совершенно очевидный факт, что в результате аффинного преобразования замкнутое множество переходит опять в замкнутое множество. Отсюда без труда получается

Теорема 8. *При невырождившемся аффинном преобразовании внутренняя мера образа E^* ограниченного множества E удовлетворяет соотношению*

$$m_*E^* = |\Delta| \cdot m_*E.$$

Возвращаясь теперь к случаю движения, получаем основной результат:

Теорема 9. *В результате движения ни внешняя, ни внутренняя меры ограниченного множества не меняются. В частности измеримое множество переходит в измеримое и притом той же меры.*

Хотя изложение проведено нами для двумерного случая, но мы надеемся, что читатель уже не затруднится при переходе к пространствам большего числа измерений.

§ 5. Связь меры плоского множества с мерами его сечений

Определение. Пусть E плоское множество, состоящее из точек (x, y). Одномерное множество $E(x_0)$, состоящее из таких чисел y, что $(x_0, y) \in E$, называется *сечением* множества E прямой $x = x_0$. Легко видеть, что соотношения

$$A \subset B, \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} E_k, \quad P = \prod_{k=1}^{\infty} E_k, \quad R = A - B$$

влекут соотношения

$$A(x) \subset B(x), \quad S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k(x), \quad P(x) = \prod_{k=1}^{\infty} E_k(x),$$
$$R(x) = A(x) - B(x).$$

Далее, если F замкнутое множество, то таково же и $F(x)$, а если G открыто, то и $G(x)$ открыто.[1]) Наконец, сечение ограниченного множества есть ограниченное (или пустое) множество.

Теорема 1. *Пусть E измеримое плоское множество, содержащееся в открытом прямоугольнике $R(a < x < b,\ c < y < d)$. Тогда*

1. *Почти для всех $x \in (a, b)$ множество $E(x)$ измеримо.*

2. *Если Δ есть множество тех $x \in (a, b)$, для которых $E(x)$ измеримо $(m\Delta = b - a)$, то функция $mE(x)$ измерима на множестве Δ.*

3. *Справедлива формула*

$$mE = \int_{\Delta} mE(x)\,dx.$$

Мы докажем эту теорему, последовательно рассматривая все более и более сложные множества.

1. Пусть E есть *замкнутый прямоугольник* $Q(\alpha \leqslant x \leqslant \beta,\ \gamma \leqslant y \leqslant \delta)$, где $a < \alpha \leqslant \beta < b$, $c < \gamma \leqslant \delta < d$. Если $x \in (a, \alpha)$ или $x \in (\beta, b)$, то множество $Q(x)$ пусто и, стало быть, измеримо, причем $mQ(x) = 0$. Если же $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, то $Q(x) = [\gamma, \delta]$, так что и в этом случае $Q(x)$ измеримо и $mQ(x) = \delta - \gamma$. Отсюда видно, что то множество Δ, о котором шла речь в формулировке теоремы, есть просто весь интервал (a, b), причем функция $mQ(x)$ на нем оказывается ступенчатой и потому измеримой. Наконец,

$$\int_a^b mQ(x)\,dx = \int_\alpha^\beta mQ(x)\,dx = \int_\alpha^\beta (\delta - \gamma)\,dx = (\beta - \alpha)(\delta - \gamma) = mQ,$$

чем и доказана теорема для нашего простейшего случая.

2. Пусть теперь $E = G$, где G *открытое* множество. Тогда и $G(x)$ открытое множество и потому $G(x)$ измеримо при каждом

---

[1]) $G(x)$ надо рассматривать как л и н е й н о е множество.

$x \in (a, b)$ [т. е. $\Delta = (a, b)$]. Далее, множество G представимо в форме $G = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k$, где $Q_k = Q_k(\alpha_k \leqslant x \leqslant \beta_k, \gamma_k \leqslant y \leqslant \delta_k)$ — замкнутые квадраты, без общих внутренних точек. Тогда $G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x)$. Если x отлично от всех точек α_k и β_k, то

$$mG(x) = \sum_{k=1}^{\infty} mQ_k(x). \tag{*}$$

В самом деле, неравенство $mG(x) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} mQ_k(x)$ очевидно. С другой стороны, $Q_k(x)$ есть или пустое множество, или сегмент, причем сегменты $Q_k(x)$ попарно не имеют общих внутренних точек. Обозначим через $U_k(x)$ множество всех внутренних точек множества $Q_k(x)$. Если $Q_k(x)$ пусто, то таково же и $U_k(x)$, если же $Q_k(x)$ есть сегмент, то $U_k(x)$ есть интервал, получающийся из $Q_k(x)$ удалением его концов. Значит всегда $mU_k(x) = mQ_k(x)$. Но $G(x) \supset \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)$. Поэтому

$$mG(x) \geqslant m\left[\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} mU_k(x),$$

откуда и следует (*).

Если из (a, b) удалить счетное множество S точек $\{\alpha_k\} + \{\beta_k\}$, то на оставшемся множестве $mG(x)$ будет суммой сходящегося ряда измеримых функций. Отсюда следует измеримость $mG(x)$ на $(a, b) - S$, а значит и на (a, b). Положительные ряды измеримых функций можно почленно интегрировать. И так как интегралы по интервалу (a, b) совпадают с интегралами по множеству $(a, b) - S$, то

$$\int_a^b mG(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b mQ_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} mQ_k = mG,$$

что и доказывает теорему для открытого множества.

3. Пусть $E = F$, где F замкнутое множество. Тогда $F = R - G$, где G — открытое дополнение F до прямоугольника R. В таком случае $F(x) = R(x) - G(x)$, причем все написанные здесь множества измеримы. Но тогда

$$mF(x) = (d - c) - mG(x),$$

и функция $mF(x)$ измерима на (a, b). Интегрируя последнее равенство, находим

$$\int_a^b mF(x)\,dx = (b - a)(d - c) - \int_a^b mG(x)\,dx = mR - mG = mF,$$

и теорема доказана для замкнутого множества.

4. Пусть E есть множество типа F_σ. Тогда и $E(x)$ — множество типа F_σ, так что $E(x)$ измеримо при всех $x \in (a, b)$. Пусть $E = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \ldots$, где Φ_i — замкнутые множества. Полагая

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_n = F_n,$$

мы сможем представить E в форме

$$E = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots,$$

причем $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \ldots$ В этом случае $mE = \lim_{n \to \infty} mF_n$. По тем же основаниям $mE(x) = \lim_{n \to \infty} mF_n(x)$, откуда вытекает измеримость функции $mE(x)$. Так как функции $mF_n(x)$ все ограничены одним числом [ведь $F_n(x)$ лежит в (c, d) и потому $mF_n(x) \leqslant d - c$], то допустим предельный переход под знаком интеграла, т. е.

$$\int_a^b mE(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b mF_n(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} mF_n = mE.$$

Теорема доказана для множеств F_σ.

5. Пусть E — множество типа G_δ. Тогда $B = R - E$ множество типа[1]) F_σ. Измеримость $E(x)$ для каждого $x \in (a, b)$ тривиальна, ибо $E(x)$ есть G_δ. Кроме того $mE(x) = d - c - mB(x)$, откуда следует, что $mE(x)$ измеримая функция и что

$$\int_a^b mE(x)\,dx = (b-a)(d-c) - \int_a^b mB(x)\,dx = mR - mB = mE,$$

чем снова доказаны все утверждения теоремы.

Отметим, что во всех рассмотренных случаях было $\Delta = (a, b)$.

6. Пусть, наконец, E есть произвольное измеримое множество. Построим множества A типа F_σ и B типа G_δ, для которых

$$A \subset E \subset B, \quad mA = mE = mB.$$

Можно считать при этом, что $B \subset R$. По доказанному функции $mA(x)$ и $mB(x)$ измеримы на (a, b) и

$$mE = \int_a^b mA(x)\,dx = \int_a^b mB(x)\,dx.$$

Но $A(x) \subset E(x) \subset B(x)$. Значит, $mA(x) \leqslant mB(x)$, а тогда из равенства интегралов от этих функций вытекает их совпадение почти везде.

---

[1]) В самом деле, если $E = \prod_{n=1}^{\infty} G_n$, то $R - E = \prod_{n=1}^{\infty} (R - G_n)$. Но $R - G_n = R \cdot CG_n$. Множество CG_n замкнуто, а R — открытый прямоугольник и потому R — множество типа F_σ, ибо всякое открытое множество, будучи суммой замкнутых квадратов, есть F_σ. Значит $R - G_n$ есть F_σ, а тогда и $R - E$ есть F_σ.

Пусть $\mathfrak{G}=(a, b)$ и $\Delta_0=\underset{x}{\mathfrak{G}}[mA(x)=mB(x)]$ $(m\Delta_0=b-a)$.

Так как $mA(x)\leqslant m_*E(x)\leqslant m^*E(x)\leqslant mB(x)$, то при $x\in\Delta_0$ множество $E(x)$ измеримо. Далее, функция $mA(x)$, будучи измерима на (a, b), измерима и на Δ_0, а на Δ_0 мера $mE(x)$ совпадает с $mA(x)$, так что $mE(x)$ есть функция, измеримая на Δ_0. Если теперь ввести множество Δ, состоящее из всех $x\in\mathfrak{G}$, для которых $E(x)$ измеримо, то окажется $\Delta_0\subset\Delta\subset\mathfrak{G}$, откуда $m\Delta=b-a$ и функция $mE(x)$ (будучи измеримой на Δ_0) оказывается измеримой на Δ. Наконец,

$$\int_{\Delta} mE(x)\,dx=\int_{\Delta_0} mA(x)\,dx=\int_a^b mA(x)\,dx=mA=mE.$$

Теорема доказана в полном виде.

Следствие 1. *Если E — плоское множество меры нуль, то почти все его сечения также суть множества меры нуль.*

Следствие 2. *Если почти все сечения плоского измеримого множества E суть множества меры нуль, то и $mE=0$.*

Как и все результаты этой главы, теорема 1 переносится на многомерный случай. Дадим ее формулировку для трехмерного случая.

Определение. Если E множество точек (x, y, z) трехмерного пространства, то его *сечением* плоскостью $x=x_0$ называется множество таких точек (y, z), что $(x_0, y, z)\in E$.

Теорема 2. *Пусть E — измеримое пространственное множество, содержащееся в параллелепипеде $R(a<x<b,\ c<y<d,\ e<z<f)$. Тогда*

1) *почти для всех $x\in(a, b)$ плоское множество $E(x)$ измеримо;*

2) *если Δ есть множество тех $x\in(a, b)$, для которых $E(x)$ измеримо $(m\Delta=b-a)$, то функция $mE(x)$ измерима на Δ;*

3) *справедлива формула*

$$mE=\int_{\Delta} mE(x)\,dx.$$

ГЛАВА XII

ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

§ 1. Измеримые функции. Распространение непрерывных функций

Перенеся понятие измеримого множества на многомерный случай, мы уже без всякого труда можем построить теорию измеримых функций нескольких переменных. Именно, в основу теории кладется уже известное

Определение. Функция $f(M)$, где $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — точка n-мерного пространства $\boldsymbol{R}_n$, заданная на некотором множестве E, называется *измеримой* на множестве E, если измеримо само это множество и измеримы множества $E(f > a)$ при любом вещественном a.

Имея это определение, мы без каких бы то ни было изменений переносим на многомерный случай содержание §§ 1, 2, 3, гл. IV. Лишь теорема 8, § 1 примет такую формулировку:

Теорема. *Функция $f(M)$, заданная и непрерывная на замкнутом параллелепипеде, измерима.*

Вообще при переходе от одномерного случая к многомерному роль сегментов будут играть замкнутые параллелепипеды. Доказательство формулированной теоремы не отличается от приведенного в гл. IV. Заметим, между прочим, что то же рассуждение, что и приведенное в гл. IV по поводу теоремы 8, § 1, устанавливает справедливость такой леммы:

Лемма 1. *Если функция $f(M)$ задана и непрерывна на замкнутом множестве F, то при любом вещественном a оказываются замкнутыми множества $F(f \geqslant a)$ и $F(f \leqslant a)$.*

Сложнее обстоит дело с переносом на многомерный случай содержания § 4, гл. IV. Доказательства теорем Э. Бореля и Н. Н. Лузина, данные в этом параграфе, опирались на лемму 2 этого же параграфа, при доказательстве которой уже существенно использовалось то, что мы имели дело с одномерным случаем. Поэтому сейчас нам придется несколько изменить изложение.

Лемма 2. *Пусть E произвольное, не пустое множество, содержащееся в n-мерном пространстве $\boldsymbol{R}_n$. Если мы обозначим через $r(M)$ расстояние любой точки $M \in \boldsymbol{R}_n$ от множества E, $r(M) = \rho(M, E)$, то функция $r(M)$ будет непрерывна во всем пространстве.*

Для доказательства выберем две точки пространства M и N. По самому определению понятия расстояния точки от множества, взяв произвольное $\varepsilon > 0$, мы сможем в множестве E найти такую точку A, что $\rho(M, A) < r(M) + \varepsilon$. Но тогда окажется

$$r(N) \leqslant \rho(N, A) \leqslant \rho(N, M) + \rho(M, A) < \rho(N, M) + r(M) + \varepsilon.$$

Благодаря произвольности ε, отсюда вытекает, что

$$r(N) - r(M) \leqslant \rho(N, M),$$

а так как точки M и N совершенно равноправны, то

$$|r(N) - r(M)| \leqslant \rho(N, M),$$

чем и доказана теорема.

Лемма 3. *Пусть замкнутые множества $F_1, F_2, \ldots, F_m$ попарно не имеют общих точек. Если функция $\varphi(M)$, заданная на множестве*

$$F = F_1 + F_2 + \ldots + F_m,$$

на каждом из множеств F_k постоянна, то существует функция $\psi(M)$, заданная и непрерывная уже во всем пространстве $\boldsymbol{R}_n$, совпадающая с $\varphi(M)$ в точках множества F и такая, что при всех $M \in \boldsymbol{R}_n$ будет

$$\min_F \{\varphi(M)\} \leqslant \psi(M) \leqslant \max_F \{\varphi(M)\}.$$

Доказательство. Обозначим через $r_k(M)$ расстояние точки $M \in \boldsymbol{R}_n$ от множества F_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Ввиду того, что множество F_k замкнуто, функция $r_k(M)$ обращается в нуль только в точках множества F_k.

Заметив это, обозначим через a_k то значение, которое функция $\varphi(M)$ принимает на множестве F_k, и введем функцию $\psi(M)$, положив ее равной $\varphi(M)$ при $M \in F$ и положив

$$\psi(M) = \frac{\dfrac{a_1}{r_1(M)} + \dfrac{a_2}{r_2(M)} + \ldots + \dfrac{a_m}{r_m(M)}}{\dfrac{1}{r_1(M)} + \dfrac{1}{r_2(M)} + \ldots + \dfrac{1}{r_m(M)}}$$

при $M \overline{\in} F$. Опираясь на предыдущую лемму, читатель легко убедится, что функция $\psi(M)$ требуемая.

Теперь мы докажем теорему, которая заменит нам лемму 2, § 4, гл. IV, но которая имеет также и большой самостоятельный интерес.

Теорема. *Пусть Φ — замкнутое множество, лежащее в $\boldsymbol{R}_n$, и $\varphi(M)$ — функция, заданная, ограниченная и непрерывная*[1] *на множестве Φ. Тогда существует функция $\psi(M)$, заданная и*

[1] Для большей общности множество Φ мы не предполагаем ограниченным. В противном случае, как известно из элементов Анализа, ограниченность функции $\varphi(M)$ следовала бы из ее непрерывности и функция $\varphi(M)$ имела бы наибольшее и наименьшее значения.

непрерывная уже во всем пространстве $\boldsymbol{R}_n$, совпадающая с $\varphi(M)$ в точках множества Φ и такая, что при всех $M \in \boldsymbol{R}_n$ будет

$$|\psi(M)| \leqslant \sup_{\Phi} \{|\varphi(M)|\}.$$

Доказательство.[1]) Положим $\varphi_0(M) = \varphi(M)$ и пусть

$$A_0 = \sup_{\Phi} \{|\varphi_0(M)|\}.$$

Введем множества

$$F_- = \Phi\left(\varphi_0 \leqslant -\frac{A_0}{3}\right), \quad F_+ = \Phi\left(\varphi_0 \geqslant \frac{A_0}{3}\right).$$

По лемме 1 оба эти множества замкнуты (причем одно из них может быть и пустым). По лемме 2 можно построить функцию $\psi_0(M)$, заданную и непрерывную во всем пространстве $\boldsymbol{R}_n$, равную $-A_0/3$ на множестве F_-, равную $A_0/3$ на множестве F_+ и такую, что при всех $M \in \boldsymbol{R}_n$ будет

$$-\frac{A_0}{3} \leqslant \varphi_0(M) \leqslant \frac{A_0}{3}.$$

Рассмотрим разность $\varphi_1(M) = \varphi_0(M) - \psi_0(M)$, которая определена только на множестве Φ и является на этом множестве функцией ограниченной и непрерывной. Нетрудно видеть, что[2]) $|\varphi_1(M)| \leqslant \frac{2}{3} A_0$.

Положим $A_1 = \sup\limits_{\Phi} \{|\varphi_1(M)|\}$ и построим функцию $\psi_1(M)$, которая по отношению к $\varphi_1(M)$ играла бы такую же роль, что $\psi_0(M)$ по отношению к $\varphi_0(M)$. Иными словами, функция $\psi_1(M)$ будет обладать следующими свойствами: она задана во всем пространстве, всюду непрерывна, удовлетворяет при всех M неравенству

$$-\frac{A_1}{3} \leqslant \psi_1(M) \leqslant \frac{A_1}{3}$$

и при $M \in \Phi$ оказывается

$$|\varphi_1(M) - \psi_1(M)| \leqslant \frac{2}{3} A_1.$$

Подчеркнем, что $A_1 \leqslant \frac{2}{3} A_0$. Построив такую $\psi_1(M)$, полагаем

$$\varphi_2(M) = \varphi_1(M) - \psi_1(M) \qquad (M \in \Phi)$$

и продолжаем этот процесс. В результате, мы построим две последовательности непрерывных функций $\{\varphi_k(M)\}$ и $\{\psi_k(M)\}$, причем

---

[1]) Это доказательство заимствовано из книги П. С. Александрова «Введение в общую теорию множеств и функций». Гостехиздат, 1948.

[2]) В самом деле, если $M \in F_+$, то $\psi_0(M) = \frac{A_0}{3} \leqslant \varphi_0(M) \leqslant A_0$. Так же обстоит дело и при $M \in F_-$. Если же $M \in \Phi - (F_- + F_+)$, то

$$-\frac{A_0}{3} \leqslant \psi_0(M) \leqslant \frac{A_0}{3} \quad \text{и} \quad -\frac{A_0}{3} \leqslant \varphi_0(M) \leqslant \frac{A_0}{3}.$$

$\varphi_k(M)$ заданы только на Φ, а $\psi_k(M)$ — на всем $\boldsymbol{R}_n$. Эти последовательности будут обладать следующими свойствами:

$$\varphi_k(M) = \varphi_{k-1}(M) - \psi_{k-1}(M) \qquad (M \in \Phi,\ k \geqslant 1),$$
$$-\frac{A_k}{3} \leqslant \psi_k(M) \leqslant \frac{A_k}{3} \qquad (M \in \boldsymbol{R}_n),$$
$$|\varphi_k(M) - \psi_k(M)| \leqslant \frac{2}{3} A_k \qquad (M \in \Phi).$$

При этом, через A_k мы обозначаем величину $\sup\limits_{\Phi}\{|\varphi_k(M)|\}$ так, что $A_k \leqslant \frac{2}{3} A_{k-1}$, откуда $A_k \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^k A_0$.

Проделав все сказанное, образуем бесконечный ряд

$$\psi_0(M) + \psi_1(M) + \psi_2(M) + \ldots . \qquad (*)$$

Члены этого ряда непрерывны. Кроме того, в силу неравенства $|\psi_k(M)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{A_0}{3}$, этот ряд сходится равномерно. Поэтому его сумма $\psi(M)$ есть функция непрерывная. Это требуемая функция. Действительно, она допускает оценку

$$|\psi(M)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{A_0}{3} = A_0.$$

Поэтому остается лишь проверить, что при $M \in \Phi$ будет $\psi(M) = \varphi(M)$. С этой целью заметим, что при $M \in \Phi$ будет

$$\psi_k(M) = \varphi_k(M) - \varphi_{k+1}(M).$$

Стало быть, частную сумму $S_p(M) = \psi_0(M) + \psi_1(M) + \ldots + \psi_{p-1}(M)$ ряда (*) при $M \in \Phi$ можно записать так:

$$S_p(M) = [\varphi_0(M) - \varphi_1(M)] + [\varphi_1(M) - \varphi_2(M)] + \ldots + [\varphi_{p-1}(M) - \varphi_p(M)] = \varphi(M) - \varphi_p(M).$$

Но так как $|\varphi_p(M)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^p A_0$, то $\lim\limits_{p\to\infty} S_p(M) = \varphi(M) \quad (M \in \Phi)$, а это и значит, что $\psi(M) = \varphi(M)$ при $M \in \Phi$. Теорема доказана.

Опираясь на эту теорему, мы можем без дальнейших пояснений считать все содержание § 4, гл. IV перенесенным на многомерный случай[1]).

---

[1]) Если бы теорему Н. Н. Лузина формулировать в несколько ослабленной форме, а именно так: «*если $f(M)$ задана, измерима и почти везде конечна на измеримом множестве E, то всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое множество $E_\varepsilon \subset E$, что $mE_\varepsilon > mE - \varepsilon$ и на E_ε функция $f(M)$ непрерывна*», то для доказательства ее не потребовалась бы теорема настоящего параграфа, а можно было бы ограничиться ссылкой на лемму 3.

§ 2. Интеграл Лебега и его геометрический смысл

При определении интеграла Лебега в гл. V и VI мы нигде, за исключением §§ 4 и 5 гл. V, не опирались на то, что речь идет о функциях одной переменной. Поэтому все содержание этих глав переносится на многомерный случай. Мы не будем вдаваться здесь в подробности. Заметим лишь, что для обозначения интеграла по множеству E, лежащему в пространстве n измерений, мы будем применять одно из обозначений

$$\int\limits_E f(M)\,d\omega, \quad \underbrace{\int\int\ldots\int}_{E} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$$

Остановимся на вопросе о геометрическом смысле интеграла.

Определение. Пусть $f(M)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть неотрицательная функция, заданная на множестве E. Будем называть *подграфиком*[1]) функции $f(M)$ множество $S=S(E, f)$ тех точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ пространства $\boldsymbol{R}_{n+1}$, для которых

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in E, \quad 0\leqslant z\leqslant f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Нетрудно видеть, что для случая непрерывной положительной функции $f(x)$, заданной на сегменте $[a, b]$, подграфик есть не что иное, как *криволинейная трапеция*, ограниченная снизу осью Ox, сверху кривой $y=f(x)$ и с боков прямыми $x=a$ и $x=b$. В этом частном случае, как известно, интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ представляет собой площадь указанной трапеции. Мы покажем, что и в общем случае имеется нечто аналогичное.

Лемма. *Если E измеримое множество пространства $\boldsymbol{R}_n$, а функция $f(M)$ во всех точках этого множества равна положительному числу h, то подграфик $S(E, h)$ есть измеримое множество пространства $\boldsymbol{R}_{n+1}$ и*

$$mS(E, h)=hmE.$$

Эта лемма обобщает элементарную теорему о том, что объем цилиндра равен площади его основания, умноженной на его высоту. Мы докажем эту лемму, ограничиваясь для простоты случаем $n=2$.

Если множество E есть прямоугольник $R(a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d)$, то лемма тривиальна, ибо $S(E, h)$ оказывается прямоугольным параллелепипедом $T(a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d, 0\leqslant z\leqslant h)$. То же будет и в том случае, когда E есть о т к р ы т ы й прямоугольник. Если E есть ограниченное открытое множество, то его можно представить в форме $E=\sum\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$, где Q_k — замкнутые квадраты попарно без

[1]) Этот термин вводится здесь впервые.

общих внутренних точек. Тогда $S(E,\ h)=\sum_{k=1}^{\infty} S(Q_k,\ h)$. Значит

$$m^*S(E,\ h)\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} mS(Q_k,\ h) = \sum_{k=1}^{\infty} h\cdot mQ_k = h\cdot mE.$$

С другой стороны, если U_k есть множество внутренних точек квадрата Q_k, то $S(E,\ h)\supset \sum_{k=1}^{\infty} S(U_k,\ h)$, откуда

$$m_*S(E,\ h)\geqslant \sum_{k=1}^{\infty} mS(U_k,\ h) = \sum_{k=1}^{\infty} h\cdot mU_k = h\cdot mE,$$

что и доказывает лемму для открытого ограниченного множества. Но в таком случае она верна и для замкнутого ограниченного множества, ибо его можно представить в форме $R-G$, где R — открытый прямоугольник, а G — открытое ограниченное множество. Пусть, наконец, E — произвольное измеримое множество. Взяв $\varepsilon>0$, найдем такое замкнутое множество F и такое ограниченное открытое множество G, что $F\subset E\subset G$, $mF>mE-\varepsilon$, $mG<mE+\varepsilon$.

В таком случае $S(F,\ h)\subset S(E,\ h)\subset S(G,\ h)$, откуда, по доказанному,

$$h\cdot mF\leqslant m_*S(E,\ h)\leqslant m^*S(E,\ h)\leqslant h\cdot mG,$$

и тем более

$$h(mE-\varepsilon)\leqslant m_*S(E,\ h)\leqslant m^*S(E,\ h)\leqslant h(mE+\varepsilon).$$

Ввиду произвольности ε, это и доказывает лемму.

Теорема. *Если $f(M)$ ограниченная, измеримая, неотрицательная функция, заданная на множестве E, то ее подграфик $S(E,f)$ измерим и*

$$mS(E,\ f)=\int_E f(M)\,d\omega.$$

В самом деле, пусть $0\leqslant f(M)<A$. Разделим промежуток $[0,\ A]$ точками $z_0=0<z_1<z_2<\ldots<z_n=A$ и составим множества Лебега $e_i=E(z_i\leqslant f<z_{i+1})$. Нетрудно видеть, что $S(E,\ f)=\sum_{i=0}^{n-1} S(e_i,\ f)$, причем множества $S(e_i,\ f)$ попарно не пересекаются. Отсюда

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_*S(e_i,\ f)\leqslant m_*S(E,\ f)\leqslant m^*S(E,\ f)\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} m^*S(e_i,\ f).$$

С другой стороны, $S(e_i,\ z_i)\subset S(e_i,\ f)\subset S(e_i,\ z_{i+1})$, откуда, применяя предыдущую лемму, находим, что

$$z_i me_i\leqslant m_*S(e_i,\ f),\quad m^*S(e_i,\ f)\leqslant z_{i+1}me_i.$$

Таким образом,

$$\sum_{i=0}^{n-1} z_i m e_i \leqslant m_* S(E, f) \leqslant m^* S(E, f) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} z_{i+1} m e_i.$$

Измельчая дробление и переходя к пределу, завершаем доказательство.

§ 3. Теорема Фубини

Остановимся на вопросе о сведении кратного интеграла к простым.

Лемма. *Если $f(x, y)$ есть измеримая функция, заданная в прямоугольнике $R(a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d)$, то почти для всех $x \in [a, b]$ эта функция, как функция одного y, измерима на $[c, d]$.*

Доказательство. Пусть сначала $f(x, y)$ ограничена в R. Существует такая последовательность непрерывных функций $g_n(x, y)$, что почти везде в R будет

$$\lim_{n \to \infty} g_n(x, y) = f(x, y). \tag{1}$$

Обозначим через E множество тех точек $(x, y) \in R$, в которых (1) не выполнено. Так как $mE = 0$, то [см. следствие 1 из § 5, гл. XI] почти для всех x из $[a, b]$ будет

$$mE(x) = 0, \tag{2}$$

где $E(x_0)$ есть сечение множества E прямой $x = x_0$.

Пусть x такая точка $[a, b]$, в которой (2) имеет место. Если $y \in [c, d] - E(x)$, то $(x, y) \in R - E$ и справедливо (1). Иными словами, при указанном x соотношение (1) выполняется почти везде на $[c, d]$, а тогда $f(x, y)$ (при том же x) есть измеримая функция y.

Если $f(x, y)$ не ограничена, то найдется такая последовательность ограниченных измеримых функций $f_n(x, y)$, что везде на R будет $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x, y) = f(x, y)$. По доказанному для каждого n множество e_n тех $x \in [a, b]$, для которых $f_n(x, y)$ не есть функция, измеримая на $[c, d]$, имеет меру нуль. Пусть $e = e_1 + e_2 + e_3 + \ldots$. Если $x \in [a, b] - e$, то все функции $f_n(x, y)$ измеримы на $[c, d]$. Но тогда и $f(x, y)$ такова же.

Теорема 1 (Г. Фубини). *Пусть в прямоугольнике $R(a \leqslant x \leqslant b,$ $c \leqslant y \leqslant d)$ задана суммируемая функция $f(x, y)$.*

Тогда:

1) *почти для всех $x \in [a, b]$ функция $f(x, y)$, рассматриваемая как функция одного лишь y, будет суммируема на $[c, d]$;*

2) *если Δ есть множество тех $x \in [a, b]$, для которых $f(x, y)$ суммируема на $[c, d]$ $(m\Delta = b - a)$, то функция*

$$\int_c^d f(x, y)\, dy$$

суммируема на Δ;

3) *справедлива формула*

$$\iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_\Delta dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $f(x, y)$ есть функция неотрицательная и ограниченная

$$0 \leqslant f(x, y) \leqslant H.$$

Ее подграфик $A = S(R, f)$ будет множеством измеримым и

$$mA = \iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy.$$

Обозначим через Δ' множество всех тех $x \in [a, b]$, при которых $f(x, y)$ есть измеримая на $[c, d]$ функция y. По лемме $m\Delta' = b - a$. Так как при любом $x_0 \in [a, b]$ сечение $A(x_0)$ множества A плоскостью $x = x_0$ есть не что иное как подграфик функции $f(x_0, y)$, то (по теореме из § 2) для $x \in \Delta'$ множество $A(x)$ будет измеримым и

$$mA(x) = \int\limits_c^d f(x, y)\,dy. \tag{3}$$

С другой стороны, в силу результатов § 5 гл. XI, функция $mA(x)$ измерима на множестве Δ'' тех $x \in [a, b]$, для которых $A(x)$ измеримо, и

$$mA = \int\limits_{\Delta''} m\,A(x)\,dx.$$

Так как[1] $\Delta' \subset \Delta''$ и $m\Delta' = m\Delta''$, то $mA(x)$ будет измерима и на Δ'. Значит интеграл (3), совпадающий с $mA(x)$ на Δ', будет измеримой и (в силу своей ограниченности) суммируемой на Δ' функцией x. Кроме того,

$$mA = \int\limits_{\Delta'} mA(x)\,dx = \int\limits_{\Delta'} dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy.$$

Остается отметить, что ограниченная функция $f(x, y)$, рассматриваемая как функция одного y, будет суммируемой тогда и только тогда, когда она измерима. Поэтому введенное нами множество Δ' совпадает с множеством Δ, упомянутым в формулировке теоремы. Итак, для случая ограниченной и неотрицательной функции теорема доказана.

Теперь откажемся от предположения, что $f(x, y)$ ограничена, продолжая считать ее неотрицательной. Введем «срезанную» функцию

$$f_n(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } f(x, y) \leqslant n, \\ n, & \text{если } f(x, y) > n. \end{cases}$$

[1]) Можно было бы доказать, что на самом деле $\Delta' = \Delta''$.

Тогда

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_R f_n(x, y)\,dx\,dy.$$

К функции $f_n(x, y)$ уже применима доказанная часть теоремы. Если Δ_n есть множество тех x, для которых $f_n(x, y)$ (как функция y) измерима на $[c, d]$, то $m\Delta_n = b - a$, интеграл $\int_c^d f_n(x, y)\,dy$ измерим на Δ_n и

$$\iint_R f_n(x, y)\,dx\,dy = \int_{\Delta_n} dx \int_c^\partial f_n(x, y)\,dy.$$

Пусть $\Delta^* = \Delta_1\Delta_2\Delta_3\ldots$. Ясно, что $m\Delta^* = b - a$ и при $x \in \Delta^*$ измеримы[1]) все $f_n(x, y)$, а значит и $f(x, y)$. Кроме того,

$$\iint_R f_n(x, y)\,dx\,dy = \int_{\Delta^*} dx \int_c^d f_n(x, y)\,dy.$$

Ввиду того, что

$$f_1(x, y) \leqslant f_2(x, y) \leqslant f_3(x, y) \leqslant \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x, y) = f(x, y),$$

мы можем применить теорему Б. Леви (для закрепленного $x \in \Delta^*$). Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \int_c^d f_n(x, y)\,dy = \int_c^d f(x, y)\,dy \qquad (x \in \Delta^*),$$

причем попутно установлена измеримость интеграла

$$\int_c^d f(x, y)\,dy$$

как функции $x \in \Delta^*$.

Ввиду того, что

$$\int_c^d f_1(x, y)\,dy \leqslant \int_c^d f_2(x, y)\,dy \leqslant \int_c^d f_3(x, y)\,dy \leqslant \ldots,$$

мы можем еще раз применить теорему Б. Леви, что дает равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Delta^*} dx \int_c^d f_n(x, y)\,dy = \int_{\Delta^*} dx \int_c^d f(x, y)\,dy.$$

---

[1]) Как функции от y.

Таким образом, мы нашли множество Δ^* с мерой $m\Delta^* = b - a$, для всех точек x которого функция $f(x, y)$ измерима, причем интеграл $\int_c^d f(x, y)\,dy$ представляет собой функцию, измеримую на Δ^* и

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_{\Delta^*} dx \int_c^d f(x, y)\,dy.$$

Так как интеграл, стоящий слева, есть величина конечная, то интеграл $\int_c^d f(x, y)\,dy$ представляет собой функцию не только измеримую, но и суммируемую на множестве Δ^*. А так как суммируемая функция почти везде конечна, то интеграл $\int_c^d f(x, y)\,dy$ конечен почти для всех x из Δ^*. Это показывает, что функция $f(x, y)$, как функция одного лишь y, суммируема на $[c, d]$ для почти всех x из Δ^*. Обозначим через Δ^{**} множество тех x из Δ^*, для которых $f(x, y)$ суммируема на $[c, d]$. Так как $m\Delta^{**} = m\Delta^*$, то

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_{\Delta^{**}} dx \int_c^d f(x, y)\,dy.$$

Заметив это, обозначим через Δ множество всех x из $[a, b]$, для которых $f(x, y)$ есть суммируемая функция аргумента y. Ясно, что $\Delta^{**} \subset \Delta \subset [a, b]$; поэтому интеграл $\int_c^d f(x, y)\,dy$ суммируем и на множестве Δ, ибо $m(\Delta - \Delta^{**}) = 0$. Тогда

$$\int_{\Delta^{**}} dx \int_c^d f(x, y)\,dy = \int_{\Delta} dx \int_c^d f(x, y)\,dy,$$

и теорема доказана для нашего случая.

Перейдем, наконец, к общему случаю, считая $f(x, y)$ произвольной суммируемой функцией. Положим, как обычно,

$$f_+(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } f(x, y) \geqslant 0; \\ 0, & \text{если } f(x, y) < 0; \end{cases}$$

$$f_-(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x, y) \geqslant 0; \\ -f(x, y), & \text{если } f(x, y) < 0. \end{cases}$$

Эти функции суммируемы и неотрицательны, поэтому к ним можно применить уже доказанную часть теоремы. Обозначим через Δ_+ и Δ_- множества тех x из $[a, b]$, при которых суммируемы соответственно функции $f_+(x, y)$ и $f_-(x, y)$ на $[c, d]$. По доказанному

$m\Delta_+ = m\Delta_- = b - a$, причем интегралы $\int_c^d f_+(x, y)\,dx$, $\int_c^d f_-(x, y)\,dy$ суммируемы, соответственно, на Δ_+ и Δ_- и

$$\iint_R f_+(x, y)\,dx\,dy = \int_{\Delta_+} dx \int_c^d f_+(x, y)\,dy,$$

$$\iint_R f_-(x, y)\,dx\,dy = \int_{\Delta_-} dx \int_c^d f_-(x, y)\,dy,$$

Положим $\Delta = \Delta_+\Delta_-$. Тогда $m\Delta = b - a$, и интегралы, стоящие в правых частях предыдущих равенств, можно распространить не на Δ_+ и Δ_-, а на Δ. Тогда почленное вычитание этих равенств дает

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_{\Delta} dx \int_c^d f(x, y)\,dy.$$

Остается заметить, что множество $\Delta = \Delta_+\Delta_-$ состоит только из таких $x \in [a, b]$, для которых $f(x, y)$, как функция y, суммируема на $[c, d]$ и что все такие x входят в Δ.

Теорема Фубини доказана полностью.

Замечания. 1. Если функция $f(x, y)$ задана не в прямоугольнике, а на произвольном измеримом множестве E, то следует это множество заключить в прямоугольник R и пополнить определение $f(x, y)$, положив ее равной нулю на множестве $R - E$. Это сведет дело к уже рассмотренному случаю.

2. Если $f(x, y)$ есть измеримая[1]) и неотрицательная функция, заданная в прямоугольнике $R(a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d)$, то интеграл (3), рассматриваемый[2]) на множестве Δ тех $x \in [a, b]$, для которых $f(x, y)$ есть измеримая функция y $(m\Delta = b - a)$, будет измеримой функцией x.

В самом деле, если $f(x, y)$ ограничена, то она суммируема, и наше утверждение уже содержится в теореме 1. Если же $f(x, y)$ не ограничена, то надо лишь совершить предельный переход от срезанных функций и сослаться на теорему Б. Леви.

Теорема 1 допускает следующее обобщение, которое может быть доказано теми же рассуждениями, что и сама эта теорема.

Теорема 2. *Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — суммируемая функция, заданная в $(n+m)$-мерном параллелепипеде*

$$R_{n+m}(a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \ldots, a_n \leqslant x_n \leqslant b_n;$$
$$c_1 \leqslant y_1 \leqslant d_1, \ldots, c_m \leqslant y_m \leqslant d_m).$$

---

[1]) Суммируемости $f(x, y)$ не предполагается.

[2]) Интеграл $\int_c^d f(x, y)\,dy$ может при этом равняться $+\infty$ на множестве положительной меры.

Пусть $R'_n = R'_n\,(a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \ldots, a_n \leqslant x_n \leqslant b_n)$ *и* $R''_m = R''_m\,(c_1 \leqslant y_1 \leqslant \leqslant \partial_1, \ldots, c_m \leqslant y_m \leqslant \partial_m)$. *Тогда:*

1. *Почти для всех точек* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R'_n$ *функция* $f(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$ *суммируема на* R''_m.

2. *Если* Δ_n *есть множество этих точек* $(m\Delta_n = mR'_n)$, *то интеграл*

$$\underbrace{\int\int \ldots \int}_{R''_m} f(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)\,dy_1 \ldots dy_m$$

суммируема на Δ_n.

3. *Справедлива формула*

$$\underbrace{\int\int \ldots \int}_{R_{n+m}} f(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)\,dx_1 \ldots dx_n dy_1 \ldots dy_m =$$
$$= \underbrace{\int \ldots \int}_{\Delta_n} dx_1 \ldots dx_n \underbrace{\int \ldots \int}_{R''_m} f(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)\,dy_1 \ldots dy_m.$$

§ 4. Перемена порядка интегрирований

Введем следующее обобщение символа интеграла. Пусть $f(M)$ — функция, заданная и суммируемая на некотором измеримом множестве A. Если E есть любое измеримое множество, содержащее множество A, $E \supset A$, и такое, что $m(E - A) = 0$, то мы положим по определению $\int\limits_E f(M)\,dw = \int\limits_A f(M)\,dw$.

Таким образом, мы допускаем теперь и такие случаи, когда подынтегральная функция задана не во всех, а лишь почти во всех точках области интегрирования. При таком расширении смысла символа интеграла формула, доказанная в теореме Фубини, допускает более простую запись:

$$\int\int\limits_R f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_c^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy.$$

Ввиду равноправности аргументов x и y, мы получаем такой результат:

Теорема 1. *Если* $f(x, y)$ *есть функция, суммируемая на прямоугольнике* $R\,(a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d)$, *то существуют*[1] *оба повторных интеграла*

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy, \qquad \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)\,dx, \tag{*}$$

причем

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)\,dx. \tag{**}$$

[1] В только что указанном расширенном смысле: внутренние интегралы существуют почти везде в области внешнего интегрирования.

Интересно заметить, что интегралы (*) могут существовать без того, чтобы $f(x, y)$ была суммируема на прямоугольнике R.

Пример. Пусть функция $f(x, y)$ задана в квадрате $Q(-1 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 1)$ формулой

$$f(x, y)=\frac{xy}{(x^2+y^2)^2},$$

если $x^2+y^2>0$. В точке же (0, 0) положим $f(0, 0)=0$. Если закрепить один из аргументов x или y, то $f(x, y)$ окажется *непрерывной* функцией другого, так что

$$\int_{-1}^{+1}\frac{xy\,dy}{(x^2+y^2)^2}$$

заведомо существует при всех x из $[-1, +1]$. Будучи интегралом от нечетной функции, этот интеграл равен нулю.

Таким образом,

$$\int_{-1}^{+1}dx\int_{-1}^{+1}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy=\int_{-1}^{+1}dy\int_{-1}^{+1}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx=0.$$

Вместе с тем, функция $f(x, y)$ не суммируема на Q. Действительно, если бы она была суммируема на Q, то она была бы суммируемой и на частичном квадрате Q^* $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$. Тогда, по теореме 1, должен существовать конечный интеграл

$$\int_0^1 dx\int_0^1\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy.$$

Но это не имеет места, ибо при $x \neq 0$

$$\int_0^1\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy=\frac{1}{2x}-\frac{x}{2(x^2+1)},$$

а эта функция не суммируема на $(0, 1]$.

В приведенном примере, несмотря на несуммируемость функции $f(x, y)$, формула $(^*{}_*)$ все же была справедлива.[1]) Вообще же говоря, это может быть и не так.

---

[1]) Г. М. Фихтенгольцем был построен [«Sur une fonction de deux variables sans intégrale double», Fund. Math, 6, 1924, стр. 30—36] пример такой несуммируемой в R $(a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d)$ функции $f(x, y)$, что равенство

$$\int_P dx\int_Q f(x, y)\,dy=\int_Q dy\int_P f(x, y)\,dy$$

имеет место, *каковы бы ни были* измеримые множества P и Q, содержащиеся, соответственно, в $[a, b]$ и $[c, d]$.

Пример. Если задать $f(x, y)$ в $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$ так: $f(0, 0) = 0$, а не в начале координат $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$, то

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\, dy = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y)\, dx = -\frac{\pi}{4}.$$

В самом деле, ведь при $x \neq 0$ будет

$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

и потому для $x \neq 0$

$$\int_0^1 f(x, y)\, dy = \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_0^1 = \frac{1}{x^2+1},$$

откуда вытекает указанное значение для первого повторного интеграла.

Второй повторный интеграл вычисляется так же.

Важно заметить, что для измеримых функций, *сохраняющих знак*, таких неприятностей быть не может. Именно, справедлива

Теорема 2. *Пусть $f(x, y)$ — измеримая неотрицательная функция, заданная в прямоугольнике $R(a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d)$. Если конечен*[1]) *один из повторных интегралов (*), то $f(x, y)$ суммируема на R, так что существует и второй из интегралов (*) и справедлива формула $(*_*)$.*

В самом деле, пусть конечен первый из интегралов (*), а двойной интеграл функции $f(x, y)$ по прямоугольнику R равен $+\infty$. Положим

$$f_n(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } f(x, y) \leqslant n \\ n\ , & \text{если } f(x, y) < n. \end{cases}$$

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \iint_R f_n(x, y)\, dx\, dy = +\infty,$$

и для достаточно большого n окажется

$$\iint_R f_n(x, y)\, dx\, dy > \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

---

1) Существование (но не конечность!) обоих интегралов (*) вытекает из замечания 2, сделанного к теореме 1 предыдущего параграфа. Таким образом, формула $(*_*)$ верна и без оговорки о конечности одного из интегралов (*) (но тогда она может принять вид $+\infty = +\infty$).

Но это нелепо, ибо $f_n(x, y)$ суммируема и, стало быть,

$$\iint\limits_R f_n(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f_n(x, y)\,dy,$$

а $f_n(x, y) \leqslant f(x, y)$.

Теорема доказана.

Следствие. *Если* $f(x, y)$ *измерима на* $R\,(a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d)$ *и*

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d |f(x, y)|\,dy < +\infty,$$

то существуют интегралы (*) *и верна формула* $(*_*)$.

ГЛАВА XIII

ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ТЕОРИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

§ 1. Абсолютно непрерывные функции множества

В этой главе мы займемся переносом свойств неопределенного интеграла Лебега на многомерный случай. Как и выше, мы ограничимся случаем плоскости, но все сказанное дальше без труда обобщается на любое многомерное пространство.

Пусть α — некоторое семейство множеств, $\alpha = \{e\}$. Если каждому множеству $e \in \alpha$ отвечает некоторое число $\Phi(e)$, то говорят, что на семействе α задана *функция множества*. В дальнейшем мы считаем, что α состоит из всех измеримых множеств, содержащихся в одном и том же открытом прямоугольнике R: $R\,(x_0 < x < X,\ y_0 < y < Y)$, а все рассматриваемые функции множества предполагаются конечными.

Функция множества $\Phi(e)$ называется *аддитивной*, если для любых двух не пересекающихся измеримых множеств e_1 и e_2 будет

$$\Phi(e_1 + e_2) = \Phi(e_1) + \Phi(e_2).$$

Нетрудно видеть, что такая функция обладает следующим свойством: для любого конечного числа попарно не пересекающихся измеримых множеств e_1, e_2, ..., e_n справедливо равенство

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^{n} e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \Phi(e_k).$$

Если же и для *счетного* множества попарно не пересекающихся измеримых множеств e_1, e_2, e_3, ... будет [1])

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^{\infty} e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(e_k),$$

то функция $\Phi(e)$ называется *вполне аддитивной*.

Функция множества $\Phi(e)$ называется *абсолютно непрерывной*, если ее значение стремится к нулю вместе с мерой множества e, т. е. если всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что для любого измеримого множества e ($e \subset R$) с мерой $me < \delta$ будет $|\Phi(e)| < \varepsilon$.

Ясно, что значение такой функции на всяком множестве меры нуль равно нулю. [2])

---

[1]) Напомним, что все множества e_k предполагаются лежащими в R, значит сумма их ограничена и потому измерима.

[2]) Если e_0 — пустое множество, то для всякой аддитивной функции множества $\Phi(e)$ будет $\Phi(e_0) = 0$.

Теорема 1. *Всякая аддитивная и абсолютно непрерывная функция множества будет и вполне аддитивной.*

В самом деле, если множества $e_1, e_2, e_3, \ldots$ попарно не пересекаются, то при $n \to \infty$ будет

$$m\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} e_k\right) \to 0, \text{ откуда и } \Phi\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} e_k\right) \to 0.$$

Но

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^{\infty} e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \Phi(e_k) + \Phi\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} e_k\right).$$

Остальное ясно.

Пусть A — произвольное точечное множество (содержащееся в R). Назовем его *измеримой оболочкой* всякое измеримое множество E, удовлетворяющее соотношениям[1]) $E \supset A$, $mE = m^*A$.

Впредь, не оговаривая этого специально, мы будем рассматривать только такие измеримые оболочки, которые также содержатся в R.

Лемма 1. *Если A — произвольное точечное множество ($A \subset R$), а $\Phi(e)$ — аддитивная и абсолютно непрерывная функция множества, то для любых двух измеримых оболочек E_1 и E_2 множества A будет*

$$\Phi(E_1) = \Phi(E_2).$$

Действительно, если $E_3 = E_1 E_2$, то $E_1 \supset E_3 \supset A$, откуда ясно, что $mE_1 = mE_3$. Значит, $m(E_1 - E_3) = 0$ и $\Phi(E_1 - E_3) = 0$. Но $E_1 = E_3 + (E_1 - E_3)$, так что $\Phi(E_1) = \Phi(E_3)$. Аналогично и $\Phi(E_2) = \Phi(E_3)$.

Впредь, имея дело с аддитивной и абсолютно непрерывной функцией множества $\Phi(e)$, мы будем обозначать через $\Phi(A)$ значение этой функции на измеримых оболочках множества A. Таким образом, символ $\Phi(A)$ получает смысл и тогда, когда множество A и неизмеримо (но, как всегда, $A \subset R$).

Условимся, далее, в следующем обозначении: если M — произвольная точка плоскости, а h — какое-нибудь положительное число, то через $Q(M, h)$ мы будем обозначать замкнутый квадрат с центром в точке M, стороны которого параллельны осям и равны h.

Определение. Пусть $\Phi(e)$ — некоторая функция множества, а M — какая-нибудь точка прямоугольника R. Если число λ (могущее равняться и бесконечности определенного знака) таково, что существует стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{h_n\}$, для которой[2])

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\Phi[Q(M, h_n)]}{h_n^2} = \lambda,$$

то мы будем говорить, что λ есть *симметричное производное число* функции $\Phi(e)$ в точке M и писать $\lambda = D_M \Phi(e)$.

С помощью теоремы Больцано—Вейерштрасса легко показать, что у всякой функции множества в каждой точке $M \in R$ существуют симметричные производные числа.

Если все симметричные производные числа функции $\Phi(e)$ в какой-нибудь точке M равны друг другу, то мы скажем, что в этой точке у $\Phi(e)$ существует *симметричная производная* $D_M \Phi(e)$, равная общему значению всех производных чисел. Заметим, что симметричную производную можно было бы

---

[1]) В гл. XI было доказано, что у каждого ограниченного множества есть измеримые оболочки (даже типа G_δ).

[2]) Напомним, что R прямоугольник *открытый*. Значит, для всех достаточно малых h будет $Q(M, h) \subset R$, и символ $\Phi[Q(M, h)]$ имеет смысл.

определить и иначе, а именно как предел $\lim_{h\to 0}\frac{\Phi[Q(M, h)]}{h^2}$, но оба определения равносильны.

Докажем теперь основную во всей этой главе лемму.

Лемма 2. *Пусть $\Phi(e)$ есть аддитивная и абсолютно непрерывная функция множества. Если в каждой точке M некоторого множества A ($A \subset R$) существует хотя бы одно симметричное производное число $D_M\Phi(e)$, удовлетворяющее неравенству*

$$D_M\Phi(e) \geqslant q, \text{ то } \Phi(A) \geqslant q \cdot m^*A.$$

Доказательство. Пусть $q_0 < q$ и $\varepsilon > 0$. Найдем такое $\delta > 0$, что неравенство $me < 2\delta$ влечет неравенство $|\Phi(e)| < \varepsilon$. При этом можно считать, что $\delta < \varepsilon$. Пусть, далее, G — такое открытое множество, что $A \subset G \subset R$, $mG < m^*A + \delta$.

Если $M \in A$, то существует такая последовательность $\{h_n\}$, что

$$h_n > 0, \quad Q(M, \ h_n) \subset G, \quad h_n \to 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty}\frac{\Phi[Q(M, \ h_n)]}{h_n^2} = D_M\Phi(e) > q_0.$$

Не ограничивая общности, можно считать (что мы и делаем), что при всех n будет $Q(M, h_n) \subset G$, $\Phi[Q(M, h_n)] > q_0 h_n^2$.

Ясно, что квадраты $Q(M, h_n)$ покрывают множество A в смысле Витали. Поэтому из них можно выделить такое счетное множество квадратов Q_1, Q_2, Q_3, ..., что

$$Q_i Q_k = 0 \quad (i \neq k), \qquad m\left[A - \sum_{k=1}^{\infty} Q_k\right] = 0.$$

Если положить $S = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k$, то окажется $\Phi(S) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(Q_k) > q_0 \sum_{k=1}^{\infty} mQ_k = q_0 \cdot mS$. Ввиду того, что $A \subset S + (A - S)$, будет $m^*A \leqslant mS + m(A - S) = mS$.

С другой стороны, $S \subset G$. Поэтому $mS \leqslant mG$. Значит

$$m^*A \leqslant mS \leqslant mG < m^*A + \delta$$

и $\qquad$ (*)

$$m(G - S) = mG - mS < \delta.$$

Кроме того, из (*) вытекает, что $mS = m^*A + \theta\varepsilon$, где $0 \leqslant \theta < 1$.

Заметив это, возьмем какую-нибудь измеримую оболочку E множества A. Можно считать, что $E \subset G$. Но тогда $E - SE \subset G - S$ и потому $m(E - SE) < \delta$, откуда и подавно $|\Phi(E - SE)| < \varepsilon$, или, что то же самое,

$$|\Phi(E) - \Phi(SE)| < \varepsilon.$$

Но неравенство $m(E - SE) < \delta$ означает также, что

$$mSE > mE - \delta = m^*A - \delta > mG - 2\delta \geqslant mS - 2\delta.$$

Стало быть, $m(S - SE) < 2\delta$ и $|\Phi(S) - \Phi(SE)| < \varepsilon$.

Таким образом, $|\Phi(E) - \Phi(S)| < 2\varepsilon$ и $\Phi(E) > q_0 mS - 2\varepsilon$.

Иначе говоря, справедливо неравенство

$$\Phi(E) > q_0[m^*A + \theta\varepsilon] - 2\varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю и переходя к пределу, а затем устремляя q_0 к q и снова переходя к пределу, завершаем доказательство, ибо $\Phi(E) = \Phi(A)$.

Следствие 1. *Если $\Phi(e)$ — аддитивная и абсолютно непрерывная функция множества и в каждой точке M множества A существует хотя бы одно симметричное производное число $D_M\Phi(e)$, удовлетворяющее неравенству $D_M\Phi(e) \leqslant p$, то $\Phi(A) \leqslant pm^*A$.*

Действительно, если $\Phi_1(e) = -\Phi(e)$, то в каждой точке $M \in A$ существует такое симметричное производное число $D_M\Phi(e)$, что $D_M\Phi_1(e) \geqslant -p$.

Отсюда, по лемме 2, будет $\Phi_1(A) \geqslant -pm^*A$, а это равносильно доказываемому неравенству.

Следствие 2. *Пусть $\Phi(e)$ аддитивна и абсолютно непрерывна. Если $p < q$ и в каждой точке M множества A существуют такие два симметричных производных числа $D'_M\Phi(e)$ и $D''_M\Phi(e)$, что*

$$D'_M\Phi(e) < p < q < D''_M\Phi(e), \tag{*}$$

то $mA = 0$.

В самом деле, по лемме 2 и следствию 1 выполняются два неравенства $\Phi(A) \geqslant qm^*A$, $\Phi(A) \leqslant pm^*A$. Поэтому $qm^*A \leqslant pm^*A$, а это возможно лишь при $m^*A = 0$.

Теорема 2. *Если функция множества $\Phi(e)$ аддитивная и абсолютно непрерывна, то почти во всех точках прямоугольника R существует конечная симметричная производная $D_M\Phi(e)$.*

В самом деле, в каждой точке M, где нет симметричной производной, найдутся два неравных симметричных производных числа $D'_M\Phi(e)$ и $D''_M\Phi(e)$. Значит, множество A таких точек R, где не существует симметричной производной, представимо в форме $A = \sum A_{p,\,q}$, причем $A_{p,\,q}$ обозначает множество таких точек $M \in R$, в которых выполнено (*), а суммирование распространено на все пары рациональных чисел $(p,\ q)$, $p < q$. По следствию 2 каждое слагаемое $A_{p,\,q}$ есть множество меры нуль, а потому и $mA = 0$.

Остается показать, что производная $D_M\Phi(e)$ не может обращаться в бесконечность на множестве положительной внешней меры. Но если обозначить через B множество тех точек R, в которых $D_M\Phi(e) = +\infty$, то по лемме 2 при любом q будет $\Phi(B) \geqslant qm^*B$, откуда $m^*B = 0$. Так же обстоит дело и с множеством точек, в которых $D_M\Phi(e) = -\infty$.

Теорема 3. *Пусть $\Phi(e)$ — аддитивная и абсолютно непрерывная функция множества. Если R_0 есть множество тех точек прямоугольника R, в которых существует симметричная производная $D_M\Phi(e)$, то эта производная есть функция, измеримая на множестве R_0.*

Доказательство. Введем прямоугольник R_1, более широкий, чем R, и определяемый неравенствами

$$R_1\,(x_0 - 1 < x < X + 1, \quad y_0 - 1 < y < Y + 1).$$

Если $M \in R$ и $0 < h \leqslant 1$, то $Q(M,\ h) \subset R_1$. Расширим определение функции $\Phi(e)$, положив $\Phi(e) = \Phi(eR)$ для всякого измеримого множества e, содержащегося в R_1. Ясно, что и после этого расширения функция $\Phi(e)$ остается аддитивной и абсолютно непрерывной.

В каждой точке $M \in R_0$ будет $D_M\Phi(e) = \lim\limits_{n \to \infty} n^2\Phi\left[Q\left(M,\ \frac{1}{n}\right)\right]$.

Поэтому достаточно показать, что при закрепленном h $(0 < h \leqslant 1)$ функция $\Phi[Q(M,\ h)]$ измерима на множестве R_0. Мы же вместо этого покажем, что эта функция *непрерывна* во всем прямоугольнике R, откуда и будет следовать ее измеримость на R, а значит и на R_0.

Рассмотрим две точки $M(a,\ b)$ и $N(a+\alpha,\ b+\beta)$ прямоугольника R, считая для простоты $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \geqslant 0$, Ясно, что

$$Q(M,\ h) = Q\left(a - \frac{h}{2} \leqslant x \leqslant a + \frac{h}{2},\ \ b - \frac{h}{2} \leqslant y \leqslant b + \frac{h}{2}\right),$$

$$Q(N,\ h) = Q\left(a + \alpha - \frac{h}{2} \leqslant x \leqslant a + \alpha + \frac{h}{2},\ \ b + \beta - \frac{h}{2} \leqslant y \leqslant b + \beta + \frac{h}{2}\right).$$

Если $\alpha < h$ и $\beta < h$, то квадраты $Q(M, h)$ и $Q(N, h)$ будут иметь общую часть [1]) T, определяемую неравенствами

$$T\left(a+\alpha-\frac{h}{2} \leqslant x \leqslant a+\frac{h}{2},\ b+\beta-\frac{h}{2} \leqslant y \leqslant b+\frac{h}{2}\right).$$

Значит,

$$mT=(h-\alpha)(h-\beta)$$

и

$$m[Q(M, h)-T]=m[Q(N, h)-T]=\alpha h+\beta h-\alpha\beta < h(\alpha+\beta).$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем такое $\delta > 0$, чтобы из неравенства $me < \delta$ вытекало неравенство $|\Phi(e)| < \varepsilon$.

Если α и β столь малы, что $h(\alpha+\beta) < \delta$, то

$$|\Phi[Q(M, h)]-\Phi(T)| < \varepsilon, \qquad \Phi|[Q(N, h)]-\Phi(T)| < \varepsilon,$$

откуда

$$|\Phi[Q(M, h)]-\Phi[Q(N, h)]| < 2\varepsilon.$$

Теорема доказана.

То обстоятельство, что симметричная производная $D_M\Phi(e)$ определена не во всех, а лишь почти во всех точках R, представляет известные неудобства. Чтобы избежать этих неудобств, введем функцию $\varphi(M)$, определенную на всем R следующим образом:

$$\varphi(M)=\begin{cases} D_M\Phi(e), & \text{если } M \in R_0, \\ 0, & \text{если } M \in R-R_0. \end{cases}$$

Здесь, как и выше, R_0 обозначает множество тех точек R, в которых существует симметричная производная функции $\Phi(e)$.

Теорема 4. *Функция $\varphi(M)$ суммируема на прямоугольнике R. Кроме того, для всякого измеримого множества $E \subset R$ справедлива формула*

$$\int\limits_E \varphi(M)\,dw=\Phi(E).$$

Доказательство. Пусть E — измеримое множество, содержащееся в R. Удалим из E те точки, в которых симметричная производная $D_M\Phi(e)$ не существует, или, хотя бы и существует, но бесконечна, и пусть A есть оставшееся множество. Ввиду того, что $m(E-A)=0$, ясно, что

$$\Phi(E)=\Phi(A).$$

Обозначим через A_+ множество тех точек M из A, в которых $D_M\Phi(e) \geqslant 0$, и пусть $A_-=A-A_+$. Тогда $\Phi(A)=\Phi(A_+)+\Phi(A_-)$.

Рассмотрим последовательность чисел

$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \frac{4}{n},\ \ldots,\ \frac{m}{n},\ \ldots$$

и положим

$$e_k=A\left(\frac{k-1}{n} \leqslant D_M\Phi(e) < \frac{k}{n}\right) \qquad (k=1, 2, 3, \ldots).$$

Множества e_k измеримы, попарно не пересекаются и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} e_k = A_+$. Поэтому

$$\Phi(A_+)=\sum_{k=1}^{\infty}\Phi(e_k).$$

[1]) Читателю рекомендуется сделать чертеж.

С другой стороны, функция $D_M\Phi(e)$ на множестве A_+ измерима и неотрицательна. Значит [1])

$$\int\limits_{A_+} D_M\Phi(e)\,dw = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{e_k} D_M\Phi(e)\,dw. \qquad (*)$$

По теореме о среднем

$$\frac{k-1}{n}\, me_k \leqslant \int\limits_{e_k} D_M\Phi(e)\,dw \leqslant \frac{k}{n}\, me_k.$$

С другой стороны, по лемме 2 и ее следствию 1

$$\frac{k-1}{n}\, me_k \leqslant \Phi(e_k) \leqslant \frac{k}{n}\, me_k.$$

Поэтому

$$\left| \Phi(e_k) - \int\limits_{e_k} D_M\,\Phi(e)\,dw \right| \leqslant \frac{1}{n}\, me_k.$$

Отсюда вытекает сходимость ряда, стоящего справа в равенстве (*), и оценка

$$\left| \Phi(A_+) - \int\limits_{A_+} D_M\Phi(e)\,dw \right| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} me_k = \frac{1}{n}\, mA_+.$$

Так как n можно взять сколь угодно большим, то

$$\Phi(A_+) = \int\limits_{A_+} D_M\Phi(e)\,dw.$$

Сходным образом устанавливается такое же равенство, в котором лишь A_+ заменено на A_-. Поэтому функция $D_M\Phi(e)$ суммируема на множестве A и $\Phi(A) = \int\limits_A D_M\Phi(e)\,dw$, откуда $\Phi(E) = \int\limits_E D_M\Phi(e)\,dw$.

Так как, в частности, можно взять $E = R$, то теорема доказана полностью.

§ 2. Неопределенный интеграл и его дифференцирование

Пусть в открытом прямоугольнике R задана суммируемая функция $f(M)$. Полагая для каждого измеримого множества $e \subset R$

$$\Phi(e) = \int\limits_e f(M)\,dw,$$

мы получим функцию множества, заданную на всех измеримых подмножествах прямоугольника R. Эта функция множества называется *неопределенным интегралом* функции $f(M)$. По известным свойствам интеграла Лебега она аддитивна и абсолютно непрерывна. Обратно, в теореме 4 предыдущего параграфа мы показали, что всякая аддитивная и абсолютно непрерывная функция множества есть неопределенный интеграл функции $\varphi(M)$. Поэтому справедлива

Теорема 1. *Класс аддитивных и абсолютно непрерывных функций множества совпадает с классом неопределенных интегралов суммируемых функций.*

---

[1]) Подчеркнем, что в этот момент рассуждения мы еще не можем гарантировать конечности ни левой, ни правой частей равенства (*).

Замечание. Все содержание предыдущего параграфа сохранилось бы, если бы семейство α множеств e, на которых определена функция $\Phi(e)$, состояло из всех измеримых множеств плоскости (а не только содержащихся в закрепленном прямоугольнике). В результате мы установили бы, что у аддитивной и абсолютно непрерывной функции множества $\Phi(e)$ почти во всех точках плоскости [1]) существует симметричная производная $D_M\Phi(e)$, измеримая на всяком измеримом множестве E и такая, что

$$\Phi(E) = \int_E D_M\Phi(e)\,dw.$$

В связи с этим естественно было бы определить и понятие неопределенного интеграла для всякой функции $f(M)$, *заданной на всей плоскости* и суммируемой на каждом измеримом множестве. Сделав это, мы установили бы, что всякая абсолютно непрерывная и аддитивная функция множества является неопределенным интегралом своей симметричной производной. Однако, мы не могли бы утверждать, что всякий неопределенный интеграл есть абсолютно непрерывная функция множества, т. е. теорема 1 не имела бы места.

В самом деле, если (ограничиваясь для простоты линейным случаем) положить $f(x)=0$ при $x<1$ и $f(x)=n$ при $n \leqslant x < n+1$, то $f(x)$ будет суммируема на всяком измеримом множестве e, но ее неопределенный интеграл не будет абсолютно непрерывным. Чтобы избежать подобных неудобств, мы и потребовали, чтобы все рассматриваемые функции были заданы в закрепленном прямоугольнике.

Суммируемая функция $f(M)$ однозначно определяет свой неопределенный интеграл. Справедливо предложение, в некотором смысле обратное этому.

Теорема 2. *Если функции $f(M)$ и $g(M)$ имеют один и тот же неопределенный интеграл, то они эквивалентны.*

В самом деле, по условию для всякого измеримого множества e (содержащегося в основном прямоугольнике R) будет

$$\int_e f(M)\,dw = \int_e g(M)\,dw.$$

В частности, для множества $e = E\,(f>g)$ будет

$$\int_e [f(M)-g(M)]\,dw = 0,$$

откуда (гл. VI, § 1, теорема 6) следует, что $mE\,(f>g)=0$.

Аналогично устанавливается, что множество $E\,(g>f)$ также имеет меру нуль. Теорема доказана.

Пусть $f(M)$ — какая-нибудь суммируемая (на R) функция и $\Phi(e)$ ее неопределенный интеграл. Введем функцию $\varphi(M)$, равную симметричной производной $D_M\Phi(e)$ функции $\Phi(e)$ там, где эта производная существует (т. е. почти везде на R) и нулю в остальных точках R. В теореме 4 предыдущего параграфа мы установили, что $\Phi(e)$ будет неопределенным интегралом функции $\varphi(M)$. Таким образом, одна и та же функция $\Phi(e)$ служит неопределенным интегралом и для $f(M)$ и для $\varphi(M)$. Значит, $f(M)$ и $\varphi(M)$ эквивалентны. Этим доказана

Теорема 3. *Неопределенный интеграл суммируемой функции почти везде имеет эту функцию своей симметричной производной.*

Условимся говорить, что точка M_0 есть *точка Лебега* суммируемой функции $f(M)$, если

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} \int\limits_{Q(M_0,\,h)} |f(M)-f(M_0)|\,dw = 0.$$

---

1) Это значит, что пересечение множества точек, где симметричной производной нет, со всяким измеримым множеством имеет меру нуль.

Теорема 4. *Почти все точки прямоугольника R суть точки Лебега функции $f(M)$, заданной и суммируемой в этом прямоугольнике.*

Доказательство этой теоремы вполне аналогично одномерному случаю. Именно, взяв любое рациональное число r, применим предыдущую теорему к функции $|f(M)-r|$. Почти для всех точек $M_0 \in R$ будет

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} \int\limits_{Q(M_0,\ h)} |f(M)-r|\,d\omega = |f(M_0)-r|.$$

Обозначим через $A(r)$ множество (меры нуль) тех точек, в которых не выполнено это соотношение и пусть

$$A = \sum A(r) + R(|f| = +\infty),$$

где суммирование распространено на все рациональные числа. Ясно, что $mA = 0$.

Покажем, что всякая точка M_0, не входящая в A, будет точкой Лебега функции $f(M)$, чем и будет доказана теорема.

Взяв $\varepsilon > 0$, подбираем такое r, чтобы было

$$|f(M_0)-r| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1}$$

Тогда почти везде[1]) будет

$$\big|\,|f(M)-r| - |f(M)-f(M_0)|\,\big| < \frac{\varepsilon}{3}$$

и потому

$$\left| \frac{1}{h^2} \int\limits_{Q(M_0,\ h)} |f(M)-r|\,d\omega - \frac{1}{h^2} \int\limits_{Q(M_0,\ h)} |f(M)-f(M_0)|\,d\omega \right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

для всякого квадрата $Q(M_0, h)$, содержащегося в R. Так как $M_0 \overline{\in} A$, то для взятого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что, как только $0 < h < \delta$, так сейчас же

$$\left| \frac{1}{h^2} \int\limits_{Q(M_0,\ h)} |f(M)-r|\,d\omega - |f(M_0)-r| \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

Из (1), (2), (3) следует, что при $0 < h < \delta$ будет

$$\frac{1}{h^2} \int\limits_{Q(M_0,\ h)} |f(M)-f(M_0)|\,d\omega < \varepsilon,$$

чем и доказано, что M_0 — точка Лебега функции $f(M)$.

§ 3. Обобщение полученных результатов

В этом параграфе мы покажем, что вместо симметричной производной в приведенных выше теоремах можно было говорить о производных более общего вида.

Пусть M — какая-нибудь точка плоскости, а $\mathfrak{M}$ — некоторая система измеримых множеств, содержащих точку M. Условимся говорить, что система $\mathfrak{M}$ *сжимаема*[2]) в точку M, если среди множеств системы имеются множества сколь угодно малого диаметра. При этом диаметром dE множества E назы-

---

[1]) Точнее, это соотношение верно во всех точках M, где $f(M) \neq \infty$.

[2]) Это выражение вводится здесь впервые.

вается точная верхняя граница расстояний точек E друг от друга $dE = \sup\{\rho(M, N)\}$ $(M \in E,\ N \in E)$.

Если система $\mathfrak{M}$ сжимаема в точку M и для каждого множества e этой системы найдется такой содержащий его квадрат $Q(M, h)$, что

$$h^2 \leq \alpha \cdot me,$$

где α число, не зависящее от выбора множества e, то говорят, что система $\mathfrak{M}$ *регулярно* сжимаема в точку M. Грубо говоря, регулярная сжимаемость системы означает, что в ней нет слишком «сплющенных» множеств.

Пусть $\mathfrak{M}$ есть система измеримых множеств положительной меры, сжимаемая в некоторую точку M, а $\Phi(e)$ какая-нибудь функция множества. Если существует (конечный или бесконечный) предел

$$\Delta_M \Phi(e) = \lim_{de \to 0} \frac{\Phi(e)}{me} \quad (e \in \mathfrak{M}),$$

то этот предел называется *производной* функции $\Phi(e)$ в точке M, *относительно системы* $\mathfrak{M}$.

Теорема 1. *Пусть $\Phi(e)$ — аддитивная и абсолютно непрерывная функция множества. Почти в каждой точке M основного прямоугольника R существует производная $\Delta_M \Phi(e)$ этой функции относительно любой системы множеств, регулярно сжимаемой в эту точку, причем значение указанной производной не зависит от выбора системы. Для любого измеримого множества E, содержащегося в R, будет*[1])

$$\int_E \Delta_M \Phi(e)\, dw = \Phi(E). \tag{*}$$

Доказательство. Функция $\Phi(e)$, будучи аддитивной и абсолютно непрерывной, является неопределенным интегралом некоторой суммируемой функции $f(N)$. Почти все точки R суть точки Лебега этой функции. Пусть M_0 — точка Лебега $f(M)$. Покажем, что в этой точке производная $\Delta_{M_0}\Phi(e)$ относительно любой системы, регулярно сжимаемой в M_0, будет равна $f(M_0)$:

$$\Delta_{M_0}\Phi(e) = f(M_0).$$

Этим и будет доказана теорема.

Пусть $\mathfrak{M} = \{e\}$ — какая-нибудь система множеств, регулярно сжимаемая в точку M_0. Тогда для каждого множества e системы найдется содержащий его квадрат $Q(M_0, h)$, у которого $h^2 \leq \alpha me$.

Так как

$$\frac{\Phi(e)}{me} - f(M_0) = \frac{1}{me}\int_e f(M)\, dw - f(M_0),$$

то

$$\left| \frac{\Phi(e)}{me} - f(M_0) \right| \leq \frac{1}{me}\int_e |f(M) - f(M_0)|\, dw.$$

Но $Q(M_0, h) \supset e$. Значит:

$$\int_e |f(M) - f(M_0)|\, dw \leq \int_{Q(M_0,\, h)} |f(M) - f(M_0)|\, dw.$$

---

[1]) Производная $\Delta_M \Phi(e)$ будет определена не во всех, а только почти во всех точках E. Поэтому под написанным в последней формуле интегралом надо понимать $\int_{E_0} \Delta_M \Phi(e)\, dw$, где E_0 есть та часть E, на которой определена $\Delta_M \Phi(e)$.

Отсюда следует, что

$$\left|\frac{\Phi(e)}{me} - f(M_0)\right| \leqslant \frac{\alpha}{h^2} \int\limits_{Q(M_0,\, h)} |f(M) - f(M_0)|\, dw.$$

Когда $de \to 0$, то и $h \to 0$, а так как M_0 — точка Лебега функции $f(M)$, то последний интеграл стремится к нулю вместе с h. Таким образом,

$$\lim_{de \to 0} \frac{\Phi(e)}{me} = f(M_0).$$

Теорема доказана. Полезно указать, что она перестает быть верной, если отбросить условие регулярной сжимаемости рассматриваемых систем множеств.

В заключение остановимся на вопросе о том, как из результатов этой главы получить уже известные результаты гл. IX о функциях одной переменной.

Пусть $f(t)$ — суммируемая на некотором интервале (a, b) функция. Полагая $\Phi(e) = \int\limits_e f(t)\, dt$ $[e \subset (a, b)]$, получаем ее неопределенный интеграл. Его производная относительно любой регулярно сжимаемой в точку x системы равна $f(x)$ почти в каждой точке x. В частности, это так, если за рассматриваемую систему множеств принять систему сегментов $[x, x+\Delta x]$, имеющих точку x одним из своих концов.[1]) Производная $\Delta_x \Phi(e)$ относительно этой системы совпадает с обычной производной в точке x функции

$$\varphi(x) = \int\limits_a^x f(t)\, dt, \text{ ибо } \frac{\Phi([x,\ x+\Delta x])}{m\,[x,\ x+\Delta x]} = \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}.$$

Отсюда снова получается теорема 2 из § 4, гл. IX. Чтобы доказать теорему 3 того же параграфа, нам понадобится

***Теорема** 2. Если $\varphi(x)$ — абсолютно непрерывная функция, заданная на сегменте $[a, b]$, то существует такая аддитивная абсолютно непрерывная функция $\Phi(e)$, заданная на измеримых множествах сегмента $[a, b]$, что*

$$\Phi([a, x]) = \varphi(x) - \varphi(a).$$

Мы дадим лишь набросок доказательства этой теоремы, предоставляя детали рассуждения читателю.

Так как всякая абсолютно непрерывная функция точки есть разность двух абсолютно непрерывных же возрастающих функций, то, не ограничивая общности, мы можем считать (что мы и делаем), что функция $\varphi(x)$ возрастает.

Пусть $a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b$. Обозначим через Δ любой из четырех промежутков $[\alpha, \beta]$, (α, β), $[\alpha, \beta)$ и $(\alpha, \beta]$ и положим по определению $\Phi(\Delta) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$.

Этим функция $\Phi(e)$ будет определена для всех промежутков, лежащих в $[a, b]$, а нам требуется определить ее для всякого измеримого множества $e \subset [a, b]$. Бросается в глаза аналогия этой задачи с задачей введения меры измеримого множества, которой мы занимались в гл. III. Аналогия эта подсказывает и путь решения. Именно, если G есть открытое множество, содержащееся в $[a, b]$, то мы полагаем $\Phi(G) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \Phi(\Delta_k)$, где Δ_k составляющие интервалы G. Нетрудно проверить, что из $G_1 \subset G_2$ вытекает $\Phi(G_1) \leqslant \Phi(G_2)$, что из $G_1 G_2 = 0$ следует $\Phi(G_1 + G_2) = \Phi(G_1) + \Phi(G_2)$ и что вообще $\Phi(G_1 + G_2) \leqslant \Phi(G_1) + \Phi(G_2)$. Все это устанавливается так же, как в § 1, гл. III.

Опираясь на абсолютную непрерывность функции $\varphi(x)$, мы без труда устанавливаем, что

$$\lim_{mG \to 0} \Phi(G) = 0. \qquad (*)$$

---

[1]) У этой системы $\alpha = 2$.

Если E есть произвольное измеримое множество, содержащееся в $[a, b]$, то мы выбрасываем из него точки a и b и рассматриваем всевозможные открытые множества G, содержащиеся в (a, b) и содержащие E. Положив по определению $\Phi(E) = \inf\{\Phi(G)\}$, мы и получим требуемую функцию. Действительно, ее абсолютная непрерывность вполне очевидна, благодаря соотношению (*). Значит, дело сводится к проверке аддитивности этой функции. Но так как функция $\Phi(e)$ подобна внешней мере множества e, то, так же, как в теореме 5, § 3, гл. III, мы установим, что $\Phi(e_1+e_2) \leqslant \Phi(e_1)+\Phi(e_2)$.

С другой стороны, если F_1 и F_2 — два замкнутых множества без общих точек, то, опираясь на теорему отделимости, мы покажем, что

$$\Phi(F_1+F_2) = \Phi(F_1) + \Phi(F_2).$$

Это делается так же, как в теореме 6, § 2, гл. III. Теперь нам надо установить аналогию функции $\Phi(E)$ с *внутренней* мерой множества E.

Если E — произвольное измеримое множество, а F — его замкнутое подмножество, то $\Phi(F) \leqslant \Phi(E)$.

С другой стороны, всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что неравенство $me < \delta$ влечет неравенство $\Phi(e) < \varepsilon$. Заметив это, возьмем какое-нибудь измеримое множество E и $\varepsilon > 0$. Найдя соответствующее этому ε (в только что указанном смысле) δ, построим замкнутое множество $F \subset E$, у которого $mF > mE - \delta$.

Так как $E = F + (E-F)$, то $\Phi(E) \leqslant \Phi(F) + \Phi(E-F)$. Но $m(E-F) < \delta$ и потому $\Phi(E-F) < \varepsilon$. Стало быть $\Phi(E) < \Phi(F) + \varepsilon$. Это показывает, что $\Phi(E) = \sup\{\Phi(F)\}$, где F суть всевозможные замкнутые множества, содержащиеся в E. Этим доказано, что действительно, функция $\Phi(E)$ сходна с внутренней мерой. Опираясь на это сходство и повторяя рассуждения, подробно проведенные при доказательстве теоремы 6, § 3, гл. III, мы получим, что при $e_1e_2 = 0$ будет $\Phi(e_1+e_2) \geqslant \Phi(e_1) + \Phi(e_2)$.

В сочетании с ранее доказанным противоположным неравенством, это соотношение устанавливает аддитивность функции $\Phi(e)$. Теорема доказана.

Теперь уже легко вывести теорему 3, § 4, гл. IX. Для этого надо лишь построить, как только что указано, функцию $\Phi(e)$. Эта функция будет неопределенным интегралом своей производной, т. е. $\Phi(e) = \int\limits_e f(t)\,dt$.

В частности для $e = [a, x]$ получаем $\varphi(x) = \varphi(a) + \int\limits_a^x f(t)\,dt$, что равносильно упомянутой теореме.

ГЛАВА XIV

ТРАНСФИНИТНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Упорядоченные множества. Порядковые типы

Начиная с гл. III, мы занимались почти исключительно метрической теорией функций, в которой основным является понятие *меры* точечного множества. Для этой теории нам оказались достаточными те скромные сведения из теории множеств, которые изложены в первых двух главах книги. Желая остановиться на некоторых вопросах дескриптивной теории функций, мы должны расширить наши сведения по теории множеств; этому и посвящена настоящая глава.

В гл. I, говоря о множестве, мы отвлекались от того, в каком порядке расположены его элементы. Здесь, напротив, вопрос о порядке элементов данного множества будет для нас основным.

Определение 1. Множество A называется *упорядоченным*, если указано правило φ, согласно которому из всяких двух различных элементов a и b множества A один оказывается предшествующим другому. При этом должны быть соблюдены два требования:

1) *Если a предшествует b, то b не предшествует a.*

2) *Если a предшествует b, а b предшествует c, то a предшествует c.*

Если a предшествует b, то говорят, что b *следует* за a. Символически это записывается так:

$$a \prec b, \quad b \succ a.$$

Самое правило φ, о котором шла речь в определении, называется *способом упорядочивания*. Говоря, что дано упорядоченное множество A, мы всегда будем считать, что оно рассматривается вместе с его способом упорядочивания. Если множества $A=\{a, b, c\}$ и $B=\{b, c, a\}$ упорядочены в порядке написания букв, то это суть разные упорядоченные множества.

В связи с этим находится и несколько своеобразное употребление термина «часть упорядоченного множества». Именно, если A есть упорядоченное множество, а B есть подмножество A, то всякие два элемента B входят и в A и там (в A) имеют определенный порядок следования. Так вот, мы раз навсегда условимся считать, что и в множестве B эти элементы имеют тот же порядок следования, что и в A. Легко понять, что это соглашение есть способ упорядочивания множества B.

Таким образом, *частью* упорядоченного множества A мы будем называть *упорядоченное* множество B, все элементы которого входят в A и взаимный порядок которых одинаков в A и в B.

Если, например, $A=\{a, b, c\}$, $B=\{a, b\}$, $C=\{b, a\}$, то частью A является B, но не C.

Приведем некоторые примеры упорядоченных множеств.

1. Прежде всего всякое множество A вещественных чисел можно упорядочить, считая из двух чисел, входящих в A, предшествующим то, которое меньше. Этот порядок мы будем называть *естественным*.

2. Можно было бы упорядочить всякое множество вещественных чисел и в обратном порядке, считая предшествующим большее число. Например,

множество всех натуральных чисел упорядоченное по указанному способу, расположится так: $\{\dots, 5, 4, 3, 2, 1\}$.

3. Конечное множество из n элементов можно упорядочить $n!$ различными способами.

4. Каждое натуральное число n единственным образом представляется в форме $n = 2^k(2m+1)$ $(k=0, 1, 2, \dots;\ m=0, 1, 2, \dots)$.

Условимся число $n = 2^k(2m+1)$ считать предшествующим числу $n' = 2^{k'}(2m'+1)$, если $k < k'$ или если $k = k'$, но $m < m'$. При этом способе упорядочивания натуральные числа расположатся так:

$$\begin{matrix} 1, & 3, & 5, & 7, & 9, \dots \\ 2, & 6, & 10, & 14, & 18, \dots \\ 4, & 12, & 20, & 28, & 36, \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

причем из двух чисел разных строк предшествует то, которое написано выше, а в каждой строке числа расположены в естественном порядке. Например,

$$7 \prec 2, \qquad 18 \prec 12, \qquad 28 \prec 36.$$

5. Каждое комплексное число единственным образом представимо в форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$, где r модуль, а φ аргумент числа.[1]) Условившись считать, что из двух комплексных чисел предшествует то, у которого модуль меньше, а в случае равенства модулей — то, у которого аргумент меньше, мы упорядочим множество всех комплексных чисел.

Пусть A упорядоченное множество и $a \in A$. Если в множестве A нет элементов, предшествующих a, то a называется *первым* элементом A. Аналогично вводится понятие *последнего* элемента. Далее, если a, b, c суть элементы A и $a \prec b \prec c$, то говорят, что b лежит *между* a и c.

Определение 2. Пусть A и B два упорядоченных множества и ψ взаимно однозначное соответствие между ними. Если всякое соотношение

$$a \prec a',$$

имеющее место между элементами A, остается верным при замене этих элементов соответствующими им элементами B, то соответствие ψ называется *наложением множеств A и B друг на друга.*

Иначе говоря, наложение двух упорядоченных множеств есть соответствие, сохраняющее порядок следования элементов.

Определение 3. Если два упорядоченных множества A и B можно наложить друг на друга, то говорят, что эти множества *подобны* между собой и пишут

$$A \simeq B.$$

Теорема 1. *Если упорядоченные множества подобны между собой, то они эквивалентны.*

Действительно, наложение есть вид взаимнооднозначного соответствия.

Легко видеть, что для конечных множеств эта теорема обратима, т. е. справедлива

Теорема 2. *Если A и B упорядоченные конечные множества, состоящие из одинакового количества элементов, то эти множества подобны друг другу.*

Для доказательства этого факта нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Если A конечное упорядоченное множество, то в нем есть первый элемент.*

Действительно, возьмем какой-нибудь элемент из A. Если он первый, то лемма доказана. В противном случае в A имеются элементы, предшествующие выбранному. Возьмем какой-нибудь из них. Если он первый в A, то лемма доказана. В противном случае открывается возможность дальнейшего выделения новых элементов из A. Продолжая этот процесс, мы необходимо

---

[1]) Для $z = 0$ условимся считать $\varphi = 0$.

встретим первый элемент A, ибо иначе из конечного множества удалось бы выделить бесконечную последовательность различных элементов, что невозможно.

Следствие. *Если A конечное упорядоченное множество из n элементов, то его можно перенумеровать так, чтобы оказалось*

$$a_1 \prec a_2 \prec a_3 \prec \ldots \prec a_n.$$

Действительно, для этого нужно обозначить через a_1 первый элемент A, через a_2 — первый элемент (конечного) множества $A - \{a_1\}$ и т. д.

Теперь теорема 2 очевидна. Действительно, если A и B упорядоченные множества, в каждом из которых есть по n элементов, то нумеруем их вышеуказанным способом и соотносим друг другу элементы с одинаковыми номерами.

Для бесконечных множеств теорема 1 не обратима. Например, если

$$A = \{1, 2, 3, \ldots\}, \qquad B = \{\ldots, 3, 2, 1\},$$

то множества A и B эквивалентны друг другу (они состоят из одних и тех же элементов). Однако они не подобны, что видно хотя бы из того, что в A есть первый элемент, а в B его нет, в то время как при наложении упорядоченных множеств первому элементу одного из них необходимо должен отвечать первый элемент другого.

Теорема 3. *Пусть A, B, C упорядоченные множества. Тогда*

1) $A \simeq A$. 2) *Если* $A \simeq B$, то $B \simeq A$. 3) *Если* $A \simeq B$, а $B \simeq C$, то $A \simeq C$.

Доказательство предоставляем читателю.

Точно так же как понятие эквивалентности двух множеств привело нас к общему определению мощности, так и понятие подобия приводит к определению *порядкового типа*.

Определение 4. Пусть все упорядоченные множества разбиты по классам, так что два множества попадают в один класс тогда и только тогда, когда они подобны. Соотнесем каждому такому классу упорядоченных множеств какой-либо символ и назовем его *порядковым типом* любого множества данного класса.

Порядковый тип упорядоченного множества A обозначают через $\overline{A}$. Относительно подобных множеств A и B говорят, что они имеют один и тот же порядковый тип и пишут $\overline{A} = \overline{B}$.

Все множества, имеющие данный порядковый тип α, имеют одинаковую мощность. Ее называют мощностью типа α и обозначают через $\overline{\alpha}$. Если $\overline{A} = \alpha$, то $\overline{\overline{A}} = \overline{\alpha}$.

Если $\alpha = \beta$, то $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$, но, как мы видели, обратное предложение, вообще говоря, неверно.

Некоторые, часто встречающиеся, порядковые типы имеют общепринятое обозначение.

Например, порядковый тип множества $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ (а стало быть и всякого упорядоченного множества, состоящего из n элементов) обозначают буквой n. Таким образом символ n одновременно служит обозначением и мощности и порядкового типа множества A. Это несовершенство обозначений не приводит к сколько-нибудь заметным неудобствам.

В дальнейшем мы условимся пустое множество и множества из одного элемента считать упорядоченными и их типы обозначать соответственно через 0 и 1.

Порядковый тип множества всех натуральных чисел, расположенных в естественном порядке $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ обозначают символом ω, $\overline{N} = \omega$.

Порядковый тип множества всех натуральных чисел, расположенных в порядке, обратном естественному, $N^* = \{\ldots, 4, 3, 2, 1\}$ обозначают символом ω^*.

Очевидно, $\overline{\omega^*} = \overline{\omega}$, но $\omega^* \neq \omega$.

Вообще, имея упорядоченное множество A со способом упорядочивания φ, можно получить другое упорядоченное множество A^*, состоящее из тех же элементов, но с «обратным» способом упорядочивания φ^*. Именно, если $a \in A$,

$b \in A$ и согласно φ будет $a \prec b$, то согласно φ^* должно быть $a \succ b$. Если тип A есть α, то тип A^* обозначают через α^*.

Легко понять, что $(\alpha^*)^* = \alpha$. Для порядкового типа n конечного множества будет $n^* = n$.

Порядковый тип множества всех целых чисел в естественном порядке

$$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

обозначают через π. Очевидно $\pi^* = \pi$.

Порядковый тип множества R всех рациональных чисел, расположенных в естественном порядке, обозначают через η. Очевидно $\eta^* = \eta$.

Наконец, порядковый тип множества Z всех вещественных чисел, в их естественном порядке, обозначают через λ. Ясно, что $\lambda^* = \lambda$. Легко видеть, что порядковый тип любого интервала [1]) (но не сегмента!) числовой прямой есть λ. Наложение интервала $(a, b) = \{x\}$ на множество $Z = \{y\}$ можно осуществить, например, по формуле $y = \operatorname{tg} \frac{(2x - a - b)\pi}{2(b-a)}$.

Теорема 4. *Каково бы ни было счетное упорядоченное множество A, из множества R всех рациональных чисел в их естественном порядке можно выделить часть* [2]) *R_0, подобную множеству A.*

Доказательство. Перенумеруем оба счетные множества A и R:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}; \qquad R = \{r_1, r_2, r_3, \ldots\}.$$

Само собою разумеется, что эта нумерация никак не связана с порядком элементов в A и R (в R вообще невозможно установить нумерацию, при которой $r_1 \prec r_2 \prec r_3 \ldots$, ибо R не содержит первого элемента).

Положим $n_1 = 1$. Сделав это, назовем через r_{n_2} тот из элементов R, который: 1) расположен относительно r_{n_1} так же, как элемент a_2 расположен относительно a_1 (т. е. если $a_2 \succ a_1$, то $r_{n_2} > r_{n_1}$, а если $a_2 \prec a_1$, то $r_{n_2} < r_{n_1}$) и 2) из всех таких элементов R имеет наименьший номер. Существование такого элемента r_{n_2} следует из того, что в R нет ни первого, ни последнего элемента.

Далее, пользуясь тем, что между двумя элементами R всегда имеются промежуточные, а также тем, что в R нет ни первого, ни последнего элемента, легко убедиться, что в R есть элементы, расположенные относительно r_{n_1} и r_{n_2} так же, как a_3 расположено относительно a_1 и a_2. Тот из них, который имеет наименьший номер, назовем через r_{n_3}. Продолжая этот процесс неограниченно, мы построим последовательность $r_{n_1}, r_{n_2}, r_{n_3}, \ldots$ элементов R, которая и представит собой требуемое множество R_0 (еще раз отметим, что взаимный порядок чисел в $\{r_{n_k}\}$ определяется их величиной, а не величиной их номеров).

Доказанную теорему можно формулировать так: множество типа η содержит части любого типа α мощности a.

Определение 5. Пусть A упорядоченное множество и $a \in A$. Множество всех элементов A, предшествующих элементу a, называется *отрезком, отсекаемым элементом a от множества A*, и обозначается через A_a.

Отметим, что сам элемент a в отрезок A_a не входит. Если a первый элемент A, то A_a есть пустое множество. Отрезок упорядоченного множества есть часть последнего и, как таковая, сам есть упорядоченное множество.

Пусть $a \in A$ и A_a есть отрезок, отсекаемый элементом a от множества A. Если a' есть элемент A, предшествующий элементу a, то отрезки $A_{a'}$ и $(A_a)_{a'}$, отсекаемые им от A и от A_a, тождественны $(A_a)_{a'} = A_{a'}$, так что из двух отрезков упорядоченного множества один есть отрезок другого. Это дает возможность упорядочить множество H, состоящее из всех отрезков упорядо-

---

[1]) Мы считаем, что числа интервала расположены в естественном порядке.

[2]) При этом числа множества R_0 расположены в R_0 в том же (естественном) порядке, что и в R.

ченного множества A. Именно, мы условимся из двух отрезков A_a и $A_{a'}$ считать предшествующим $A_{a'}$, если $A_{a'} \subset A_a$, или, что то же самое, если $a' \prec a$. Очевидно, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Множество H всех отрезков упорядоченного множества A подобно множеству A.*

Действительно, соотнеся друг другу элемент a и отсекаемый им отрезок A_a, мы получим наложение множеств A и H друг на друга.

Например, если $A = \{a, b, c\}$, то $H = \{0, \{a\}, \{a, b\}\}$. Оба множества имеют порядковый тип 3.

В заключение остановимся на операции *сложения порядковых типов.*

Пусть $L = \{\lambda\}$ есть упорядоченное множество и пусть каждому $\lambda \in L$ соотнесено упорядоченное множество A_λ, причем множества A_λ попарно не пересекаются. В таком случае легко упорядочить сумму $S = \sum\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$.

Именно, пусть a и a' суть элементы S. Тогда $a \in A_\lambda$, $a' \in A_{\lambda'}$. Условимся считать, что $a \prec a'$ (в множестве S) если $\lambda \prec \lambda'$ (в множестве L) или если $\lambda = \lambda'$, но $a \prec a'$ в множестве A_λ. В дальнейшем, говоря о сумме упорядоченного множества упорядоченных множеств, мы всегда будем предполагать, что эта сумма упорядочена по указанному способу.

В силу сказанного, множества $A + B$ и $B + A$ суть различные упорядоченные множества.

Пусть, теперь, $L = \{\lambda\}$ есть упорядоченное множество и каждому λ соотнесен порядковый тип α_λ. Возьмем для каждого λ множество A_λ, упорядоченное по типу α_λ и, предполагая эти множества попарно не пересекающимися, образуем сумму $S = \sum\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$.

Согласно сказанному выше, эта сумма есть упорядоченное множество. Ее порядковый тип, по определению, называется суммой упорядоченного множества порядковых типов $\{\alpha_\lambda\}$ $\bar{S} = \sum\limits_{\lambda \in L} \alpha_\lambda$.

Легко понять, что это определение не зависит от выбора множеств A_λ, а только от типов α_λ.

В простых случаях порядок слагаемых будет указан самим способом их написания.

П р и м е р ы.

1) $2 + 3 = 5$, ибо при $\bar{A} = 2$, $\bar{B} = 3$ окажется $\overline{A + B} = 5$. Нетрудно убедиться, что и вообще для конечного числа слагаемых, являющихся типами конечных множеств, новое определение суммы совпадает с обычным пониманием этого термина.

2) $1 + \omega = \omega$. Действительно, $1 + \omega$ есть тип множества

$$\{a, b_1, b_2, b_3, \ldots\},$$

которое имеет тип ω.

3) Напротив, $\omega + 1 \neq \omega$, ибо $\omega + 1$ есть тип множества

$$\{b_1, b_2, b_3, \ldots; a\},$$

в котором есть последний элемент. Таким образом, $1 + \omega \neq \omega + 1$ и сложение порядковых типов не коммутативно.

4) $\omega^* + \omega = \pi$. Здесь также $\omega + \omega^* \neq \omega^* + \omega$.

5) $1 + \lambda + 1$ есть порядковый тип сегмента $[a, b]$.

§ 2. Вполне упорядоченные множества

Определение. Если всякая непустая часть упорядоченного множества A имеет первый элемент, то A называется *вполне упорядоченным множеством.*

Кроме того, мы условимся пустое множество также считать вполне упорядоченным.

Теорема 1. *Всякое конечное упорядоченное множество вполне упорядочено.*

Действительно, всякая непустая часть такого множества сама есть конечное упорядоченное множество и, по лемме § 1, имеет первый элемент.

Другими примерами вполне упорядоченных множеств могут служить множества

$$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} \qquad (\bar{N} = \omega),$$
$$M = \{1, 3, 5, 7, \ldots; 2, 4, 6, 8, \ldots\} \qquad (\bar{M} = \omega + \omega).$$

Докажем для примера, что N вполне упорядочено. Пусть N^* есть непустая часть N. Возьмем в N^* произвольный элемент n. Если n есть первый элемент N^*, то наше предложение доказано. В противном случае множество[1] N^*N_n есть непустое и (вместе с N_n) конечное множество, — в нем, следовательно, есть первый элемент n_0, который, очевидно, является первым и в N^*.

Напротив, упорядоченное множество $L = \{\ldots, 4, 3, 2, 1\}$ не будет вполне упорядоченным.

Из определения непосредственно следует

Теорема 2. 1) *Всякая часть вполне упорядоченного множества вполне упорядочена.*

2) *Непустое вполне упорядоченное множество имеет первый элемент.*

3) *Если из двух подобных упорядоченных множеств одно вполне упорядочено, то и второе также вполне упорядочено.*

4) *За каждым, кроме последнего, элементом вполне упорядоченного множества есть непосредственно следующий.*

5) *Из вполне упорядоченного множества нельзя выделить бесконечной убывающей последовательности, т. е. последовательности вида*

$$a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ \ldots \qquad (1)$$

Остановимся только на доказательстве 5). Если бы последовательность (1) существовала, то, будучи (непустой) частью вполне упорядоченного множества, она содержала бы первый элемент. Но ни один ее элемент a_n не первый, ибо $a_{n+1} \prec a_n$.

Фундаментальную роль играет следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть A есть вполне упорядоченное множество, а A^* его часть (могущая совпадать с A). Не может существовать такого наложения*[2]) *множества A на A^*, в котором элементу $a \in A$ отвечает в A^* предшествующий ему (в множестве A) элемент a^*.*

Доказательство. Допустим, напротив, что такие наложения A на A^* существуют, и пусть φ есть одно из них. Обозначим через M множество тех элементов A, которым при наложении φ в множестве A^* отвечают элементы, предшествующие им (в A). По условию M не пусто и в нем, стало быть, есть первый элемент a_0. Пусть элементу a_0 при наложении φ в множестве A^* отвечает элемент a_0^*. Очевидно, в множестве A будет $a_0^* \prec a_0$.

Но при наложении φ элементу a_0^*, как элементу множества A, в множестве A^* также отвечает какой-то элемент a_1. Так как φ есть наложение, т. е. соответствие, сохраняющее порядок следования элементов, то в множестве A^*, а значит и в множестве A, элемент a_1 предшествует элементу a_0^*

$$a_1 \prec a_0^*.$$

Таким образом, элемент a_0^* также должен входить в M, что, очевидно, невозможно, потому, что $a_0^* \prec a_0$, а a_0 первый элемент M. Теорема доказана.

Следствие 1. *Вполне упорядоченное множество не может быть подобно своему отрезку или части своего отрезка.*

Действительно, если A вполне упорядоченное множество и A_a его отрезок, отсекаемый элементом a, то при всяком наложении A на A_a или на часть A_a элементу a должен был бы отвечать элемент, предшествующий ему, что, как мы видели, невозможно.

---

[1]) N_n есть отрезок, отсекаемый от N числом n.

[2]) Как всегда, мы считаем, что A^* упорядочено так же, как и A, так что и A^* вполне упорядочено.

Следствие 2. *Два различных отрезка вполне упорядоченного множества не могут оказаться подобными друг другу.*

Следствие 3. *Вполне упорядоченное множество не может быть подобным отрезку своей части.*

Теорема 4. *Два подобных между собой вполне упорядоченных множества можно наложить друг на друга единственным способом.*

Доказательство. Пусть φ и ψ два различных наложения вполне упорядоченных множеств A и B друг на друга. Обозначим, соответственно через $\varphi(a)$ и $\psi(a)$ образы элемента $a \in A$ в множестве B при этих наложениях, и пусть a_0 такой элемент A, что $\varphi(a_0) \neq \psi(a_0)$ (такой элемент существует, поскольку φ и ψ различные наложения). Если $b = \varphi(a_0)$ и $b' = \psi(a_0)$, то отрезок A_{a_0} подобен двум различным отрезкам B_b и $B_{b'}$ множества B. Но тогда эти отрезки должны быть подобны между собой, что, как мы видели, невозможно.

Следующая теорема является основной в теории вполне упорядоченных множеств.

Теорема 5. *Из двух вполне упорядоченных множеств одно подобно другому или отрезку другого.*

Доказательство. Пусть A и B два вполне упорядоченных множества. Условимся говорить, что элемент a множества A есть «нормальный» элемент, если отсекаемый им отрезок A_a подобен какому-нибудь отрезку B_b множества B. Примером нормального элемента может служить первый элемент A.

Легко видеть, что элемент a', предшествующий нормальному элементу a, сам является нормальным. В самом деле, налагая отрезок A_a на подобный ему отрезок B_b, мы очевидно наложим отрезок $A_{a'} = (A_a)_{a'}$ на некоторый отрезок отрезка B_b, т. е. на отрезок множества B.

Обозначим через M множество всех нормальных элементов множества A. Оказывается, что M или совпадает с множеством A или является его отрезком. Действительно, если $M \neq A$, то множество $(A - M)$ не пусто и в нем есть первый элемент m. Покажем, что

$$M = A_m. \tag{2}$$

Если $a \in M$, то $a \neq m$. Но невозможно также, чтобы оказалось $a \succ m$, ибо в этом случае элемент m, предшествуя нормальному элементу a, сам был бы нормальным и входил в M, в то время как $m \overline{\in} M$. Таким образом, необходимо $a \prec m$ и, стало быть, $a \in A_m$. Этим доказано, что $M \subset A_m$.

Обратно, если $a \in A_m$, то $a \prec m$ и, следовательно, a не может входить в $A - M$, так что $a \in M$. Итак, $A_m \subset M$, и (2) доказано.

Теперь назовем $b \in B$ нормальным элементом, если отрезок B_b подобен какому-нибудь отрезку множества A, и пусть N множество всех нормальных элементов B. Аналогично предыдущему, $N = B$ или $N = B_n$.

Покажем теперь, что множества M и N подобны друг другу. Пусть $a \in M$. Тогда отрезок A_a подобен отрезку B_b множества B, причем, очевидно, $b \in N$. Будем считать элементы a и b взаимно соответствующими. Легко видеть, что каждому элементу $a \in M$ в множестве N может соответствовать только один элемент b и обратно (если бы элементу a отвечали два элемента b и b', то отрезки B_b и $B_{b'}$, подобные отрезку A_a, были бы подобны между собой, что невозможно).

Таким образом, у нас установлено взаимно однозначное соответствие между множествами M и N. Остается обнаружить, что это соответствие сохраняет порядок элементов, т. е. есть наложение.

Пусть a и a' два элемента M, b и b' соответствующие им элементы N и $a \prec a'$. Налагая отрезок $A_{a'}$ на подобный ему отрезок $B_{b'}$, мы наложим отрезок $A_a = (A_{a'})_a$ на некоторый отрезок $(B_{b'})_{b_0}$ отрезка $B_{b'}$. Но $(B_{b'})_{b_0} = B_{b_0}$ и, стало быть, отрезок A_a подобен отрезку B_{b_0} множества B. С другой стороны, в множестве B есть только один отрезок, подобный A_a, и это есть B_b. Зна-

чит, $b=b_0$, а так как $b_0 \in B_{b'}$, то $b_0 \prec b'$, т. е. $b \prec b'$, что и доказывает подобие множеств M и N.

Теперь уже легко завершить доказательство. Действительно, из четырех логически мыслимых случаев

$$\begin{array}{llll} 1)\ M=A, & N=B & 3)\ M=A, & N=B_n \\ 2)\ M=A_m, & N=B & 4)\ M=A_m, & N=B_n \end{array}$$

четвертый невозможен, ибо он означал бы, что m нормальный элемент, а тогда было бы $m \in M = A_m$, что противоречит определению отрезка.

Итак, остаются первые три случая. В случае 1) множества A и B подобны, а в случаях 2) и 3) одно из них подобно отрезку другого. Теорема доказана.

Если вполне упорядоченное множество A подобно отрезку вполне упорядоченного множества B, то мы будем говорить, что множество A *короче* множества B.

Теорема 6. *Во всяком множестве S попарно неподобных вполне упорядоченных множеств есть самое короткое.*

Доказательство. Пусть $A \in S$. Если A есть самое короткое из множеств, входящих в S, то теорема доказана. В противном случае в S имеются множества более короткие, чем A, и они подобны некоторым отрезкам A. Пусть $R=\{a\}$ есть множество таких элементов a множества A, что отсекаемые ими отрезки A_a подобны множествам, входящим в S. Если a^* есть первый элемент R и $A^* \in S$ есть множество, подобное отрезку A_{a^*}, то A^* и будет самым коротким из множеств, входящих в S. Действительно, A^* короче всякого множества B, если A пороче B. Если же B короче A, то $B \simeq A_a$, где $a \in R$. Но a^* первый элемент R, так что $a^* \prec a$ и A_{a^*} есть отрезок A_a, откуда ясно, что A^* короче B.

Теорема 7. *Сумма вполне упорядоченного множества вполне упорядоченных множеств есть вполне упорядоченное множество.*

Доказательство. Пусть $S=\sum\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$, причем множества L и A_λ вполне упорядочены. Множество S упорядочено (см. § 1). Пусть S_0 есть непустая часть S. Назовем через L_0, множество таких $\lambda \in L$, что $A_\lambda S_0 \neq 0$ и пусть λ_0 первый элемент L_0. Множество $A_{\lambda_0} S_0$ есть непустая часть A_{λ_0}. Если a_0 первый элемент этого множества, то он является первым и в множестве S_0. Теорема доказана.

§ 3. Порядковые числа

Определение 1. Порядковый тип вполне упорядоченного множества называется *порядковым числом.*

Если порядковое число имеет бесконечную мощность, то оно называется *трансфинитным* числом.

Число 0 и все натуральные числа суть конечные порядковые числа. Числа ω, $\omega+1$ и $\omega+2$ суть трансфинитные числа.

Порядковые типы ω^*, π, η, λ не являются порядковыми числами, ибо это суть типы упорядоченных, но не вполне упорядоченных множеств.

Определение 2. Пусть α и β два порядковых числа. Возьмем два вполне упорядоченных множества A и B, имеющих соответственно типы α и β. Если A короче B, то говорят, что α *меньше* β или что β *больше* α, и пишут $\alpha<\beta$, $\beta>\alpha$.

Это определение зависит только от чисел α и β, но не от множеств A и B. В применении к конечным числам данное определение равносильно обычному, так что

$$0<1<2<3<\dots,$$

а трансфинитные числа оказываются бо́льшими всех конечных.

Весьма важно, что для порядковых чисел имеет место *трихотомия*, т. е. справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Если α и β порядковые числа, то каждое из соотношений $\alpha=\beta$, $\alpha<\beta$, $\alpha>\beta$ исключает остальные и одно из них обязательно выполняется.*

В самом деле, пусть A и B множества типов $\overline{A}=\alpha$, $\overline{B}=\beta$.

Если эти множества подобны, то $\alpha=\beta$. Вместе с тем соотношения $\alpha<\beta$, $\alpha>\beta$ невозможны, ибо если $A\simeq B$, то ни одно из этих множеств не короче другого. Если же множества A и B не подобны, то одно (и только одно) из них обязательно короче другого.

Замечание. *Если B есть часть вполне упорядоченного множества A, то $\overline{B}\leqslant\overline{A}$.*

Действительно, в силу следствия 3, теоремы 3, § 2, соотношение $\overline{B}>\overline{A}$ невозможно.

Теорема 2. *Во всяком множестве S попарно неравных порядковых чисел есть наименьшее число.*

Доказательство. Каждому $\alpha\in S$ можно соотнести вполне упорядоченное множество A типа $\overline{A}=\alpha$. Если A_0 есть самое короткое из этих множеств (теорема 6, § 2), то $\alpha_0=\overline{A}_0$ есть наименьшее из чисел множества S.

Следствие. *Всякое множество порядковых чисел, если его упорядочить по их величине, вполне упорядоченно.*

Условимся обозначать через W_α множество всех порядковых чисел, меньших порядкового числа α. По следствию W_α есть вполне упорядоченное множество.

Теорема 3. *Тип множества W_α есть α:*

$$\overline{W}_\alpha=\alpha.$$

Доказательство. Пусть A множество типа α. Обозначим через H множество всех отрезков множества A. Тогда, по теореме 5, § 1, тип H есть α, и достаточно показать, что H и W_α подобны.

Пусть A_α есть элемент H. Его порядковый тип есть число меньшее α, т. е. элемент W_α. Итак, всякому элементу H отвечает определенный элемент W_α. Разным элементам H при этом отвечают разные элементы W_α, ибо разные элементы H суть разные отрезки множества A, которые не могут сказаться подобными. Наконец, всякий элемент W_α есть порядковое число меньшее α, т. е. являющееся типом некоторого отрезка множества A. Таким образом, соотнося элементам H их порядковые типы, мы устанавливаем взаимно однозначное соответствие между H и W_α.

Но это соответствие есть наложение. Действительно, ведь H упорядочено так, что из двух входящих в него отрезков множества A предшествующим считается тот, который является отрезком другого, т. е. тип которого меньше, а это и означает, что взаимный порядок двух элементов H такой же, как соответствующих им чисел W_α. Теорема доказана.

Следствие. *Если A вполне упорядоченное множество типа α, то его элементы можно перенумеровать порядковыми числами, меньшими α.*

Действительно, осуществив наложение множества A на множество W_α, мы соотнесем каждому элементу A порядковое число, меньше α — его номер. Тогда A расположится в форме последовательности:

$$A=\{a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_\beta,\ \ldots\}\qquad(\beta<\alpha).$$

Отметим, что число 0 входит в W_α, так что первый элемент A именно его и получает в качестве номера. Наконец, нелишним будет напомнить, что наложение A на W_α возможно единственным способом.

С теоремой 3 находится в связи антиномия Бурали-Форти:

Антиномия Бурали-Форти. Пусть W есть множество *всех* порядковых чисел. По следствию теоремы 2 оно вполне упорядочено. Пусть его порядковый тип есть γ. Тогда тот же тип имеет и W_γ. Но W_γ есть отрезок множества W, отсекаемый элементом γ. Значит, множество W и его отрезок W_γ подобны друг другу, что противоречит следствию 1, теоремы 3, § 2.

Эта антиномия показывает, что самое понятие множества *всех* порядковых чисел внутренне противоречиво.

Подобного рода внутренне противоречивые понятия появляются в теории множеств при некритическом употреблении слова «все». Попробуем, например, образовать множество S всех множеств. Тогда S должно и само себя содержать в качестве своего элемента, а это противоречит принятому соглашению [1]), что всегда $A \overline{\in} A$.

Причина появления подобных противоречий заключается в незакономерности попыток рассматривать вещи, находящиеся лишь в процессе своего становления, как нечто уже законченное.

Некоторыми учеными были предложены способы построения теории множеств, позволяющие избежать появления антиномий. При той «наивной» трактовке понятия множества, которая принята в настоящей книге, невозможно войти в подробности по этому поводу. По мнению автора, можно в общих чертах охарактеризовать упомянутые способы как различные виды формализации идеи, заключающейся в том, что элементы всякого множества как бы «предшествуют» понятию самого этого множества, образование же множества означает создание нового математического объекта. Нам представляется, что при последовательном проведении этой идеи антиномии не должны возникать. Например, если проводить указанную идею, то при образовании множества S всех множеств A мы можем говорить лишь о тех множествах A, которые отличны от S, ибо, пока мы не ввели этого S, его просто не было. А тогда на вопрос о том, содержит ли S само себя в качестве своего элемента, надо дать отрицательный ответ, и никаких нарушений правил теории множеств не происходит. [2])

Опыт теории множеств показывает, что в тех случаях, когда все рассматриваемые множества являются подмножествами некоторой заранее данной, вполне определенной, внутренне непротиворечивой [3]) совокупности, никаких абсурдных понятий не возникает. Это наблюдение также представляется нам некоторым подтверждением высказанной точки зрения.

В заключение отметим, что вопрос о допустимости рассмотрения какого-либо множества связан с тем, насколько корректно оно определено, а не с тем, конечно оно или бесконечно: существуют примеры антиномий, возникающих в обстановке, где ни о каких бесконечных множествах нет и речи. Таким образом, проблема антиномий есть в большей степени проблема логическая, чем математическая.

Теорема 4. *Сумма вполне упорядоченного множества S порядковых чисел есть порядковое число.*

Эта теорема следует из определения суммы порядковых типов и теоремы 7, § 2. Само собой разумеется, что S считается «законным» множеством [4]), в частности $S \neq W$.

Теорема 5. *Если $S = \{\alpha\}$ есть множество порядковых чисел, то существуют порядковые числа, большие всех $\alpha \in S$.*

---

[1]) Отказ от этого соглашения ничего не спасает, ибо в этом случае антиномия появится при попытке образовать «множество R всех несамосодержащих множеств». Действительно, любое из предположений $R \in R$, $R \overline{\in} R$ немедленно приводит к своему отрицанию.

[2]) Соглашение о том, что всегда $A \overline{\in} A$, мы также считаем проявлением указанной идеи.

[3]) К сожалению, нет критерия, позволяющего относительно всякого множества решить, является ли оно непротиворечивым понятием. Практика всей совокупности наших математических знаний, по-видимому, дает основания считать, что такие «простые» множества, как множество натуральных чисел, множество вещественных чисел и т. п., представляют собой достаточно «надежные» образования.

[4]) Т. е. таким, рассмотрение которого не приводит ни к каким противоречиям.

Доказательство. Прежде всего отметим, что для всякого порядкового числа α существует большее, например, $\alpha+1$. Поэтому теорема очевидна для такого случая, когда в S есть наибольшее число.

Допустим теперь, что в S нет наибольшего числа. Тогда порядковое число $\sigma = \sum_{\alpha \in S} \alpha$ больше всех чисел из S. При этом мы считаем, что множество слагаемых S упорядочено по их величине, так что оно вполне упорядочено. Чтобы доказать неравенство $\sigma > \alpha$ $(\alpha \in S)$, соотнесем каждому $\alpha \in S$ вполне упорядоченное множество A_α типа $\bar{A}_\alpha = \alpha$. Пусть $B = \sum_{\alpha \in S} A_\alpha$ $(\bar{B} = \sigma)$.

Тогда каждое множество A_α есть часть отрезка B_b, отсекаемого от множества B первым элементом b множества A_{α^*}, где $\alpha^* \in S$ и $\alpha^* > \alpha$. Значит, по следствиям 1 и 3, теоремы 3, § 2, множество B не подобно ни A_α, ни отрезку $A\alpha$, т. е. σ не $= \alpha$ и σ не $< \alpha$, откуда $\sigma > \alpha$.

Теорема 6. *Число $\alpha + 1$ есть первое следующее за числом α.*

Доказательство. Пусть первое следующее за числом α есть β. Тогда $W_\beta = W_\alpha + \{\alpha\}$, откуда по определению суммы порядковых типов $\beta = \bar{W}_\beta = \bar{W}_\alpha + \overline{\{\alpha\}} = \alpha + 1$.

В то время, как всякое число имеет первое следующее, существуют числа, например ω, у которых нет последнего предшествующего. Это дает повод для определения:

Определение 3. Порядковое число называется *числом первого* или *второго рода*, смотря по тому, есть или нет у него непосредственно предшествующее число.

Все конечные числа (кроме 0) суть числа первого рода, таковы же все числа вида $\alpha + 1$, например $\omega + 1$. Напротив ω есть число второго рода.

§ 4. Трансфинитная индукция

Известно, какую важную роль играет в математике метод полной индукции. Напомним его.

Теорема 1. *Пусть $T(n)$ предложение, в формулировку которого входит натуральное число n. Если*

1) $T(n_0)$ истинно,

2) из истинности $T(n)$ следует истинность $T(n+1)$,

то $T(n)$ истинно при всяком $n \geqslant n_0$.

Доказательство. Допустим, что существуют такие натуральные числа $n \geqslant n_0$, что $T(n)$ ложно. Пусть n^* наименьшее из них. В силу 1), необходимо $n^* > n_0$. Тогда $n^* - 1 \geqslant n_0$. Из определения n^* следует, что $T(n^* - 1)$ истинно, но тогда, в силу 2), $T(n^*)$ тоже истинно. Полученное противоречие доказывает теорему.

Читателю ясно, что существование числа n^* гарантируется нам полной упорядоченностью множества всех натуральных чисел[1]). Та же идея лежит в доказательстве следующей теоремы о трансфинитной индукции.

Теорема 2. *Пусть $T(\alpha)$ предложение, в формулировку которого входит порядковое число α. Если*

1) $T(\alpha_0)$ истинно,

2) из истинности $T(\alpha)$ при всех α таких, что $\alpha_0 \leqslant \alpha < \beta$, вытекает истинность $T(\beta)$,

то $T(\alpha)$ истинно для всякого порядкового числа $\alpha \geqslant \alpha_0$.

---

[1]) При строго формальном изложении теории натуральных чисел теорема 1 (или какое-нибудь равносильное ей предложение) обычно принимается за аксиому. По вопросу о том, насколько это обязательно, нет единомыслия [см., напр., А. А. Марков, Теория алгорифмов. Труды Матем. ин-та АН СССР, 42, 1954, стр. 18].

Доказательство. Пусть существуют такие $\alpha \geqslant \alpha_0$, при которых $T(\alpha)$ ложно. Обозначим через α^* наименьшее из них. Тогда $\alpha^* > \alpha_0$ [ибо, в силу 1), $T(\alpha_0)$ истинно] и при всех α, где $\alpha_0 \leqslant \alpha < \alpha^*$, предложение $T(\alpha)$ истинно. Отсюда, в силу 2), и $T(\alpha^*)$ должно быть истинным. Полученное противоречие доказывает теорему.

§ 5. Второй числовой класс

Определение. *Вторым числовым классом*[1] K_0 называется множество всех порядковых чисел, являющихся типами счетных вполне упорядоченных множеств.[2]

Ясно, что все числа второго класса трансфинитны.

Теорема 1. *Число ω является наименьшим числом второго класса и вообще наименьшим трансфинитным числом.*

Доказательство. По определению, ω есть тип множества

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Всякий отрезок этого множества N_n есть конечное множество. Значит, порядковое число, меньшее числа ω, есть конечное число, и потому ω наименьшее трансфинитное число. Поскольку $\omega \in K_0$, теорема доказана.

Теорема 2. 1) *Если α число второго класса, то и $\alpha + 1$ число второго класса.*

2) *Если S счетное множество чисел второго класса и γ есть наименьшее число, большее всех чисел из S, то γ число второго класса.*

Доказательство. Первая часть теоремы почти очевидна. Действительно, $\overline{\alpha+1} = \overline{\overline{W_\alpha + \{\alpha\}}}$, а множество $W_\alpha + \{\alpha\}$ счетно вместе с W_α.

Переходя ко второй части теоремы, мы можем считать, что в S нет наибольшего числа, ибо иначе дело свелось бы к 1). Но легко показать, что в этом предположении будет

$$W_\gamma = \sum_{\alpha \in S} W_\alpha. \qquad (1)$$

В самом деле, если какое-нибудь число входит в правую часть (1), то оно, очевидно, входит и в левую. Обратно, если $\sigma \in W_\gamma$, то σ не может быть больше всех α из S и, следовательно, в S есть число $\alpha_0 \geqslant \sigma$. Но α_0 не наибольшее из чисел S. Значит, в S найдется число $\alpha > \alpha_0$, и тогда $\sigma \in W_\alpha$.

Правая часть (1) есть счетное множество, значит W_γ счетно, и γ, как тип W_γ, входит в K_0.

Следствие. *Класс K_0 несчетен.*

Действительно, иначе первое следующее за K_0 число входило бы в K_0.

Мощность множества K_0 обозначается символом $\aleph_1$ (читается: алеф[3] — один), а первое следующее за K_0 число символом Ω.

Теорема 3. *Не существует мощности, промежуточной между мощностью a счетного множества и $\aleph_1$.*

Доказательство. Множество W_Ω есть сумма счетного множества $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ и K_0. Значит $\overline{\overline{W}}_\Omega = \aleph_1$.

---

[1]) Первый числовой класс есть множество $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

[2]) Вот некоторые соображения, имеющие целью показать, что K_0 есть „законное" множество. Множество R всех рациональных чисел в их естественном порядке, по-видимому, есть законное множество. Но тогда есть основание думать, что законно и множество всех его частей, которые являются упорядоченными множествами и, в частности, законно и множество всех вполне упорядоченных частей R, порядковые типы которых (теорема 4, § 1) и составляют K_0.

[3]) Алеф ($\aleph$) — первая буква еврейского алфавита.

Заметив это, допустим, что существует такая мощность m, что $a < m < \aleph_1$. Тогда из W_Ω выделяется часть Q мощности m. Множество Q не подобно[1]) W_Ω. Значит, Q подобно отрезку W_Ω. Но каждый отрезок W_Ω отсекается числом из N или из K_0, т. е. является конечным или счетным множеством. Поэтому и Q конечно или счетно, а это противоречит допущению, что $\overline{\overline{Q}} > a$.

Теорема 4. *Если $\alpha \in K_0$ есть число второго рода, то существует такая возрастающая последовательность порядковых чисел $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \ldots$, что α есть наименьшее из чисел, больших всех чисел последовательности.*

Доказательство. Перенумеруем (очевидно счетное) множество W_α всех чисел, меньших α: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$

Среди чисел α_k нет наибольшего (ибо иначе α было бы числом первого рода). Заметив это, положим $n_1 = 1$ и обозначим через n_2 наименьшее натуральное число n, при котором $\alpha_n > \alpha_{n_1}$, после чего обозначим через n_3 наименьшее натуральное число n, при котором $\alpha_n > \alpha_{n_2}$ и т. д. В результате мы получаем возрастающую последовательность $\alpha_{n_1} < \alpha_{n_2} < \alpha_{n_3} < \ldots$, причем $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$

Покажем, что это требуемая последовательность. Ясно, что α больше всех чисел последовательности, и, следовательно, остается показать, что ни одно число, меньшее α, не может быть больше всех чисел α_{n_k}.

Пусть $\gamma < \alpha$. Тогда $\gamma \in W_\alpha$ и, стало быть, $\gamma = \alpha_m$. Если m совпадает с одним из n_k, то γ входит в $\{\alpha_{n_k}\}$ и потому не может быть большим всех чисел из $\{\alpha_{n_k}\}$. Если же $n_k < m < n_{k+1}$, то поскольку n_{k+1} есть *наименьшее* из тех n, для которых $\alpha_n > \alpha_{n_k}$, ясно, что $\gamma < \alpha_{n_k}$. Теорема доказана.

Укажем в заключение обозначения для некоторых чисел из K_0. С первым из них мы уже знакомы — это ω. За ним следуют по порядку числа

$$\omega+1,\ \omega+2,\ \ldots,\ \omega+n,\ \ldots \tag{2}$$

Первое число, следующее за числами (2), будет, очевидно, $\omega+\omega$; это число обозначается обычно через $\omega \cdot 2$. За ним следуют числа

$$\omega \cdot 2+1,\ \omega \cdot 2+2,\ \ldots,\ \omega \cdot 2+n,\ \ldots \tag{3}$$

Первое число, следующее за числами (3), есть $\omega \cdot 3$.

Продолжая этот процесс, мы определим все числа вида $\omega \cdot n+m$.

Таких чисел есть счетное множество. Первое следующее за ними число (все еще принадлежащее K_0) обозначается через ω^2. За ним следуют числа

$$\omega^2+1,\ \omega^2+2,\ \ldots,\ \omega^2+n\ \ldots,$$

за ними идет число $\omega^2+\omega$, а затем числа

$$\omega^2+\omega+1,\ \omega^2+\omega+2,\ \ldots,\ \omega^2+\omega+n,\ \ldots$$

За этими числами идет число $\omega^2+\omega \cdot 2$, а потом числа $\omega^2+\omega \cdot 2+n$.

Первое следующее за числами этого вида есть число $\omega^2+\omega \cdot 3$. Подобным образом строятся числа вида $\omega^2+\omega \cdot n+m$.

Первое следующее за ними число есть $\omega^2 \cdot 2$, после чего вводятся последовательно числа

$$\omega^2 \cdot 2+\omega \cdot n+m.$$

За этими числами идет $\omega^2 \cdot 3$. Этот процесс приводит нас к числам

$$\omega^2 \cdot n+\omega \cdot m+l.$$

---

[1]) Ибо Q даже не эквивалентно W_Ω.

Первое следующее за ними число обозначается через ω^3. За ним пойдут числа

$$\omega^3+\omega^2\cdot n+\omega\cdot m+l,$$

а за ними $\omega^3\cdot 2$.

Продолжая этот процесс, мы определим числа ω^4, ω^5, ... и все «многочлены» вида

$$\omega^k\cdot n+\omega^{k-1}\cdot n_1+\ldots+\omega\cdot n_{k-1}+n_k. \qquad (4)$$

За этими числами идет число ω^ω, все еще входящее в K_0 [ибо чисел (4) счетное множество].

За ω^ω пойдет $\omega^\omega+1$, и весь процесс повторится сначала, что приведет нас к числу $\omega^\omega\cdot 2$. Потом новое повторение процесса, и мы приходим к $\omega^\omega\cdot 3$. Таким образом, мы построим все числа вида $\omega^\omega\cdot n$. За ними следует число $\omega^{\omega+1}$. Потом проделывается повторение всего процесса сначала и повторяется число $\omega^{\omega+1}\cdot 2$. Так будут введены числа $\omega^{\omega+1}\cdot n$, а за ними пойдет $\omega^{\omega+2}$.

Этим способом будут введены числа $\omega^{\omega+n}$, а за ними появится число $\omega^{\omega\cdot 2}$. За этим числом следуют $\omega^{\omega\cdot 2}+1$, $\omega^{\omega\cdot 2}+2$, ..., и все появляется сначала, что приводит к числу $\omega^{\omega\cdot 2}\cdot 2$.

Определив числа $\omega^{\omega\cdot 2}\cdot n$, первое следующее за ними мы назовем через $\omega^{\omega\cdot 2+1}$. Подобным образом строятся дальше и дальше числа

$$\omega^{\omega\cdot 2+n},\ \omega^{\omega\cdot 3},\ \omega^{\omega\cdot 3+n},\ \omega^{\omega\cdot 4},\ \ldots,\ \omega^{\omega\cdot n},\ \ldots$$

и за ними пойдет число ω^{ω^2}.

Так же вводятся числа ω^{ω^3}, ω^{ω^4}, ..., ω^{ω^ω}, ...

Число первое, следующее за числами вида $\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^\omega}}}}$, обозначается через ε. За ними следуют $\varepsilon+1$, $\varepsilon+2$, ... и так далее. Заметим, однако, что для **всех** чисел из K_0 мы все же не получаем обозначений, ибо этими обозначениями охватывается только счетное множество чисел.

§ 6. Алефы

Определение. Мощность вполне упорядоченного множества называется *алефом*.

Все натуральные числа (рассматриваемые как мощности) суть алефы. Алефы бесконечных множеств называются *трансфинитными* алефами.

Теорема 1. *Всякие два алефа сравнимы.*

Доказательство. Пусть a и b два алефа. Возьмем вполне упорядоченные множества A и B, для которых $\overline{\overline{A}}=a$, $\overline{\overline{B}}=b$.

Если эти множества эквивалентны, то $a=b$. В противном случае они и не подобны. Но тогда одно из них короче другого. Легко видеть, что если A короче B, то $a<b$.

Теорема доказана. Ее можно формулировать и так: если a и b алефы, то из трех (попарно несовместных) соотношений $a=b$, $a<b$, $a>b$ одно обязательно выполняется, т. е. для алефов имеет место трихотомия.

Теорема 2. *Пусть α и β порядковые числа, а $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ их алефы. Тогда*

1) *если $\overline{\alpha}<\overline{\beta}$, то $\alpha<\beta$;*

2) *если $\alpha<\beta$, то $\overline{\alpha}\leqslant\overline{\beta}$.*

Доказательство. Вторая часть теоремы есть следствие первой. Чтобы доказать первую часть, возьмем вполне упорядоченные множества A и B типов α и β. Они не подобны, ибо их алефы не равны и они даже не эквивалентны. Если бы B оказалось короче A, то это означало бы, что, вопреки условию, $\overline{\beta}=\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}=\overline{\alpha}$.

Значит, A короче B, но это и значит, что $\alpha<\beta$.

Легко видеть, что во второй части теоремы знак равенства откинуть нельзя, например $\omega<\omega+1$, но $\overline{\omega}=\overline{\omega+1}$.

Теорема 3. Во всяком множестве Q попарно неравных алефов есть наименьший.

В самом деле, приведя в соответствие каждому алефу из Q вполне упорядоченное множество, имеющее этот алеф своей мощностью, мы можем гарантировать наличие среди этих множеств самого короткого. Его алеф и будет наименьшим в Q.

Следствие. *Всякое множество алефов, будучи упорядочено по их величине, окажется вполне упорядоченным.*

Само собою разумеется, что речь идет о „законном" множестве алефов. Множество всех алефов рассматривать нельзя. Это видно из следующей теоремы:

Теорема 4. 1) *Нет наибольшего алефа.*

2) *Какое бы множество Q алефов ни взять, существуют алефы, большие всех алефов из Q.*

Доказательство. Пусть a есть алеф. Это значит, что существует вполне упорядоченное множество A, мощностью которого является a. Рассмотрим наряду с A все вполне упорядоченные множества, состоящие из тех же элементов, но отвечающие другим способам упорядочивания. Порядковые типы этих множеств образуют некоторое множество T порядковых чисел.

Пусть β есть число, большее всех чисел из T, и $b=\overline{\beta}$. Тогда b есть алеф, и можно показать, что

$$b > a. \qquad (1)$$

В самом деле, если $\alpha=\overline{A}$, то $\alpha \in T$ и $\alpha < \beta$. Но тогда $a \leqslant b$, и остается опровергнуть возможность равенства

$$b = a. \qquad (2)$$

Допустим, что это равенство справедливо. Тогда можно установить взаимнооднозначное соответствие φ между A и W_β. Пусть A_0 есть множество, состоящее из тех же элементов, что и A, но упорядоченное так, что из двух его элементов предшествует тот, которому в соответствии φ отвечает меньшее число. Множество A_0 подобно W_β, значит его тип есть β и $\beta \in T$, что противоречит определению β. Итак, (2) невозможно, и справедливо (1).

Переходя к доказательству второй части теоремы, очевидно можно допустить, что в Q нет наибольшего алефа, и что алефы Q попарно не равны. Соотнесем каждому алефу из Q вполне упорядоченное множество A, имеющее его своей мощностью, и составим сумму S этих множеств, считая множество слагаемых упорядоченным так же, как упорядочено Q. Но Q вполне упорядочено. Поэтому S, будучи суммой вполне упорядоченного множества вполне упорядоченных множеств, само вполне упорядочено, и его мощность есть алеф. Ясно, что этот алеф больше всех алефов из Q. Действительно, всякий алеф из Q есть мощность части S и, значит, не больше, чем $\overline{\overline{S}}$, но если бы какой-нибудь из алефов Q совпал с $\overline{\overline{S}}$, то он оказался бы наибольшим в Q.

Замечание. *Для всякого алефа есть непосредственно следующий алеф.* Действительно, если a есть некоторый алеф, то существует больший алеф b. Если b непосредственно следует за a, наше утверждение доказано. В противном случае мы рассмотрим все[1]) алефы m, для которых $a < m < b$, среди них есть наименьший, который и является искомым.

Это замечание позволяет установить для алефов рациональную систему обозначений. Именно, обозначим через $\aleph_0$ мощность счетного множества

---

[1]) Употребление здесь слова „все" представляется допустимым по следующим основаниям: если b существует, то существует (законное) множество B мощности b. Его части образуют законное множество, и, в частности, законным окажется множество тех частей B, мощность m которых удовлетворяет неравенству $a < m < b$.

(ясно, что эта мощность есть алеф). Первый следующий алеф обозначается через[1]) $\aleph_1$, первый следующий за ним через $\aleph_2$ и т. д. Алеф первый, следующий за всеми алефами $\aleph_n$, обозначается через $\aleph_\omega$ и т. д.

Теорема 5. *Всякий алеф получает обозначение $\aleph_\alpha$, где α порядковое число.*

Доказательство. Пусть H есть алеф и T множество, состоящее из всех алефов, меньших H. Множество T вполне упорядочено. Пусть его тип есть α. Налагая T на W_α, мы соотнесем каждому алефу из T порядковый номер, меньший α, после чего остается обозначить H через $\aleph_\alpha$.

Нетрудно убедиться, что установленная система обозначений такова, что:

1) $\aleph_{\alpha+1}$ есть первый, следующий за $\aleph_\alpha$;

2) если число β есть первое следующее за числами множества $S=\{\alpha\}$, то $\aleph_\beta$ есть первый алеф, следующий за всеми алефами множества $\{\aleph_\alpha\}$ $(\alpha \in S)$.

Множество K_α всех порядковых чисел, имеющих данную мощность $\aleph_\alpha$, называется *числовым классом*. Наименьшее из чисел класса K_α обосначается обычно через Ω_α. В частности, $\Omega_0=\omega$, $\Omega_1=\Omega$. Класс K_1 есть третий числовой класс.

§ 7. Аксиома и теорема Цермело

Во многих математических рассуждениях используется следующее предложение:

Аксиома Цермело. *Пусть $S=\{M\}$ есть множество непустых и попарно не пересекающихся множеств. Тогда существует множество L, обладающее свойствами*:

1) $L \subset \sum\limits_{M \in S} M$;

2) *множество L имеет с каждым из множеств $M \in S$ один и только один общий элемент.*

Можно сказать, что L состоит из „представителей" всех множеств $M \in S$.

Вопрос о том, допустима ли эта аксиома, вызвал среди математиков ожесточенные споры и до сих пор по этому вопросу единомыслия нет. Автор этой книги стоит на позиции безоговорочного признания аксиомы Цермело. В частности, мы много раз ею уже пользовались в предыдущих главах. Так, например, вполне очевидным было ее использование в гл. III при построении примера неизмеримого множества. Но и раньше мы также пользовались аксиомой Цермело. Существование в каждом бесконечном множестве счетной части или измеримость (ограниченной) суммы счетного множества измеримых множеств — эти результаты были установлены нами с помощью аксиомы Цермело.[2])

Например, доказывая теорему 5 из § 3 гл. III, мы рассуждали так: для каждого множества E_k есть целое семейство накрывающих открытых множеств G_k. Чтобы образовать их сумму $\sum G_k$, использованную в обсуждаемой теореме, мы, очевидно, должны были из этого семейства выбрать какое-то одно множество G_k для каждого k, причем этот выбор надо произвести для всех k сразу. Возможность такого выбора можно обосновать только ссылкой на аксиому Цермело. Так же обстоит дело и в первом из упомянутых случаев.

---

[1]) Выше мы определили $\aleph_1$ как мощность второго числового класса K_0. Тождественность обоих определений вытекает из теоремы 3, § 5.

[2]) По поводу аксиомы Цермело рекомендуем прочесть:

В. К. Серпинский, Аксиома Цермело, Журн. „Математ. сборник", т. 31, в. 1, 1921; В. Молодший, Эффективизм в математике, Соцэкгиз, 1938; А. Лебег, Интегрирование и отыскание примитивных функций (Прибавление III, § 2). ГТТИ, 1934.

Конечно, аксиому Цермело не нужно понимать так, что мы фактически[1]) сможем построить множество L. Речь идет лишь о возможности рассуждать об этом множестве, не рискуя впасть в противоречие.

С аксиомой Цермело тесно связана следующая теорема.

Теорема 1 (Общий принцип выбора). *Пусть $T=\{N\}$ есть множество непустых множеств. Тогда существует функция $f(N)$, заданная на T и ставящая в соответствие каждому множеству N из T определенный элемент этого множества: $f(N) \in N$.*

Прежде чем доказывать эту теорему, отметим, что в том случае, когда множества N попарно не пересекаются, теорема равносильна аксиоме Цермело. Действительно, приняв аксиому Цермело, мы сразу получаем требуемую функцию, полагая $f(N)=NL$.

Обратно, принимая теорему 1, мы получаем множество L, полагая $L=\{f(N)\}$.

Перейдем к доказательству теоремы. Обозначая элементы множеств N, входящих в T, через n, рассмотрим все пары вида

$$(n,\ N), \qquad \text{где} \qquad n \in N, \text{ а } N \in T.$$

При этом пары (n', N') и (n'', N'') мы будем считать тождественными тогда и только тогда, когда

$$n'=n'', \qquad N'=N''.$$

Обозначим через $M(N_0)$ множество всех пар (n, N_0), в которых $n \in N_0$; такое множество $M(N)$ можно построить для каждого $N \in T$. Пусть

$$S=\{M(N)\} \qquad (N \in T).$$

Различные множества $M(N)$ попарно не пересекаются (в этом идея рассуждения). Действительно, то обстоятельство, что множества $M(N')$ и $M(N'')$ различны, означает, что различны множества N' и N''. Но тогда ни одна пара (n, N') не совпадает ни с одной парой (n, N'') и, стало быть,

$$M(N') \cdot M(N'')=0.$$

Применяя аксиому Цермело, мы можем констатировать существование множества L, состоящего из пар (n, N), где $n \in N$, и имеющего с каждым $M(N) \in S$ по одному общему элементу. Это множество позволяет определить требуемую функцию. Именно, если $N_0 \in T$, то множество $M(N_0)L$ состоит из единственного элемента (n_0, N_0), где $n_0 \in N_0$.

Положив $f(N_0)=n_0$, мы удовлетворим условиям теоремы.

Следствие. *Пусть $T=\{M'\}$ есть множество всех непустых частей данного непустого множества M. Тогда существует такая функция $f(M')$, которая каждому $M' \in T$ ставит в соответствие определенный элемент $m \in M'$.*

Если элемент $m=f(M')$ мы будем называть „отмеченным“ в M', то следствие утверждает, что в каждом $M' \subset M$ можно отметить по одному элементу.[2])

Теорема 2 (Э. Цермело). *Всякое множество можно вполне упорядочить.*

Доказательство. Пусть M некоторое непустое[3]) множество. Обозначим через $T=\{M'\}$ множество всех непустых частей M и «отметим» в каждом M' по элементу.

---

[1]) С этим и связаны упомянутые выше споры: если множество L не построено, то ни про одну вещь нельзя решить, входит ли она в L как элемент или нет. Поэтому некоторые ученые вообще не соглашаются считать L за математический объект.

[2]) Сама теорема 1 также означает, что в каждом множестве $N \in T$ можно „отметить“ по элементу [каковым и является $f(N)$].

[3]) Для пустого множества теорема тривиальна.

Некоторые части M можно вполне упорядочить. Таковы, например, все конечные части M. Пусть A непустая часть M, вполне упорядоченная каким-нибудь способом. Если:

(Н) | *для каждого $a \in A$ в части $M - A_\alpha$ множества M (где A_α отрезок, отсекаемый от A элементом a) отмеченным элементом служит a*

то мы будем говорить, что A *правильно упорядоченная* часть M.

Условившись обозначать элемент, отмеченный в M', через $f(M')$, условие (Н) можно записать так:

$$f(M - A_\alpha) = a \qquad \text{(при всех } a \in A).$$

Убедимся, что правильно упорядоченные части M существуют. Действительно, если m_1 есть элемент, отмеченный в самом множестве M, и M_1 есть часть, состоящая только из этого элемента, то M_1 есть правильно упорядоченная часть, ибо ее единственный отрезок есть пустое множество и

$$f[M - (M_1)_{m_1}] = m_1.$$

Далее, если в множестве $M - M_1$ отмеченным является элемент m_2, то упорядоченная пара $\{m_1, m_2\}$ есть правильно упорядоченная часть M.

В каждой правильно упорядоченной части A первым элементом обязательно является элемент m_1, отмеченный в самом множестве M. В самом деле, если a первый элемент A, то $a = f(M - A_\alpha) = f(M) = m_1$.

Нетрудно показать, что часть A множества M может допускать только один способ правильного упорядочивания. Действительно, допустим, что существуют два способа φ и ψ упорядочивания части A, в результате каждого из которых она становится правильно упорядоченной. Обозначим через P и Q те правильно упорядоченные части, в которые превращается A при упорядочиваниях φ и ψ.

Одно из этих множеств (пусть это будет P) подобно другому или его отрезку. Наложим P на Q (или на его отрезок). Элемент $m_1 \in P$ налагается при этом сам на себя. Если бы в P были элементы, которые не налагались бы сами на себя, то один из них был бы первым. Пусть таким оказывается элемент p, налагающийся на элемент $q \neq p$. Все элементы, предшествующие p, налагаются сами на себя. Это значит, что $P_p = Q_q$.

Однако отсюда следует, что $p = f(M - P_p) = f(M - Q_q) = q$, а это противоречит определению p. Итак, все элементы налагаются сами на себя, что означает полную тождественность P и Q.

Таким образом, если непустая часть A множества M вообще допускает правильное упорядочивание, то только одно. Будем считать, что каждая часть, которая может быть правильно упорядочена, уже сделана такой, и будем называть ее в этом предположении *нормальной*.

Из двух различных нормальных частей одна есть отрезок другой. Действительно, если A и B нормальные части, то одна (пусть это будет A) подобна другой или ее отрезку. Налагая A на B (или на отрезок B), мы, как и выше, убедимся, что каждый элемент A налагается сам на себя. Если бы A и B были подобны, то они совпадали бы. Значит, A есть отрезок B.

Из этого предложения непосредственно следует, что если два элемента множества M входят в несколько нормальных частей, то их взаимный порядок во всех этих частях одинаков.

Заметив это, обозначим через L множество тех элементов M, которые входят хоть в одну нормальную часть. Множество L можно сделать упорядоченным. Действительно, пусть a и b два элемента из L. Тогда существуют нормальные части A и B, такие, что $a \in A$, $b \in B$. Но одна из этих частей наверное содержится в другой. Значит, оба элемента a и b входят в одну и ту же нормальную часть. В этой части один из них предшествует другому,

причем, если $a \prec b$, то этот же взаимный порядок они имеют и во всякой нормальной части, содержащей их обоих. Мы условимся считать, что и в L взаимный порядок этих элементов тот же, что и в содержащих их нормальных частях.

Итак, множество L упорядочено. Но легко убедиться, что оно и вполне упорядочено. В самом деле, пусть L^* непустая часть L. Возьмем в L^* произвольный элемент a. Если он не является первым в L^*, то все предшествующие ему элементы L^* входят во всякую нормальную часть, в которую входит и a. Пусть A такая часть. Она вполне упорядочена, и пересечение AL^* имеет первый элемент. Этот элемент является первым в L^*.

Мы установили, что L есть вполне упорядоченная часть M. Покажем, что она правильно упорядочена. Пусть $a \in L$. Тогда найдется нормальная часть A, содержащая этот элемент. Вполне очевидно, что

$$L_a = A_a, \quad \text{откуда} \quad f(M - L_a) = f(M - A_a) = a,$$

и L правильно упорядочено.

Доказательство почти закончено. Именно, нетрудно установить, что $L = M$.

Действительно, пусть это не так, и пусть a есть отмеченный в множестве $M - L$ элемент. Составим множество $A = L + \{a\}$, считая a следующим за всеми элементами L. Ясно, что это множество есть нормальная часть M. Но тогда a должен входить в L, в то время как $a \in M - L$.

Значит, действительно, $L = M$ и M вполне упорядочено. Теорема доказана.

Следствия. 1. *Всякая мощность есть алеф.*

2. *Всякие две мощности сравнимы*, т. е. для мощностей имеет место трихотомия.

Из первого следствия вытекает, что мощность континуума c есть алеф

$$c = \aleph_\alpha.$$

Нахождение этого α составляет еще нерешенную *проблему континуума*. *Гипотеза континуума*, о которой шла речь в главе I, состоит в том, что $\alpha = 1$. Немецким ученым Кёнигом доказано[1]) только, что $\alpha \neq \omega$. Заметим, что сравнимость c с $\aleph_1$ и неравенство $c \geqslant \aleph_1$ вытекают из теоремы 4, § 1 без теоремы Цермело.[2])

---

[1]) См. И. И. Жегалкин, Трансфинитные числа. Москва, 1907, стр. 337.

[2]) В самом деле, в упомянутой теореме мы установили, что из множества всех рациональных чисел R можно выбрать $\aleph_1$ различных упорядоченных подмножеств. Но так как всех вообще подмножеств R имеется c, то $\aleph_1 \leqslant c$.

ГЛАВА XV

КЛАССИФИКАЦИЯ БЭРА

§ 1. Классы Бэра

Рассмотрим множество всех **непрерывных** функций, заданных на некотором фиксированном сегменте $[a, b]$, и назовем это множество *нулевым* классом функций. Если функция $f(x)$, заданная на сегменте $[a, b]$, не входит в нулевой класс, но представима в форме

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \tag{1}$$

где все функции $f_n(x)$ непрерывны, то $f(x)$ называется функцией *первого* класса.

Точно так же функция $f(x)$, не входящая ни в нулевой, ни в первый классы, но представимая в форме (1), где все функции $f_n(x)$ входят в первый класс, называется функцией *второго* класса.

Вообще функцией класса m называется функция, не входящая ни в один из предыдущих классов, но являющаяся пределом последовательности функций класса $m-1$.

Таким образом определяются все классы функций с конечными номерами. Обозначим их через

$$H_0, H_1, \ldots, H_m, \ldots \tag{2}$$

Однако эту классификацию можно продолжать и дальше. Именно, пусть $f(x)$, не входя ни в один из классов (2), представима в форме (1), где каждая из функций $f_n(x)$ входит в какой-нибудь из классов H_{m_n}. Тогда говорят, что эта функция есть функция класса H_ω.

Функция, не входящая ни в один из классов H_m, ни в класс H_ω, но являющаяся пределом последовательности функций класса H_ω, называется функцией класса $H_{\omega+1}$.

Пусть α порядковое число второго числового класса. Допустим, что нами уже определены все классы H_β, где $\beta < \alpha$.

Тогда класс H_α определяется, как множество функций, не входящих ни в один из классов H_β $(\beta < \alpha)$, но представимых в форме (1), где каждая из $f_n(x)$ принадлежит какому-нибудь классу H_{β_n} $(\beta_n < \alpha)$.

Эта классификация называется *классификацией Бэра*, а функции всех классов H_α $(\alpha < \Omega)$ называются *функциями Бэра*.

Легко понять, что номерами классов H_α могут служить только числа первого или второго числового класса и, в частности, нельзя этим способом определить класс H_Ω. Действительно, какую бы счетную последовательность $\{f_n(x)\}$ функций Бэра ни взять, каждая из них попадет в какой-то класс H_{α_n} при $\alpha_n < \Omega$

$$f_n(x) \in H_{\alpha_n} \qquad (\alpha_n < \Omega).$$

Но тогда существует число γ, большее всех чисел α_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ и все еще входящее во второй класс. Значит, если последовательность $f_n(x)$

сходится к какой-нибудь функции $f(x)$, то последняя входит в класс с номером, никак не большим числа γ.

Далее, нетрудно показать, что если α есть число первого рода, т. е. $\alpha=\beta+1$, то всякая функция $f(x)\in H_\alpha$ представима в форме (1), где все $f_n(x)$ входят в класс H_β. В самом деле, если бы среди функций $f_n(x)$ было бесконечное множество функций, входящих в классы H_γ при $\gamma<\beta$, то и сама $f(x)$ входила бы в H_β или в класс с еще меньшим номером. Поэтому все функции $f_n(x)$, начиная с некоторой, войдут в H_β.

Если же $f(x)\in H_\alpha$, где α число второго рода, то $f(x)$ допускает представление (1), в котором

$$f_n(x)\in H_{\beta_n} \qquad (\beta_1<\beta_2<\beta_3<\ldots<\alpha). \tag{3}$$

Действительно, пусть $f_1(x)\in H_{\beta_1}$. Среди функций $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... обязательно найдется такая, которая принадлежит классу H_{β_2} с $\beta_2>\beta_1$ (иначе $f(x)\in H_{\beta_1+1}$). Продолжая этот процесс, мы выделим из $\{f_n(x)\}$ подпоследовательность, удовлетворяющую (3).

Теорема 1. *Все функции Бэра измеримы.* [1])

Это предложение вытекает из того, что измеримы непрерывные функции, а предельные переходы не выводят из класса измеримых функций.

Обратное утверждение не верно, как показывает

Теорема 2. *Множество всех функций Бэра имеет мощность c.*

Доказательство. Мощность множества всех непрерывных функций есть c. Значит, в классе H_0 есть c функций. Докажем, что при всяком α будет

$$\overline{\overline{H}}_\alpha\leqslant c. \tag{4}$$

Для $\alpha=0$ это верно. Допустим, что (4) доказано для всех $\alpha<\beta$, где β некоторое число 1-го или 2-го класса, и покажем, что и для $\alpha=\beta$ справедливо (4).

С этой целью положим $T_\beta=\sum\limits_{\xi<\beta} H_\xi$.

Каждое из H_ξ имеет мощность, не превосходящую c, а слагаемых в рассматриваемой сумме конечное или счетное множество. Значит, $\overline{\overline{T}}_\beta\leqslant c$. С другой стороны, $H_0\subset T_\beta$, откуда $\overline{\overline{T}}\geqslant c$ и, стало быть,

$$\overline{\overline{T}}_\beta=c. \tag{5}$$

Заметив это, рассмотрим множество

$$M=\{(f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots)\}$$

всевозможных последовательностей функций, взятых из множества T_β. Элементы множества M определяются счетным множеством параметров, каждый из которых принимает, согласно (5), c значений. Поэтому (гл. I, § 4, теорема 7) мощность M равна c.

Но всякой функции $f(x)$ из H_β можно соотнести определенный элемент M, а именно тот, для которого $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$.

Значит, H_β эквивалентно части M и (4) для $\alpha=\beta$ доказано. По теореме о трансфинитной индукции (4) доказано для всех $\alpha<\Omega$.

Теперь уже легко докончить доказательство. Именно, если T есть множество всех функций Бэра, то $T=\sum\limits_{\alpha<\Omega} H_\alpha$.

---

[1]) Более того, можно показать, что для того, чтобы $f(x)$, заданная на $[a, b]$, была функцией Бэра, необходимо и достаточно, чтобы она была измеримой (B).

Каждое слагаемое имеет мощность, не большую, чем c, а множество слагаемых имеет мощность $\aleph_1$, также не большую c, откуда и $\overline{\overline{T}} \leqslant c$. Но так как $\overline{\overline{T}} \geqslant \overline{\overline{H}}_0 = c$, то $\overline{\overline{T}} = c$, и теорема доказана.

Пусть A и B суть два вещественных числа, причем $A < B$. Условимся символом $[x]_A^B$ обозначать следующую функцию от x:

$$[x]_A^B = \begin{cases} B \text{ если } x > B, \\ x \text{ если } A \leqslant x \leqslant B, \\ A \text{ если } x < A. \end{cases}$$

Лемма 1. *Если*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = l, \quad \textit{то} \quad \lim_{n \to \infty} [x_n]_A^B = [l]_A^B.$$

Доказательство. Пусть сначала $l \neq A$ и $l \neq B$, например $A < l < B$. Тогда для достаточно больших n окажется, что $A < x_n < B$, так что

$$[x_n]_A^B = x_n \to l = [l]_A^B.$$

Аналогично исчерпываются случаи $l < A$ и $l > B$.

Допустим теперь, что $l = B$. Взяв произвольное $\varepsilon > 0$, мы найдем такое N, что при $n > N$ будет $x_n > B - \varepsilon$, $x_n > A$.

Пусть $n > N$. Справедливо одно из двух: или $x_n \leqslant B$, и тогда $[x_n]_A^B = x_n$, или же $x_n > B$, и тогда $[x_n]_A^B = B$. В обоих случаях будет

$$B - \varepsilon < [x_n]_A^B \leqslant B, \quad \text{откуда} \quad \lim_{n \to \infty} [x_n]_A^B = B.$$

Для $l = A$ рассуждение аналогично.

Следствия. 1. *Если $f(x)$ непрерывная функция, то и $[f(x)]_A^B$ есть непрерывная функция.*

2. *Если $f(x)$ есть функция класса с номером $\leqslant \alpha$, то и $[f(x)]_A^B$ есть функция класса с номером $\leqslant \alpha$.*

3. *Если $f(x) \in H_\alpha$ и $A \leqslant f(x) \leqslant B$, то $f(x)$ представима в форме предела последовательности функций $f_n(x)$, каждая из которых входит в класс H_{α_n} ($\alpha_n < \alpha$) и удовлетворяет неравенству $A \leqslant f_n(x) \leqslant B$.*

Первое и третье следствия очевидны второе доказывается методом трансфинитной индукции.

Лемма 2. *Если*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = l, \quad \textit{то и} \quad \lim_{n \to \infty} [x_n]_{-n}^{n} = 1.$$

Доказательство предоставляем читателю.

Следствие. *Всякая функция $f(x)$ класса H_α представима в форме*

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x),$$

где $f_n(x)$ суть ограниченные функции классов H_β при $\beta < \alpha$.

Тем более функции $f_n(x)$ можно считать конечными.

Теорема 3. *Сумма, разность и произведение двух конечных функций классов $\leqslant \alpha$ есть функция класса $\leqslant \alpha$. То же верно и для частного, если функция-делитель не обращается в 0.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ конечные функции, каждая из которых входит в некоторый класс с номером $\leqslant \alpha$, и пусть

$$s(x) = f(x) + g(x).$$

Покажем, что и $s(x)$ есть функция класса $\leqslant \alpha$. Если $\alpha = 0$, то это утверждение тривиально. Допустим, что оно уже доказано для всех $\alpha < \lambda$, и покажем, что оно верно и при $\alpha = \lambda$.

С этой целью построим две последовательности конечных функций $\{f_n(x)\}$ и $\{g_n(x)\}$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x), \quad \lim_{n\to\infty} g_n(x)=g(x)$$

и

$$f_n(x)\in H_{\beta_n}, \quad g_n(x)\in H_{\gamma_n} \qquad (\beta_n<\lambda, \quad \gamma_n<\lambda).$$

Положим $s_n(x)=f_n(x)+g_n(x)$.

Тогда, по допущению, $s_n(x)\in H_{\lambda_n}$, где λ_n не превосходит большего из чисел β_n и γ_n и, стало быть, $\lambda_n<\lambda$. Но $\lim s_n(x)=s(x)$, откуда ясно, что $s(x)$ входит в класс с номером $\leqslant\lambda$.

Для разности и произведения рассуждение вполне аналогично, а для частного нужно привлечь функцию

$$\frac{f_n(x)\,g_n(x)}{g_n^2(x)+\frac{1}{n}}.$$

Лемма 3. *Пусть дан числовой сходящийся положительный ряд*

$$A_1+A_2+A_3+\ldots$$

Если каждая из функций $\{f_k(x)\}$ есть функция класса $\leqslant\alpha$ $(\alpha>0)$ и удовлетворяет неравенству

$$|f_k(x)|\leqslant A_k \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

то сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ есть функция класса $\leqslant\alpha$.

Доказательство. Каждую из функций $f_k(x)$ можно представить в форме $f_k(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n^{(k)}(x)$, где $\varphi_n^{(k)}(x)$ входит в класс с номером, *меньшим* α, и $\left|\varphi_n^{(k)}(x)\right|\leqslant A_k \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

Положим $\Phi_n(x)=\varphi_n^{(1)}(x)+\varphi_n^{(2)}(x)+\ldots+\varphi_n^{(n)}(x)$. Эта функция входит в класс с номером $<\alpha$, и для доказательства леммы достаточно обнаружить, что, обозначив сумму ряда $\sum f_k(x)$ через $f(x)$, мы будем иметь $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n(x)$.

С этой целью возьмем $\varepsilon>0$ и найдем такое m, что

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} A_k<\varepsilon.$$

Тогда

$$\left|\sum_{k=m+1}^{\infty} f_k(x)\right|<\varepsilon, \quad \left|\sum_{k=m+1}^{n}\varphi_n^{(k)}(x)\right|<\varepsilon \quad (n>m),$$

а поэтому

$$|f(x)-\Phi_n(x)|<\sum_{k=1}^{m}\left|f_k(x)-\varphi_n^{(k)}(x)\right|+2\varepsilon.$$

Но при каждом фиксированном x разность $f_k(x)-\varphi_n^{(k)}(x)$ с возрастанием n стремится к нулю. Поэтому для $n>N(x)$ будет

$$|f(x)-\Phi_n(x)|<3\varepsilon,$$

что и доказывает лемму.

Теорема 4. *Предел равномерно сходящейся последовательности функций классов $\leqslant\alpha$ есть функция класса $\leqslant\alpha$.*

Доказательство. Для $\alpha=0$ теорема тривиальна. Рассмотрим случай, когда $\alpha>0$. Пусть

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

где класс каждой из функций $f_n(x)$ не выше α, а предельный переход осуществляется равномерно относительно x.

Выберем последовательность индексов $n_1<n_2<n_3<\ldots$ так, чтобы оказалось

$$|f_{n_k}(x)-f(x)|<\frac{1}{2^k} \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

Тогда члены ряда

$$[f_{n_2}(x)-f_{n_1}(x)]+[f_{n_3}(x)-f_{n_2}(x)]+[f_{n_4}(x)-f_{n_3}(x)]+\ldots \tag{6}$$

не превосходят членов сходящегося положительного ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots,$$

а потому, в силу леммы, сумма ряда (6), очевидно равная

$$f(x)-f_{n_1}(x), \tag{7}$$

есть функция класса не выше α. Вместе с разностью (7) и функция $f(x)$ входит в класс с номером $\leqslant\alpha$.

Вообще говоря, операция предельного перехода приводит к функции более высокого класса, чем классы, к которым принадлежат функции последовательности. Мы видели, что условие равномерности стремления достаточно, (чтобы повышения класса не происходило. Б. М. Гагаев[1]) нашел необходимые и достаточные условия, которые надлежит наложить на функции последовательности, чтобы класс предельной функции был не выше класса, содержащего функции последовательности.

Теорема 5. *Пусть $f(x)$ функция не выше β-го класса, а $\varphi(t)$ функция не выше α-го класса, значения которой падают в сегмент $[a, b]$, где определена $f(x)$. Тогда сложная функция $f[\varphi(t)]$ есть функция класса $\leqslant\alpha+\beta$.*

Доказательство. Пусть $\beta=0$, т. е. $f(x)$ непрерывна. Покажем, что функция $f[\varphi(t)]$ будет класса $\leqslant\alpha$, если $\varphi(t)$ класса $\leqslant\alpha$.

Для $\alpha=0$ это предложение тривиально. Если оно уже доказано для всех $\alpha<\gamma$ и $\varphi(t)\in H_\gamma$, то $\varphi(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t)$, где $\varphi_n(t)$ входит в класс H_{γ_n} $(\gamma_n<\gamma)$ и можно считать, что $a\leqslant\varphi_n(t)\leqslant b$.

Но тогда, в силу непрерывности $f(x)$,

$$f[\varphi(t)]=\lim_{n\to\infty} f[\varphi_n(t)]$$

и, поскольку класс $f[\varphi_n(t)]$ не выше γ_n, то класс $f[\varphi(t)]$ не выше γ.

Итак, если $\varphi(t)$ некоторая функция класса $\leqslant\alpha$, то при всякой функции $f(x)$ класса β, при $\beta=0$, сложная функция $f[\varphi(t)]$ класса $\leqslant\alpha+\beta$.

Пусть это предложение уже доказано для всех $\beta<\gamma$ и пусть $f(x)\in H_\gamma$.

Тогда $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, где класс $f_n(x)$ есть H_{γ_n} при $\gamma_n<\gamma$. Значит,

$$f[\varphi(t)]=\lim_{n\to\infty} f_n[\varphi(t)],$$

и класс $f_n[\varphi(t)]$ не выше $\alpha+\gamma_n$, т. е. ниже[2]) $\alpha+\gamma$. Отсюда класс $f[\varphi(t)]$ не выше $\alpha+\gamma$. В силу принципа трансфинитной индукции, теорема доказана.

---

[1]) «Sur les suites convergentes de fonctions mesurables B» (Fund., Math., t. 18, 1931, стр 182—188).

[2]) Мы пользуемся очевидным фактом, что при $\sigma<\gamma$ будет $\alpha+\sigma<\alpha+\gamma$ (порядок слагаемых существен!).

В заключение отметим, что все приведенные определения и теоремы дословно переносятся на случай функций многих переменных, заданных в каком-нибудь параллелепипеде.

Например, теорема 5 примет вид:

Теорема 5*. *Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функция класса $\leqslant \beta$, определённая в параллелепипеде $a_k \leqslant x_k \leqslant b_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, а $\varphi_1(t_1, \ldots, t_m)$, $\varphi_2(t_1, \ldots, t_m), \ldots$ $\ldots \varphi_n(t_1, \ldots, t_m)$ система n функций классов $H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2}, \ldots, H_{\alpha_n}$ такая, что $a_k \leqslant \varphi_k(t_1, \ldots, t_m) \leqslant b_k$. Тогда сложная функция $f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ входит в класс с номером $\leqslant \alpha+\beta$, где α наибольшее из чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.*

§ 2. Непустота классов Бэра

Возникает естественный вопрос о том, для всякого ли $\alpha < \Omega$ существуют функции, входящие в класс H_α. Мы покажем, следуя А. Лебегу, что это действительно так. Для этого нам понадобятся важные и сами по себе понятия наибольшего и наименьшего пределов последовательности чисел.

Пусть

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \tag{1}$$

числовая последовательность. Положим [1])

$$\bar{x}_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}.$$

Легко видеть, что $\bar{x}_1 \geqslant \bar{x}_2 \geqslant \bar{x}_3 \geqslant \ldots$, а потому существует определенный (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n.$$

Этот предел называется *наибольшим пределом* последовательности (1) и обозначается через

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

Аналогично, предел

$$\lim_{n\to\infty} \underline{x}_n,$$

где $\underline{x}_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ называется *наименьшим пределом* последовательности (1) и обозначается через

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

Из очевидного неравенства $\underline{x}_n \leqslant \bar{x}_n$ следует, что

$$\underline{\lim}\, x_n \leqslant \overline{\lim}\, x_n.$$

Теорема 1. *Если $b = \overline{\lim}\, x_n$, то из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к b.*

Доказательство. Если $b = -\infty$, то теорема тривиальна, ибо, как это следует из неравенства $x_n \leqslant \bar{x}_n$, в этом случае сама последовательность $\{x_n\}$ стремится к $-\infty$. Пусть, далее, $-\infty < b < +\infty$. Тогда найдется такое k_0, что при всех $k > k_0$ числа $\bar{x}_k$ также будут конечны. Соотнесем каждому $k > k_0$ такое m_k, что

$$\bar{x}_k - \frac{1}{k} < x_{m_k} \leqslant \bar{x}_k \qquad (m_k \geqslant k).$$

---

[1]) Возможно, что $\bar{x}_n = +\infty$, а также что $\bar{x}_n = -\infty$ (последнее соотношение означало бы, что $x_n = x_{n+1} = \ldots = -\infty$, чего мы не исключаем).

Очевидно, $\lim\limits_{n \to \infty} x_{m_k} = b$.

Желая получить последовательность $\{x_{n_i}\}$, сходящуюся к b и такую, что $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, положим $n_1 = m_1$, а затем обозначим через n_2 наименьшее из чисел m_k, большее, чем n_1; через n_3 — наименьшее из m_k, большее, чем n_2 и т. д. Поскольку последовательность $\{x_{n_i}\}$ будет частичной для $\{x_{m_k}\}$, она также сходится к b.

Остается рассмотреть случай, когда $b = +\infty$. В этом случае при всех k будет $\bar{x}_k = +\infty$, т. е. все множества $\{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots\}$ не ограничены сверху. Положим $n_1 = 1$ и пусть n_{i+1} выбирается под условием

$$x_{n_{i+1}} > x_{n_i} + 1, \qquad n_{i+1} > n_i.$$

Это сразу приводит к требуемой подпоследовательности. Теорема доказана.

Если $b^* > b$, то найдется такое $\bar{x}_{n_0}$, что $x_{n_0} < b^*$. При $n \geqslant n_0$ окажется $x_n \leqslant \bar{x}_{n_0} < b^*$, и число b^* не может служить пределом никакой частичной последовательности, выделенной из $\{x_n\}$. Таким образом, наибольший предел числовой последовательности можно определить, как наибольшее из чисел, являющихся пределами частичных последовательностей, выделенных из данной. Аналогичное замечание можно сделать относительно наименьшего предела.

Теорема 2. *Если последовательность* (1) *имеет (конечный или бесконечный) предел l, то*

$$\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = l.$$

Обратно, если наибольший и наименьший пределы последовательности (1) *равны между собой, то их общее значение является пределом последовательности.*

Доказательство. Если последовательность (1) имеет предел l, то и все ее подпоследовательности сходятся к этому же пределу, откуда следует первая часть теоремы.

Вторая часть есть непосредственное следствие очевидного неравенства $\underline{x}_n \leqslant x_n \leqslant \bar{x}_n$.

Введем следующее обозначение. Пусть $a, b, \ldots, l$ есть конечная система чисел. Наибольшее из них будем обозначать через $\max\{a, b, \ldots, l\}$.

Лемма 1. *Если*

$$x_n \to a, \quad y_n \to b, \ \ldots, \quad z_n \to l,$$

то

$$\max\{x_n, y_n, \ldots, z_n\} \to \max\{a, b, \ldots, l\}.$$

Доказательство предоставляем читателю.

Следствия. 1. *Если функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ непрерывны, то и функция*

$$\varphi(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\} \tag{2}$$

непрерывна.

2. *Если функции $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ входят в классы с номерами $\leqslant \alpha$, то и функция* (2) *есть функция класса $\leqslant \alpha$.*

Первое следствие очевидно, а второе доказывается методом трансфинитной индукции.

Лемма 2. *Пусть $\{x_n\}$ числовая последовательность. Если*

$$l = \sup\{x_n\}, \quad y_n = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

то

$$l = \lim_{n \to \infty} y_n.$$

Доказательство предоставляем читателю.

Теорема 3. *Пусть*

$$f(x) = \overline{\lim_{n \to \infty}}\, f_n(x).$$

Если каждая из $f_n(x)$ есть функция класса $\leqslant \alpha$, то $f(x)$ есть функция класса $\leqslant \alpha+2$.

Доказательство. Пусть

$$\bar{f}_{n,p}(x) = \max\{f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots, f_{n+p}(x)\}.$$

Эта функция входит в класс с номером $\leqslant \alpha$. Но тогда функция

$$\bar{f}_n(x) = \sup\{f_n(x), f_{n+1}(x), f_{n+2}(x), \ldots\} = \lim_{p\to\infty} \bar{f}_{n,p}(x)$$

входит в класс с номером $\leqslant \alpha+1$ и, наконец, $f(x) = \lim_{n\to\infty} \bar{f}_n(x)$ входит в класс с номером $\leqslant \alpha+2$.

Отметим одно следствие этой теоремы, стоящее несколько в стороне от излагаемой теории, но не лишенное интереса:

***Теорема* (Дж. Витали).** *Всякая измеримая, почти везде конечная, функция $f(x)$, заданная на $[a, b]$, эквивалентна некоторой функции $g(x)$ не выше 2-го класса Бэра.*

Действительно, согласно теореме Фреше, существует последовательность непрерывных функций $\{\varphi_n(x)\}$ такая, что почти везде на $[a, b]$ будет

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x).$$

Полагая $g(x) = \overline{\lim}\, \varphi_n(x)$, мы и получаем требуемую функцию.

Вернемся к теме.

Лемма 3. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует для всякого $\varepsilon > 0$ такой многочлен $P(x)$ с рациональными коэффициентами, что для всех x из $[a, b]$*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Действительно, в силу теоремы Вейерштрасса, можно аппроксимировать $f(x)$ с точностью до $\varepsilon/2$ некоторым многочленом $Q(x)$. Заменяя его коэффициенты достаточно близкими рациональными числами, получим нужный многочлен $P(x)$.

Следствие. *Всякая функция 1-го класса $f(x)$ представима в форме*

$$f(x) = \lim P_n(x),$$

где $P_n(x)$ — многочлен с рациональными коэффициентами.

Лемма 4. *Если функция $\psi(x)$, заданная и конечная на сегменте $[a, b]$, имеет конечное число точек разрыва, то это функция 1-го класса Бэра.*

Доказательство. Пусть точками разрыва $\psi(x)$ служат

$$c_1 < c_2 < \ldots < c_m \qquad (a < c_k < b).$$

Окружим каждую из точек c_k интервалом $\left(c_k - \frac{1}{n}, c_k + \frac{1}{n}\right)$, считая n настолько большим, что эти интервалы не пересекаются и содержатся в $[a, b]$. Функция $f_n(x)$, равная $\psi(x)$ вне всех интервалов $\left(c_k - \frac{1}{n}, c_k + \frac{1}{n}\right)$ и в точках c_k и линейная на сегментах $\left[c_k - \frac{1}{n}, c_k\right]$, $\left[c_k, c_k + \frac{1}{n}\right]$, очевидно, непрерывна. Вместе с тем, при $n \to \infty$ будет $f_n(x) \to \psi(x)$.

Несущественные изменения доказательства, когда a или b также служат точками разрыва, предоставляем читателю.

Следствие. *Функция $\theta(x)$, равная единице в одной точке $[a, b]$ и нулю в остальных, есть функция 1-го класса.*

Лемма 5. *Если каждое число x из $[0, 1]$ разложено в десятичную дробь (без девятки в периоде для чисел < 1),*

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots,$$

то $a_k = a_k(x)$ есть функция 1-го класса.

Действительно, $a_k(x)$, будучи постоянной в каждом из интервалов $\left(\frac{n}{10^k}, \frac{n+1}{10^k}\right)$, имеет лишь конечное число точек разрыва.

После изложения этого, несколько разнородного, материала, мы можем перейти к основной теореме о существовании функции в каждом классе $H_\alpha\ (\alpha < \Omega)$. Для этого мы незначительно изменим классификацию Бэра, а именно, будем считать нулевым классом H_0^* множество всех многочленов с рациональными коэффициентами. Тогда 1-й класс H_1^* будет содержать все прочие непрерывные функции и функции, входившие в 1-й класс H_1, а все остальные классы Бэра останутся неизмененными. В сущности говоря, мы просто переносим часть множества непрерывных функций из нулевого класса в первый. Для этой измененной классификации справедлива

Теорема 4 (А. Лебег). *Для всякого $\alpha > 0$ из первого или второго числового класса существует функция двух переменных*

$$F_\alpha(x, t) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1)$$

такая, что 1) $F_\alpha(x, t)$ есть функция Бэра; 2) всякая функция Бэра $f(x)$ класса $< \alpha$ получается из $F_\alpha(x, t)$ фиксированием некоторого t, т. е.

$$f(x) = F_\alpha(x, t_0) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Такая функция $F_\alpha(x, t)$ называется *универсальной* для множества функций Бэра классов $< \alpha$.

Доказательство. Пусть функция $\theta_n(t)$ равна 1 при $t = 1/n$ и равна 0 при всех прочих t из $[0, 1]$. Перенумеруем все многочлены с рациональными коэффициентами $P_1(x), P_2(x), P_3(x), \ldots$ и положим

$$F_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)\, \theta_n(t).$$

Это есть функция Бэра. В самом деле, каждый из множителей $P_n(x)$ и $\theta_n(t)$ можно рассматривать как функцию двух переменных и эта функция есть функция Бэра. Но тогда и $P_n(x)\,\theta_n(t)$ есть (конечная) функция Бэра, а с ней функциями Бэра будут и все частные суммы ряда. Так как все члены ряда, кроме, может быть, одного, суть нули, то ряд сходится во всякой точке (x, t) квадрата $0 \leqslant x, t \leqslant 1$ и сумма его есть функция Бэра.

Какую бы функцию $f(x)$ из нулевого класса H_0^* ни взять, она представима в форме $f(x) = F_1(x, t_0)$. Действительно, если $f(x)$ есть многочлен $P_k(x)$, то

$$F_1\left(x, \frac{1}{k}\right) = P_k(x) = f(x).$$

Таким образом, наша теорема установлена для $\alpha = 1$. Допустим теперь, что функции $F_\beta(x, t)$ построены для всех $\beta < \alpha$, и построим $F_\alpha(x, t)$.

Для этого различим два случая:

1) α — число первого рода. Тогда $\alpha = \beta + 1$, и функция $F_\beta(x, t)$ существует. Определим следующую последовательность функций от $t\ (0 \leqslant t \leqslant 1)$: разложим t в десятичную дробь (без 9 в периоде для $t < 1$)

$$t = 0,\ a_1 a_2 a_3 \ldots$$

и положим

$$\begin{aligned} h_1(t) &= 0,\ a_1 a_3 a_5 \ \ldots, \\ h_2(t) &= 0,\ a_2 a_6 a_{10} \ldots, \\ h_3(t) &= 0,\ a_4 a_{12} a_{20} \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Так как $h_n(t)$ есть сумма равномерно сходящегося ряда

$$h_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2^{n-1}(2k-1)}(t)}{10^k},$$

члены которого суть функции 1-го класса, то $h_n(t)$ есть функция 1-го класса.

Пусть $F_\alpha(x, t) = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} F_\beta[x, h_k(t)]$.

Ясно, что $F_\alpha(x, t)$ есть функция Бэра; покажем, что это универсальная функция для множества функций классов $< \alpha$.

Действительно, если $f(x)$ есть функция класса $< \alpha$, то

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x),$$

где каждая из функций $f_k(x)$ входит в класс $< \beta$ и, стало быть, представима в форме $f_k(x) = F_\beta(x, t_k) \qquad (0 \leqslant t_k \leqslant 1)$.

Легко найти такое t^* из $[0, 1]$, чтобы при всяком k было

$$h_k(t^*) = t_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Но тогда

$$F_\alpha(x, t^*) = \overline{\lim_{k\to\infty}} F_\beta(x, t_k) = \overline{\lim_{k\to\infty}} f_k(x) = f(x),$$

и, следовательно, $F_\alpha(x, t)$ удовлетворяет всем условиям теоремы.

2) Пусть теперь α — число второго рода. Тогда существует такая последовательность $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \ldots$, что α есть наименьшее число, следующее за всеми числами последовательности.

Положим $F_\alpha(x, t) = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} F_{\beta_k}[x, h_k(t)]$, где $h_k(t)$ суть те же функции, что и выше. Функция $F_\alpha(x, t)$ есть функция Бэра.

Пусть $f(x)$ функция класса $< \alpha$. Тогда $f(x)$ входит в класс H_γ, где $\gamma < \alpha$. Для $k > k_0$ окажется $\beta_k > \gamma$ и, стало быть, $f(x)$ представима в форме

$$f(x) = F_{\beta_k}(x, t_k) \qquad (k > k_0).$$

Взяв в $[0, 1]$ такое t^*, что $h_k(t^*) = t_k \ (k > k_0)$ (это, очевидно, легко сделать, причем $h_1(t^*), \ldots, h_{k_0}(t^*)$ можно взять произвольно), мы будем иметь

$$F_\alpha(x, t^*) = \overline{\lim} F_{\beta_k}(x, t_k) = \overline{\lim} f(x) = f(x),$$

откуда ясно, что $F_\alpha(x, t)$ есть требуемая функция. Теорема доказана.

Теорема 5. *Ни один класс H_α не пуст.*

Доказательство. Пусть некоторый класс H_α пуст. Тогда все следующие классы и подавно пусты, и все функции Бэра принадлежат классам с номерами $< \alpha$.

Построим функцию $F_\alpha(x, t)$, о которой шла речь в предыдущей теореме.

Если мы положим $\Phi(x, t) = [F_\alpha(x, t)]_0^1$, то всякая функция Бэра $f(x)$, значения которой лежат между 0 и 1, будет представляться в форме $f(x) = \Phi(x, t_0)$ при некотором фиксированном t_0. Заметив это, положим

$$\varphi(x, t) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\Phi(x, t)}{1 + n\Phi(x, t)}.$$

Эта функция принимает лишь два значения: 0 и 1. Она есть функция Бэра и всякая функция Бэра, принимающая лишь значения 0 и 1, представима в форме $\varphi(x, t_0)$.

В частности, в такой форме представима функция $1 - \varphi(x, x)$. Но это сразу ведет к нелепости, ибо равенство $1 - \varphi(x, x) = \varphi(x, t_0)$ при $x = t_0$ дает, что $\varphi(t_0, t_0) = 1/2$. Теорема доказана.

Возвращаясь к теореме 4, упомянем об интересной работе Л. В. Канторовича, [1]) в которой между прочим установлен следующий результат: для множества функций Бэра классов $< \alpha$ существует универсальная функция $F_\alpha(x, t)$, которая сама, как функция Бэра, входит в класс H_α, но для множества функций классов $\leqslant \alpha$ такой универсальной функции не существует.

---

[1]) Л. В. Канторович, Об универсальных функциях. Журн. Ленингр. ФМО, т. II, в. 2, 1929, стр. 13—21.

§ 3. Функции 1-го класса

В этом параграфе мы специально остановимся на некоторых свойствах функций 1-го класса.

Лемма 1. *1) Замкнутое множество есть множество типа G_δ; 2) открытое множество есть множество типа F_σ; 3) разность двух замкнутых множеств есть множество типа F_σ.*

Доказательство. Пусть F замкнутое множество. Обозначая расстояние точки x от F через $\rho(x, F)$, положим $G_n = Z(\rho(x, F) < 1/n)$.

Мы видели (гл. II, § 4, лемма 1), что G_n есть открытое множество. Но легко видеть, что $F = \prod_{n=1}^{\infty} G_n$, и F есть множество типа G_δ.

Переходя к доказательству 2), рассмотрим какое-нибудь открытое множество G. Если его дополнение есть CG, то CG замкнуто, и по доказанному $CG = \prod_{n=1}^{\infty} G_n$, где G_n открыты. Отсюда $G = \sum_{n=1}^{\infty} CG_n$, где CG_n есть замкнутое дополнение множества G_n. Значит, G типа F_σ.

Пусть, наконец, F_1 и F_2 суть замкнутые множества. Тогда множество $F_1 - F_2$ представимо в форме $F_1 - F_2 = F_1 \cdot CF_2$ и, будучи пересечением замкнутого множества и множества типа F_σ само есть F_σ.

Лемма 2. *Если некоторое множество M допускает представление*

$$M = A_1 + A_2 + \ldots + A_n,$$

где A_k суть множества типа F_σ, то существует другое представление

$$M = B_1 + B_2 + \ldots + B_n,$$

в котором B_k также суть множества типа F_σ, $B_k \subset A_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ и, кроме того, множества B_k попарно не пересекаются.

Доказательство. Ясно, что $M = \sum_{k=1}^{\infty} F_k$, где F_k суть замкнутые множества, причем каждое из множеств F_k целиком содержится в каком-нибудь из множеств A_i. Положим

$$S_1 = F_1, \quad S_k = F_k - (F_1 + \ldots + F_{k-1}).$$

Множества S_k суть множества F_σ, они попарно не пересекаются и $M = \sum_{k=1}^{\infty} S_k$.

Разобьем множество $T = \{S_k\}$ на n частей $T_1, T_2, \ldots, T_n$, относя в T_1 те множества S_k, которые содержатся в A_1, в T_2 — те $S_k \in T - T_1$, которые содержатся в A_2, и т. д. Положив $B_i = \sum_{S_k \in T_i} S_k$, мы и получим требуемое разложение множества M.

Лемма 3. *Пусть на сегменте $E = [a, b]$ задана функция $f(x)$, принимающая конечное число конечных значений $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$.*

Если каждое из множеств $E(f = c_k)$ есть множество типа F_σ, то $f(x)$ есть функция не выше 1-го класса.

Доказательство. Пусть $E(f = c_k) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i^{(k)}$, где $F_i^{(k)}$ суть замкнутые множества. Положим

$$\Phi_m^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} F_i^{(k)}, \quad \Phi_m = \sum_{k=1}^{n} \Phi_m^{(k)}$$

и введем функцию $\varphi_m(x)$, полагая

$$\varphi_m(x) = c_k \qquad \left(x \in \Phi_m^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n\right).$$

Функция $\varphi_m(x)$ задана на замкнутом множестве Φ_m и, согласно лемме 1, § 4, гл. IV, есть непрерывная функция. Пользуясь леммой 2 того же параграфа, можно построить на $[a, b]$ непрерывную функцию $\psi_m(x)$, которая на множестве Φ_m совпадает с $\varphi_m(x)$. Нетрудно убедиться, что в каждой точке $[a, b]$ будет $\lim\limits_{m\to\infty} \psi_m(x) = f(x)$, откуда и следует лемма.

Теорема 1 (А. Лебег). *Для того чтобы функция $f(x)$, заданная на сегменте $E=[a, b]$, была функцией не выше 1-го класса, необходимо и достаточно, чтобы множества $E(f > A)$, $E(f < A)$ при любом A были множествами типа F_σ.*

Доказательство. Если $f(x)$ есть функция не выше 1-го класса, то $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, где $f_n(x)$ непрерывны. Положим

$$F_n^{(k)} = E\left(f_n \leqslant A - \frac{1}{k}\right), \quad S_m^{(k)} = \prod_{n=m}^{\infty} F_n^{(k)}.$$

При доказательстве теоремы 8, § 1, гл. IV было установлено, что если функция $f(x)$ непрерывна, то множество $E(f \leqslant A)$ замкнуто. Значит, множества $F_n^{(k)}$, а с ними и множества $S_m^{(k)}$, замкнуты. Замечая, что

$$E(f < A) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} S_m^{(k)},$$

мы убеждаемся, что $E(f < A)$ есть множество типа F_σ. Для $E(f > A)$ рассуждение аналогично.

Переходя к доказательству достаточности условия теоремы, предположим сначала, что $f(x)$ ограниченная функция: $l < f(x) < L$.

Разложим сегмент $[l, L]$ на n равных частей точками

$$c_0 = l < c_1 < c_2 < \ldots < c_n = L \qquad \left(c_{k+1} - c_k = \frac{L-l}{n}\right)$$

и положим

$$A_k = E(c_{k-1} < f < c_{k+1}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$
$$A_0 = E(f < c_1), \qquad A_n = E(f > c_{n-1}).$$

Все эти множества суть множества F_σ и $E = A_0 + A_1 + \ldots + A_n$.

На основании леммы 2 существует другое разложение

$$E = B_0 + B_1 + \ldots + B_n,$$

в котором множества B_k, также будучи множествами F_σ, *попарно не пересекаются* и $B_k \subset A_k$.

Введем функцию $f_n(x)$, полагая

$$f_n(x) = c_k \quad \text{при} \quad x \in B_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Согласно лемме 3, функция $f_n(x)$ не выше 1-го класса. Выберем произвольную точку $x_0 \in E$. Тогда $x_0 \in B_k \subset A_k$.

Значит, $f_n(x_0) = c_k$, $\quad c_{k-1} < f(x_0) < c_{k+1}$. Отсюда ясно, что

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{L-l}{n}.$$

Таким образом, при $n \to \infty$ функции $f_n(x)$ равномерно стремятся к функции $f(x)$ и, стало быть, последняя есть функция не выше 1-го класса.

Переходя к общему случаю, положим $g(x) = \operatorname{arc\,tg} f(x)$.

Эта функция уже ограничена. Но при $-\frac{\pi}{2} \leqslant A < \frac{\pi}{2}$

$$E(g > A) = E(f > \operatorname{tg} A),$$

если же $A \geqslant \pi/2$, то множество $E(g > A)$ пусто. Наконец, если $A < -\pi/2$, то $E(g > A) = [a, b]$. Таким образом, множество $E(g > A)$ при всех A есть множество F_σ. То же верно и для $E(g < A)$. Стало быть, $g(x)$ есть функция не выше 1-го класса, а потому и $f(x) = \operatorname{tg}[g(x)]$ есть функция не выше 1-го класса. [1])

Р. Бэр нашел другую, очень интересную, характеристику функций 1-го класса. Для изложения его теоремы нам понадобятся некоторые новые понятия и факты.

Определения. Пусть A и B два точечных множества, причем $A \subset B$. 1) Если всякий интервал, содержащий хоть одну точку B, содержит точки B, не входящие в замыкание $\bar{A}$ множества A, то говорят, что A *нигде не плотно* на множестве B. 2) Если A представимо в форме суммы счетного множества множеств, каждое из которых нигде не плотно на множестве B, то говорят, что A есть *множество первой категории* на множестве B.

Теорема 2. *Непустое замкнутое множество F не есть множество первой категории на самом себе.*

Доказательство. Допустим, напротив, что F можно представить в форме $F = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$, где каждое из множеств A_k нигде не плотно на множестве F. Тогда существует точка $x_1 \in F$, не являющаяся точкой замыкания $\bar{A}_1$ множества A_1. Поэтому найдется сегмент $[x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1]$, не содержащий ни одной точки A_1, причем можно считать, что $\delta_1 < 1$.

В интервале $(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)$ существует точка $x_2 \in F$, не входящая в множество $\bar{A}_2$. Значит, найдется сегмент $[x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2]$, не содержащий ни одной точки A_2. Можно считать, что $\delta_2 < 1/2$ и что $[x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2] \subset \subset [x_1 - \delta_2, x_1 + \delta_1]$.

Продолжая этот процесс, мы построим последовательность точек

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

входящих в F, и последовательность вложенных сегментов

$$[x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \supset [x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2] \supset \ldots \supset [x_n - \delta_n, x_n + \delta_n] \supset \ldots$$

такую, что сегмент $[x_n - \delta_n, x_n + \delta_n]$ не содержит ни одной точки множества A_n и $\delta_n < 1/n$.

Пусть x_0 есть общая точка всех сегментов $[x_n - \delta_n, x_n + \delta_n]$.

Очевидно $x_0 = \lim x_n$ и потому $x_0 \in F$. Вместе с тем x_0 не может входить ни в одно из множеств A_n. Это противоречие доказывает теорему.

Следствие. *Если непустое замкнутое множество F есть сумма счетного множества замкнутых множеств $F = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots$, то существует интервал (λ, μ), содержащий точки множества F, и такое n, что $(\lambda, \mu) F \subset F_n$.*

Действительно, хоть одно из слагаемых множеств, пусть это будет F_n, не будет нигде неплотным на множестве F. Но это и значит, что среди интервалов, содержащих точки F, найдется такой интервал (λ, μ), что все, входящие в него точки F, входят в F_n, ибо это последнее множество, будучи замкнутым, совпадает со своим замыканием.

---

[1]) Функцию $g(x)$ можно представить в форме

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x),$$

где $g_n(x)$ непрерывные функции, подчиненные условию

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \leqslant g_n(x) \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}.$$

Тогда

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \operatorname{tg}[g_n(x)],$$

причем $\operatorname{tg}[g_n(x)]$ есть непрерывная функция.

Пусть на некотором множестве A задана функция $f(x)$ и пусть B есть подмножество A. Рассмотрим функцию $f(x \mid B)$, определенную только в точках множества B и совпадающую в этих точках с функцией $f(x)$. Мы будем говорить, что функция $f(x \mid B)$ *индуцируется* функцией $f(x)$ в множество B. Легко понять, что если исходная функция $f(x)$ непрерывна на множестве A, то индуцированная функция $f(x \mid B)$ непрерывна на множестве B.

Теорема 3 (Р. Бэр). *Пусть на сегменте $[a, b]$ задана конечная*[1] *функция 1-го класса $f(x)$. Каково бы ни было замкнутое множество $F \neq 0$, содержащееся в $[a, b]$, в нем имеются точки непрерывности индуцированной функции $f(x \mid F)$.*

Доказательство. Если множество F имеет хоть одну изолированную точку, то последняя и будет искомой точкой непрерывности. Оставляя в стороне этот тривиальный случай, мы будем считать, что F есть совершенное множество.

Пусть D есть некоторый сегмент, содержащийся в $[a, b]$ и внутри которого имеется хотя бы одна (а значит, и бесконечное множество) точка множества F.

Мы покажем, что существует сегмент d, лежащий внутри[2] D, содержащий внутри себя точки множества F и такой, что колебание функции $f(x)$ на множестве Fd меньше любого наперед заданного числа.

Для этого мы прежде всего убедимся в существовании такого сегмента $E \subset D$, что множество EF есть совершенное (непустое) множество. Пусть концы D суть A и B, так что $D=[A, B]$. Бесконечное множество DF замкнуто и ни одна его точка, кроме A и B, не может оказаться изолированной. Допустим, что A есть изолированная точка множества DF. Тогда множество $DF-\{A\}$, получающееся из DF удалением точки A, замкнуто. Пусть самая левая точка этого множества есть A_1, положим $D_1=[A_1, B]$. В замкнутом множестве D_1F изолированной может быть только точка B. Если она в самом деле такова, то мы удалим ее из множества D_1F и обозначим через B_1 самую правую точку оставшегося (замкнутого) множества. Сегмент $E=[A_1, B_1]$ и будет таким, что EF совершенное множество.

По условию функция $f(x)$ представима в форме $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, где $f_n(x)$ суть непрерывные функции. Возьмем $\varepsilon>0$ и положим

$$A_{n,m}=E(|f_n-f_{n+m}|\leqslant\varepsilon) \qquad (n=1, 2, \ldots; \quad m=1, 2, \ldots).$$

Очевидно множество $A_{n,m}$ замкнуто. Пусть далее

$$B_n=\prod_{m=1}^{\infty} A_{n,m}.$$

Это также замкнутое множество. Легко видеть, что $E=\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n$.

Действительно, если $x_0 \in E$, то последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится, а потому для достаточно большого n и любого m будет

$$|f_n(x_0)-f_{n+m}(x_0)|<\varepsilon,$$

так что $x_0 \in B_n$ и, стало быть, $E \subset \sum B_n$. Обратное включение тривиально.

Но из установленного равенства следует, что $EF=\sum\limits_{n=1}^{\infty} FB_n$.

---

[1]) Условие конечности $f(x)$ существенно, ибо функция, всюду равная $+\infty$, будучи функцией 1-го класса, вовсе не имеет точек непрерывности.

[2]) Мы будем говорить, что сегмент $[\lambda, \mu]$ лежит *внутри* сегмента $[\sigma, \tau]$, если $\sigma<\lambda<\mu<\tau$.

В силу предыдущего следствия существует интервал (λ, μ), содержащий точки множества EF и натуральное число n такие, что $(\lambda, \mu) EF \subset FB_n$.

Если $x \in (\lambda, \mu) EF$, то при любом m оказывается

$$|f_n(x) - f_{n+m}(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Увеличивая m и переходя в последнем неравенстве к пределу, мы находим, что

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Множество EF есть совершенное множество, интервал (λ, μ) содержит хоть одну точку этого множества. Значит, множество $(\lambda, \mu) EF$ бесконечно. Пусть x_0 есть точка множества $(\lambda, \mu) EF$, отличная от концов сегмента E. Возьмем сегмент d, содержащий точку x_0 внутри себя и настолько малый, что 1) он содержится в интервале (λ, μ), 2) лежит внутри сегмента E (и, тем более, внутри сегмента D) и 3) колебание (непрерывной) функции $f_n(x)$ на сегменте d меньше ε.

Пусть x_1 и x_2 суть две точки множества Fd. Тогда

$$|f_n(x_1) - f(x_1)| \leqslant \varepsilon, \quad |f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \varepsilon, \quad |f_n(x_2) - f(x_2)| \leqslant \varepsilon,$$

откуда

$$|f(x_1) - f(x_2)| < 3\varepsilon,$$

т. е. колебание функции $f(x)$ на множестве Fd меньше 3ε.

Итак, нами установлено, что для всякого сегмента $D \subset [a, b]$, содержащего внутри себя точки E, существует другой сегмент d, лежащий внутри D, также содержащий внутри себя точки F и такой, что колебание $f(x)$ на Fd мало по желанию.

Доказав это, возьмем сегмент $d_1 \subset [a, b]$, содержащий внутри себя точки F, с длиной $md_1 < 1$ и такой, что колебание $f(x)$ на множестве Fd_1 меньше 1.

Затем найдем сегмент d_2, лежащий внутри d_1, содержащий внутри себя точки F, с длиной $md_2 < 1/2$ и такой, что колебание $f(x)$ на множестве Fd_2 меньше $1/2$.

Продолжая этот процесс, мы построим последовательность сегментов

$$d_1 \supset d_2 \supset d_3 \supset \ldots \quad (md_n < 1/n),$$

каждый из которых лежит внутри предыдущего, содержит точки множества F внутри себя и таков, что колебание функции $f(x)$ на множестве Fd_n меньше $1/n$.

Пусть ξ точка, общая всем сегментам d_n. Она очевидно принадлежит множеству F. Легко видеть, что индуцированная функция $f(x \mid F)$ непрерывна в точке ξ. Теорема доказана.

Оказывается, что эта теорема допускает обращение. Чтобы это доказать, нам понадобится

Принцип стационарности Кантора — Бэра. *Пусть всякому порядковому числу α из первого или второго числового класса отвечает замкнутое множество F_α, причем из $\alpha < \beta$ следует $F_\alpha \supset F_\beta$*

$$F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_\omega \supset \ldots \supset F_\alpha \supset \ldots \qquad (\alpha < \Omega).$$

Тогда все множества цепочки $\{F_\alpha\}$, начиная с некоторого, совпадают друг с другом, т. е. *найдется такое число $\mu < \Omega$, что*

$$F_\mu = F_{\mu+1} = F_{\mu+2} = \ldots \qquad (*)$$

Доказательство.[1]) Расположим (счетное!) множество всех интервалов с рациональными концами в последовательность $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ Это позволяет всякому множеству E точек числовой прямой соотнести множество $S(E)$, состоящее из всех натуральных чисел k, удовлетворяющих соотношению $E\delta_k \neq 0$.

---

[1]) Это доказательство сообщено автору акад. П. С. Александровым.

Легко видеть, что из $A \subset B$ следует $S(A) \subset S(B)$. Далее, если множества F и F^* замкнуты и $F \neq F^*$, то[1] $S(F) \neq S(F^*)$. В самом деле, пусть $x_0 \in F - F^*$. Тогда все достаточно короткие интервалы, содержащие x_0, не будут пересекаться с F^*. Если δ_i один из таких интервалов, то $i \in S(F) - S(F^*)$.

Заметив это, положим $S(F_\alpha) = S_\alpha$. Это приводит нас к цепочке множеств

$$S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_\alpha \supset \ldots \qquad (\alpha < \Omega).$$

Пусть K пересечение всех множеств этой цепочки. Если K состоит из всех натуральных чисел, то и все множества цепочки таковы же. Это означает, что все множества F_α, начиная с F_0, совпадают друг с другом (каждое из них будет совпадать со всей числовой прямой). Оставляя в стороне этот тривиальный случай, рассмотрим множество M всех натуральных чисел, не входящих в K. Если $m \in M$, то найдутся такие числа $\alpha < \Omega$, что $m \overline{\in} S_\alpha$. Обозначим через α_m наименьшее из них. Это приводит нас к конечному или счетному множеству чисел $\{\alpha_m\}$. Так как все они меньше Ω, то найдется порядковое число μ, все еще входящее в первый или второй числовой класс и большее всех α_m. Если $m \overline{\in} K$, то $m \overline{\in} S_{\alpha_m}$ и тем более $m \overline{\in} S_\mu$. Отсюда следует, что $K = S_\mu$. Таким образом, $S_\mu = S_{\mu+1} = S_{\mu+2} = \ldots$, а это равносильно соотношению (*).

Теорема 4. (Р. Бэр). *Пусть на сегменте $E = [a, b]$ задана функция $f(x)$. Если на всяком непустом замкнутом множестве F имеются точки непрерывности индуцированной функции $f(x \mid F)$, то $f(x)$ непрерывна или 1-го класса.*

Доказательство. В силу теоремы Лебега, достаточно показать, что множества $E(f > A)$, $E(f < A)$ при любом A суть множества типа F_σ.

Пусть p и q два числа, причем $p < q$. Положим

$$P = E(f > p), \quad Q = E(f < q).$$

Очевидно $E = P + Q$.

Пусть F непустое замкнутое множество, содержащееся в E. Обозначим через x_0 какую-нибудь точку непрерывности индуцированной функции $f(x \mid F)$. Ясно, что выполняется хоть одно из неравенств

$$f(x_0) > p, \ f(x_0) < q,$$

пусть, например, $f(x_0) > p$. Тогда существует столь малый интервал δ, содержащий точку x_0, что для всех точек множества $F\delta$ окажется $f(x) > p$. Положим $F^* = F - F\delta$, это замкнутое множество, потому что $F^* = F \cdot C\delta$. При этом $F - F^* = F\delta \subset P$. Если бы было $f(x_0) < q$, то мы аналогично нашли бы замкнутое множество $F^* \subset F$ такого рода, что $F - F^* \subset Q$. Итак, какое бы непустое замкнутое множество F ни взять, найдется такое его замкнутое же подмножество F^*, что множество $F - F^*$ не пусто и содержится целиком в P или Q.

Заметив это, положим $F_0 = [a, b]$ и найдем замкнутое множество $F_1 \subset F_0$ такого рода, что $F_0 - F_1$ не пусто и целиком содержится в P или Q. Если F_1 также не пусто, то мы найдем его замкнутое подмножество F_2 такое, что $F_1 - F_2$ не пусто и содержится в P или Q. Продолжая этот процесс, мы или натолкнемся на пустое множество F_n или для всех натуральных n построим множества F_n такого рода, что $F_n - F_{n+1}$ не пусто и содержится в P или Q.

В последнем случае мы положим $F_\omega = \prod\limits_{n=0}^{\infty} F_n$.

Если это множество все еще не пусто, то перед нами открывается возможность дальнейшего построения множеств $F_{\omega+1}, F_{\omega+2}, \ldots$. Пусть α есть число 2-го класса и нами уже определены все множества F_β при $\beta < \alpha$, причем все они оказались непустыми.

---

[1]) Без условия замкнутости обоих множеств F и F^* сказанное неверно. Например, если R и Z суть соответственно множества всех рациональных и всех вещественных чисел, то $S(R) = S(Z) = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Если α число первого рода, то мы обозначим через F_α такое замкнутое подмножество множества $F_{\alpha-1}$ (где $\alpha-1$ непосредственно предшествует α), что $F_{\alpha-1}-F_\alpha \neq 0$ и целиком содержится в P или Q. Если же α число второго рода, то мы полагаем $F_\alpha = \prod_{\beta<\alpha} F_\beta$.

Допустим, что все множества F_α при $\alpha < \Omega$ оказались непустыми. Легко видеть, что это допущение противоречит принципу стационарности Кантора — Бэра. В самом деле, согласно этому принципу, должно найтись такое μ, что $F_\mu = F_{\mu+1}$, в то время как из непустоты F_μ вытекает непустота разности $F_\mu - F_{\mu+1}$.

Таким образом, процесс определения множеств F_α не может быть проведен для всех чисел первых двух классов и необходимо существует такое $\lambda < \Omega$, что $F_\alpha \neq 0$ $(\alpha < \lambda)$, $F_\lambda = 0$.

В таком случае исходный сегмент $F_0 = [a, b]$ представляется в форме

$$[a, b] = \sum_{\alpha<\lambda} [F_\alpha - F_{\alpha+1}].$$

Действительно, если $x \in [a, b]$, то найдутся такие $\alpha \leqslant \lambda$, что $x \overline{\in} F_\alpha$ (например, $\alpha = \lambda$). Пусть β первое из них. Ясно, что β число первого рода (ибо если бы β было числом второго рода, то x, входя во все F_α при $\alpha < \beta$, входил бы и в их пересечение F_β). Значит, $x \in F_{\beta-1} - F_\beta$ и

$$[a, b] \subset \sum_{\alpha<\lambda} [F_\alpha - F_{\alpha+1}].$$

Обратное включение тривиально. Каждое из множеств $F_\alpha - F_{\alpha+1}$ входит в одно из множеств P или Q. Обозначим через T множество тех $\alpha < \lambda$, для которых $F_\alpha - F_{\alpha+1} \subset P$, и пусть $U = W_\lambda - T$. Ясно, что $UT = 0$ и

$$[a, b] = \sum_T [F_\alpha - F_{\alpha+1}] + \sum_U [F_\alpha - F_{\alpha+1}].$$

Каждое из множеств $F_\alpha - F_{\alpha+1}$ есть множество типа F_σ, таковы же и их суммы $A = \sum_T [F_\alpha - F_{\alpha+1}]$, $B = \sum_U [F_\alpha - F_{\alpha+1}]$, ибо каждое из множеств T и U конечно или счетно. Отметим, что $A \subset P$, $B \subset Q$ и что множества A и B попарно не пересекаются (ибо не пересекаются множества $F_\alpha - F_{\alpha+1}$ и $F_\beta - F_{\beta+1}$ при $\alpha \neq \beta$).

Итак, всякой паре чисел $p < q$ отвечает разложение сегмента $[a, b]$ на два непересекающихся множества типа F_σ

$$[a, b] = A + B, \text{ причем } A \subset E\,(f > p), \quad B \subset E\,(f < q).$$

Установив это, фиксируем p и придадим q последовательность значений $q_1 > q_2 > q_3 > \ldots \lim q_n = p$.

Для всякого n мы имеем $[a, b] = A_n + B_n$ $(A_n B_n = 0)$, где A_n и B_n суть множества типа F_σ и $A_n \subset E\,(f > p)$, $B_n \subset E\,(f < q_n)$.

Положим $R = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, $S = \prod_{n=1}^{\infty} B_n$. Очевидно $RS = 0$ и $[a, b] = R + S$.

Множество R есть F_σ. Покажем, что $E\,(f > p) = R$.

Действительно, если $f(x_0) > p$, то для достаточно большого n окажется $f(x_0) > q_n$ и $x_0 \overline{\in} B_n$. Значит, $x_0 \overline{\in} S$ и $x_0 \in R$. Отсюда следует, что $E\,(f > p) \subset R$.

Обратное же включение очевидно. Итак, $E\,(f > p)$ есть F_σ. То же справедливо и для множеств $E\,(f < q)$. Теорема доказана.

Иллюстрируем теоремы Лебега и Бэра некоторыми примерами.

I. *Характеристическая функция замкнутого ограниченного множества F есть функция 1-го класса.*

Пусть $F \subset [a, b] = E$ и $f(x)$ равна 1 в точках множества F и равна 0 в точках множества $E - F$. Тогда

$$E(f > A) = \begin{cases} E, \text{ если } A < 0, \\ F, \text{ если } 0 \leqslant A < 1, \\ 0, \text{ если } A \geqslant 1, \end{cases} \qquad E(f < A) = \begin{cases} E, & \text{если } A > 1, \\ E - F, & \text{если } 0 < A \leqslant 1, \\ 0, & \text{если } A \leqslant 0. \end{cases}$$

Во всех случаях множества $E(f > A)$ и $E(f < A)$ суть F_σ. Чтобы это пояснить, достаточно сослаться на лемму 1.

Отметим, что наше предложение легко может быть доказано без помощи предыдущей теории. Если мы обозначим через $r(x)$ расстояние точки x от множества F, то функция $r(x)$ окажется непрерывной. Вместе с тем $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{1 + nr(x)}$.

II. *Функция, имеющая счетное множество точек разрыва, есть функция 1-го класса.*

В самом деле, если F есть замкнутое множество, в котором есть изолированные точки, то они и будут точками непрерывности индуцированной функции $f(x \mid F)$. Если же F есть совершенное множество, то оно несчетно и потому содержит точки непрерывности исходной функции, которые и подавно являются точками непрерывности функции индуцированной.

В частности:

III. *Монотонная функция и функция с конечным изменением суть функции не выше 1-го класса.*

Следующий пример весьма поучителен.

IV. Пусть P_0 есть канторово совершенное множество. Определим в сегменте $[0, 1]$ две функции $f(x)$ и $g(x)$, полагая $f(x)$ равной 1 в точках множества P_0 и 0 в точках его открытого дополнения $G_0 = [0, 1] - P_0$, функцию же $g(x)$ мы положим равной 1 в тех и только тех точках множества P_0, которые не являются концами дополнительных интервалов, а в остальных точках $[0, 1]$ полагаем $g(x) = 0$.

Легко понять, что обе функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точках множества G_0 и разрывны в точках множества P_0. Иначе говоря, эти функции имеют одну и ту же совокупность точек разрыва. И в то же время $f(x)$ *есть функция 1-го класса* (как характеристическая функция замкнутого множества P_0), а $g(x)$ таковой не является, ибо индуцированная функция $g(x \mid P_0)$ разрывна в каждой точке множества P_0.

V. *Функция Дирихле есть функция 2-го класса.*

Функция Дирихле равна 1 в рациональных точках сегмента $[0, 1]$ и 0 в иррациональных точках этого сегмента. Она вовсе лишена точек непрерывности и потому не может быть функцией 1-го класса. В то же время, если мы перенумеруем рациональные точки сегмента $[0, 1]$: r_1 r_2, r_3, ... и положим

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x = r_k \\ 0 \text{ в остальных точках } [0, 1] \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

то функция $\varphi_n(x)$, имея конечное число точек разрыва, будет функцией 1-го класса. Так как функция Дирихле есть предел $\varphi_n(x)$ при $n \to \infty$, то наше утверждение доказано. [1])

Заметим, что функция Дирихле есть характеристическая функция множества рациональных чисел, которое (будучи счетным) очевидно есть F_σ. Значит, характеристическая функция множества типа F_σ не всегда есть функция 1-го класса.

---

[1]) Нетрудно проверить также, что функция Дирихле $\psi(x)$ представима в форме $\psi(x) = \lim\limits_{m \to \infty} \{\lim\limits_{n \to \infty} [\cos(m!\pi x)]^{2n}\}$, откуда снова видно, что $\psi(x)$ есть функция 2-го класса.

§ 4. Полунепрерывные функции

Остановимся на одном специальном виде функций 1-го класса — *полунепрерывных функциях*. Для этого нам придется перенести на функции понятия наибольшего и наименьшего пределов, установленные нами в § 2 для последовательностей. Для простоты мы ограничимся функциями одной переменной.

Пусть функция $f(x)$ задана на множестве E, имеющем предельную точку x_0. Возьмем число $\delta > 0$ и положим

$$M_\delta(x_0) = \sup\{f(x)\}, \quad m_\delta(x_0) = \inf\{f(x)\} \quad [x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) E].$$

С уменьшением δ величина $M_\delta(x_0)$ не возрастает, а $m_\delta(x_0)$ не убывает, а потому существуют (конечные или бесконечные) пределы

$$M(x_0) = \lim_{\delta \to 0} M_\delta(x_0), \quad m(x_0) = \lim_{\delta \to 0} m_\delta(x_0),$$

которые и называются[1]) соответственно *наибольшим и наименьшим пределами* функции $f(x)$ в точке x_0. Обозначаются эти пределы так:

$$M(x_0) = \overline{\lim_{x \to x_0}} f(x), \quad m(x_0) = \underline{\lim_{x \to x_0}} f(x).$$

Заметим, что в самой точке x_0 функция $f(x)$ может и не быть определена. Но, если $x_0 \in E$, то очевидно $m(x_0) \leqslant f(x_0) \leqslant M(x_0)$.

Теорема 1. *Наибольший предел $M(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 есть наибольшее из чисел, являющихся пределами последовательностей вида*

$$f(x_1), \ f(x_2), \ f(x_3), \ \ldots,$$

где $x_n \in E$, $x_n \to x_0$.

Доказательство. Если $M(x_0) = -\infty$, то легко проверить, что для *всякой* последовательности $\{x_n\} \subset E$, которая сходится к x_0, будет $f(x_n) \to M(x_0)$. Пусть $-\infty < M(x_0) < +\infty$. Тогда найдется такое N, что при $n > N$ будет $M_{1/n}(x_0) < +\infty$. Для каждого натурального $n > N$ в интервале $\left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$ можно найти такую точку $x_n \in E$, что

$$M_{1/n}(x_0) - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M_{1/n}(x_0).$$

Ясно, что $f(x_n) \to M(x_0)$. С другой стороны, если $B > M(x_0)$, то найдется такое $\delta > 0$, что $M_\delta(x_0) < B$. Для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ будет $f(x) \leqslant M_\delta(x_0)$ и потому не может найтись такой последовательности $\{x_n\} \subset E$, что

$$x_n \to x_0, \qquad f(x_n) \to B.$$

Если, наконец, $M(x_0) = +\infty$, то при всех натуральных n будет $M_{1/n}(x_0) = +\infty$ и, стало быть, можно в интервале $\left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$ найти точку $x_n \in E$, для которой $f(x_n) > n$. Тогда $f(x_n) \to M(x_0)$, а бо́льших чисел вообще не существует. Теорема доказана. Нет надобности говорить, что аналогичная теорема справедлива и для $m(x_0)$.

Определение 1. Функция $f(x)$, заданная в сегменте $[a, b]$, называется *полунепрерывной снизу* в точке x_0 этого сегмента, если

$$\underline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Если же

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = f(x_0),$$

то функция $f(x)$ называется *полунепрерывной сверху* в точке x_0.

---

[1]) Читатель узнает здесь верхнюю и нижнюю функции Бэра, о которых речь шла в § 4, гл. V.

В этом определении не предполагается конечности функции $f(x)$ ни в самой точке x_0, ни в прочих точках сегмента $[a, b]$. В частности, функция $f(x)$ полунепрерывна снизу в каждой точке x_0, где $f(x_0) = -\infty$.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то она будет в этой точке полунепрерывной одновременно сверху и снизу. Обратно, из полунепрерывности $f(x)$ в точке x_0 и сверху и снизу вытекает [при условии конечности $f(x_0)$] непрерывность $f(x)$ в точке x_0. Эти утверждения представляют лишь другую формулировку теоремы 1 из § 4 гл. V.

В дальнейшем мы останавливаемся, главным образом, на функциях, полунепрерывных снизу. Все сказанное легко перенести и на функции полунепрерывные сверху, если заметить, что полунепрерывность снизу функции $f(x)$ в точке x_0 равносильна полунепрерывности сверху в той же точке x_0 функции $-f(x)$.

Понятие полунепрерывности функции можно определить и в несколько иной форме:

***Теорема* 2.** *Пусть функция $f(x)$ задана на $[a, b]$ и $x_0 \in [a, b]$. Для того чтобы $f(x)$ была в x_0 полунепрерывной снизу, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности точек $x_n \in [a, b]$, сходящейся к x_0, было*

$$f(x_0) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} f(x_n). \tag{1}$$

В самом деле, пусть $f(x)$ полунепрерывна в x_0 снизу и $x_n \to x_0$ $(x_n \in [a, b])$. Тогда из $\{x_n\}$ выделяется такая частичная последовательность $\{x_{n_k}\}$, что $f(x_{n_k})$ стремится к $\varliminf_{n\to\infty} f(x_n)$. Отсюда, по теореме 1, следует, что

$$f(x_0) = \varliminf_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \varliminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

Обратно, пусть (1) выполнено для всякой последовательности $\{x_n\} \subset [a, b]$, сходящейся к x_0. Взяв, в частности, ту последовательность, для которой $f(x_n) \to \varliminf_{x\to x_0} f(x)$, получим, что $f(x_0) \leqslant \varliminf_{x\to x_0} f(x)$, а так как заведомо $\varliminf_{x\to x_0} f(x) \leqslant f(x_0)$, то $f(x)$ полунепрерывна снизу в x_0.

***Теорема* 3.** *Пусть $f(x)$ задана на $[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$ и $f(x_0) > -\infty$. Для того чтобы $f(x)$ была в x_0 полунепрерывна снизу, необходимо и достаточно, чтобы всякому $A < f(x_0)$ отвечало такое $\delta > 0$, что как только $|x - x_0| < \delta$ (и $x \in [a, b]$), так сейчас же $f(x) > A$.*

В самом деле, пусть $f(x)$ полунепрерывна снизу в x_0 и $A < f(x_0)$. Так как $f(x_0) = \varliminf_{x\to x_0} f(x) = m(x_0) = \lim_{\delta\to 0} m_\delta(x_0)$, то найдется такое $\delta > 0$, что $m_\delta(x_0) > A$. Так как при $|x - x_0| < \delta$ (и $x \in [a, b]$) будет $f(x) \geqslant m_\delta(x_0)$, то найденное δ — требуемое. Обратно, пусть $f(x)$ обладает свойством, указанным в теореме. Взяв любое $A < f(x_0)$ и найдя соответствующее ему δ, мы, очевидно, будем иметь $m_\delta(x_0) \geqslant A$, откуда и подавно $m(x_0) \geqslant A$.

Увеличивая A и переходя к пределу при $A \to f(x_0)$, находим

$$m(x_0) \geqslant f(x_0),$$

откуда, в связи с тем, что $m(x_0) \leqslant f(x_0)$, и вытекает полунепрерывность $f(x)$ снизу в x_0.

Если предположить $f(x_0)$ числом к о н е ч н ы м, то доказанную теорему можно высказать и в такой форме:

***Теорема* 4.** *Для того чтобы $f(x)$ была в точке x_0 полунепрерывна снизу, необходимо и достаточно, чтобы всякому $\varepsilon > 0$ отвечало такое $\delta > 0$, что, как только $|x - x_0| < \delta$ (и $x \in [a, b]$), так сейчас же*

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x).$$

Здесь особенно наглядно выступает связь понятий полунепрерывности и непрерывности.

Теорема 5. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ заданы в сегменте $[a, b]$ и полунепрерывны снизу в точке x_0. Если сумма $f(x)+g(x)$ определена[1]) *при всех $x \in [a, b]$, то и она полунепрерывна снизу в x_0.*

Доказательство. Можно считать, что $f(x_0)+g(x_0) > -\infty$, ибо иначе доказывать нечего. Но тогда и каждое из чисел $f(x_0)$ и $g(x_0)$ в отдельности также отлично от $-\infty$. Возьмем какое-нибудь число $A < f(x_0)+g(x_0)$. Тогда существуют такие B и C, что

$$B < f(x_0), \qquad C < g(x_0), \qquad B+C > A.$$

По теореме 3 существует такое $\delta > 0$, что при $|x-x_0| < \delta$ (и $x \in [a, b]$) будет $f(x) > B$, $g(x) > C$. Но тогда и подавно при этих x будет $f(x)+g(x) > A$, откуда, опять-таки по теореме 3, и следует полунепрерывность суммы $f(x)+g(x)$ в точке x_0 снизу.

Теорема 6. Пусть на $[a, b]$ задана возрастающая последовательность функций

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x) \leqslant \ldots,$$

полунепрерывных снизу в одной и той же точке $x_0 \in [a, b]$. Тогда функция

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

также полунепрерывна снизу в x_0.

Доказательство. Можно считать, что $f(x_0) > -\infty$. Если $A < f(x_0)$, то при достаточно большом n окажется $f_n(x_0) > A$. Закрепив такое n, найдем $\delta > 0$ такое, что при $|x-x_0| < \delta$ ($x \in [a, b]$) будет $f_n(x) > A$. Так как $f(x) \geqslant f_n(x)$, то при этих x и подавно окажется $f(x) > A$, откуда и вытекает теорема.

Следствие. *Если все члены ряда*

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots$$

неотрицательны и полунепрерывны снизу в точке x_0, то и сумма[2]) *этого ряда полунепрерывна снизу в x_0.*

До сих пор мы рассматривали функции, полунепрерывные в точке. Теперь мы переходим к функциям полунепрерывным на сегменте.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется *полунепрерывной снизу на сегменте* $[a, b]$, если она задана на этом сегменте и полунепрерывна снизу в каждой его точке. Аналогично определяется полунепрерывность на сегменте сверху.

Теорема 7. Для того, чтобы функция $f(x)$, заданная на сегменте $E=[a, b]$, была на нем полунепрерывна снизу, необходимо и достаточно, чтобы при любом вещественном c множество $F(c)=E(f \leqslant c)$ было замкнутым.[3])

Доказательство. Пусть $f(x)$ полунепрерывна на $[a, b]$ снизу. Если $x_n \in F(c)$ и $x_n \to x_0$, то по теореме 2 $f(x_0) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} f(x_n)$, откуда $x_0 \in F(c)$ и $F(c)$ — замкнутое множество.

Допустим теперь, что все множества $F(c)$ замкнуты и убедимся, что функция $f(x)$ полунепрерывна снизу в произвольно взятой точке x_0 сегмента $[a, b]$. Для этого положим $A = \varliminf_{x \to x_0} f(x)$.

---

[1]) Это значит, что $f(x)$ и $g(x)$ в одной и той же точке не принимают бесконечных значений разных знаков. Если же, например, при $0 \leqslant x \leqslant 1$ будет $f(x) = -\infty$, а $g(x) = \begin{cases} -\infty, & \text{при } x=0, \\ +\infty, & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$ то обе эти функции полунепрерывны снизу при $x=0$, но о сумме их нельзя говорить для $x > 0$.

[2]) Сходимости ряда не предполагается. В точках расходимости его сумма равна $+\infty$.

[3]) Отсюда, между прочим, вытекает измеримость такой функции.

По теореме 1 существует последовательность таких точек $x_n \in [a, b]$, что

$$x_n \to x_0, \quad f(x_n) \to A.$$

Допустим, что

$$f(x_0) > A. \tag{2}$$

Если обозначить через c какое-нибудь число, лежащее между A и $f(x_0)$, $A < c < f(x_0)$, то для всех достаточно больших n окажется $f(x_n) < c$, т. е. $x_n \in F(c)$. Но тогда будет и $x_0 \in F(c)$, т. е. $f(x_0) \leqslant c$, что противоречит самому выбору числа c. Значит, (2) невозможно и $f(x_0) \leqslant \varliminf_{x \to x_0} f(x)$.

Теорема доказана.

Пример. Пусть множество S есть пересечение сегмента $[a, b]$ и некоторого открытого множества G. Если $\varphi(x)$ характеристическая функция [1] множества S, то это функция полунепрерывная на $[a, b]$ снизу.

В самом деле, здесь

$$F(c) = \begin{cases} [a, b] & \text{если } c \geqslant 1, \\ [a, b] - G & \text{если } 0 \leqslant c < 1, \\ 0 & \text{если } c < 0. \end{cases}$$

Во всех этих случаях $F(c)$ замкнуто.

Теорема 8. *Функция, полунепрерывная на сегменте снизу, достигает своего наименьшего значения.* [2]

Доказательство. Пусть $f(x)$ полунепрерывна снизу на сегменте $[a, b]$ и $m = \inf \{f(x)\}$. Тогда из $[a, b]$ можно извлечь последовательность $\{x_n\}$, для которой $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = m$.

Переходя в случае надобности к частичной последовательности, можно добиться, чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась к некоторой точке x_0. Но тогда $f(x_0) = \varliminf_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim_{n \to \infty} f(x_n) = m$, а так как неравенство $f(x_0) < m$ невозможно, то $f(x_0) = m$.

Следствие. *Если полунепрерывная на сегменте снизу функция не обращается в $-\infty$, то она ограничена снизу.*

Заметим, что наибольшего значения функция, полунепрерывная снизу, может и не иметь. Такова, например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leqslant x < 1, \\ 0 & \text{при } x = 1. \end{cases}$$

Из теорем 5 и 6 вытекает, что сумма двух функций, полунепрерывных снизу на сегменте, [3] а также предел монотонно возрастающей последовательности таких функций, есть также функция, полунепрерывная снизу. Ввиду того, что функция, непрерывная на сегменте, будет на нем одновременно и полунепрерывной как сверху, так и снизу, мы получаем такой результат:

Теорема 9. *Предел возрастающей (убывающей) последовательности непрерывных функций есть функция, полунепрерывная снизу (сверху).*

Само собою разумеется, что теорема эта не обратима. Действительно, если функция $f(x)$ в какой-нибудь точке обращается в $-\infty$, то она не может быть предельной для возрастающей последовательности непрерывных функций, ибо последние всюду конечны. Однако, если ограничиться функциями, не обращающимися в $-\infty$, то теорема 9 оказывается обратимой.

---

[1] Заданная на $[a, b]$, т. е. $\varphi(x) = 1$ при $x \in S$ и $\varphi(x) = 0$ при $x \in [a, b] - S$.

[2] Которое может равняться $-\infty$ (а также и $+\infty$, если $f(x) \equiv +\infty$).

[3] В предположении существования этой суммы.

Теорема 10. *Пусть на $[a, b]$ задана полунепрерывная снизу функция $f(x)$. Если $f(x)$ не обращается в $-\infty$, то существует такая возрастающая последовательность непрерывных функций*

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x) \leqslant \ldots, \text{ что } f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Доказательство. Закрепим точку $x \in [a, b]$ и рассмотрим функцию аргумента z

$$f(z) + n\,|z - x|, \tag{3}$$

где n — натуральное число. Функция $|z-x|$ непрерывна, а потому и полунепрерывна снизу. Значит, сумма (3) полунепрерывна снизу. Не обращаясь в $-\infty$, она имеет наименьшее значение, которое можно предполагать конечным.[1])

Обозначая это наименьшее значение через $f_n(x)$,

$$f_n(x) = \min\{f(z) + n\,|z-x|\}, \tag{4}$$

мы и получаем требуемые непрерывные функции.

Действительно, пусть $z_n = z_n(x)$ есть одна из тех точек $[a, b]$, где (3) достигает значения $f_n(x)$. Тогда

$$f_n(x) = f[z_n(x)] + n\,|z_n(x) - x|. \tag{5}$$

Так как $f_n(x)$ есть наименьшее из значений функции (3), то для любой точки $y \in [a, b]$ будет $f_n(x) \leqslant f[z_n(y)] + n\,|z_n(y) - x|$. Отсюда и подавно $f_n(x) \leqslant f[z_n(y)] + n\,|z_n(y) - y| + n\,|y - x|$.

В силу (5) последнее неравенство означает, что $f_n(x) \leqslant f_n(y) + n\,|y - x|$, откуда ввиду равноправности точек x и y вытекает, что

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant n\,|x - y|,$$

и потому $f_n(x)$ непрерывная функция.

Далее, если $m > n$, то

$$f_n(x) \leqslant f[z_m(x)] + n\,|z_m(x) - x| \leqslant f[z_m(x)] + m\,|z_m(x) - x| = f_m(x),$$

так что $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x) \leqslant \ldots$. С другой стороны, полагая в справедливом для всех $z \in [a, b]$ неравенстве

$$f_n(x) \leqslant f(z) + n\,|z - x|$$

$z = x$, получим

$$f_n(x) \leqslant f(x). \tag{6}$$

Поэтому, положив $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, мы будем иметь

$$g(x) \leqslant f(x). \tag{7}$$

До сих пор мы не использовали условия полунепрерывности $f(x)$; все сказанное верно для любой функции $f(x)$, не тождественной $+\infty$ и ограниченной снизу.[2])

Теперь мы временно допустим, что $f(x)$ нигде не обращается в $+\infty$ (что, конечно, вовсе не означает ограниченности $f(x)$ сверху). Тогда из (5) и (6)

---

[1]) Если бы это наименьшее значение было равно $+\infty$, то это означало бы, что $f(x) \equiv +\infty$, а тогда теорема тривиальна — можно было бы просто положить $f_n(x) \equiv n$.

[2]) Наличие наименьшего значения у функции (3) мало существенно; если бы его не было, то можно было вместо (4) положить

$$f_n(x) = \inf\{f(z) + n\,|z - x|\}.$$

Это только немного усложнило бы рассуждение.

(с учетом ограниченности $f(z)$ снизу) следует, что $z_n(x) \to x$ при $n \to \infty$. Возьмем $\varepsilon > 0$, ему отвечает такое $\delta > 0$, что при $|z-x| < \delta$ будет $f(z) > f(x) - \varepsilon$. Для достаточно больших n будет $|z_n(x) - x| < \delta$ и потому $f[z_n(x)] > f(x) - \varepsilon$, а значит, и подавно $f_n(x) > f(x) - \varepsilon$. Отсюда $g(x) > f(x) - \varepsilon$, а так как ε произвольно, то $g(x) \geq f(x)$, откуда, в связи с (7), и вытекает теорема.

Теперь откажемся от предположения конечности $f(x)$ и положим

$$g_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \leq n, \\ n, & \text{если } f(x) > n. \end{cases}$$

Очевидно $g_1(x) \leq g_2(x) \leq g_3(x) \ldots$ и $\lim g_n(x) = f(x)$. Покажем, что функции $g_n(x)$ полунепрерывны снизу. В самом деле, если $x_0 \in [a, b]$ и $\varepsilon > 0$, то существует такое $\delta > 0$, что при $|x - x_0| < \delta$ будет $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$ и, тем более [ибо $g_n(x_0) \leq f(x_0)$],

$$f(x) > g_n(x_0) - \varepsilon.$$

С другой стороны:

$$n > g_n(x_0) - \varepsilon.$$

Поэтому, взяв $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, мы будем иметь $g_n(x) > g_n(x_0) - \varepsilon$ независимо от того, совпадает ли $g_n(x)$ с $f(x)$ или с n. Итак, действительно $g_n(x)$ полунепрерывны снизу. Но $g_n(x)$ конечны. Значит, по уже доказанному, для каждого n существует последовательность непрерывных функций $\varphi_k^{(n)}(x)$ такая, что

$$\varphi_1^{(n)}(x) \leq \varphi_2^{(n)}(x) \leq \varphi_3^{(n)}(x) \leq \ldots, \quad \lim_{k \to \infty} \varphi_k^{(n)}(x) = g_n(x).$$

Положим

$$f_n(x) = \max\left\{\varphi_n^{(1)}(x),\ \varphi_n^{(2)}(x),\ \ldots,\ \varphi_n^{(n)}(x)\right\}.$$

Нетрудно видеть, что [1])

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \ldots$$

Кроме того, все $f_n(x)$ непрерывны, как это было установлено в следствии 1 леммы 1 § 2. Наконец, легко проверить, что

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x),$$

что и завершает доказательство.

В заключение докажем интересную теорему об «отделении полунепрерывных функций с помощью непрерывных».

Теорема 11. *Пусть на $[a, b]$ даны две функции $u(x)$ и $v(x)$, причем $u(x)$ полунепрерывна сверху, а $v(x)$ полунепрерывна снизу, и $u(x) \leq v(x)$. Если $u(x)$ не обращается в $+\infty$, а $v(x)$ в $-\infty$, то существует такая непрерывная функция $f(x)$, что*

$$u(x) \leq f(x) \leq v(x).$$

Доказательство. По предыдущей теореме существуют две последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ и $\{\psi_n(x)\}$ таких непрерывных функций, что

$$\varphi_1(x) \geq \varphi_2(x) \geq \varphi_3(x) \geq \ldots, \qquad \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = u(x),$$

$$\psi_1(x) \leq \psi_2(x) \leq \psi_3(x) \leq \ldots, \qquad \lim_{n \to \infty} \psi_n(x) = v(x).$$

---

[1]) Действительно, пусть $f_n(x) = \varphi_n^{(k_n)}(x)$. Тогда

$$f_{n+1}(x) = \max\left\{\varphi_{n+1}^{(1)}(x),\ \ldots,\ \varphi_{n+1}^{(n+1)}(x)\right\} \geq \varphi_{n+1}^{(k_n)}(x) \geq \varphi_n^{(k_n)}(x) = f_n(x).$$

Введем, как обычно, функции $f_+(x)$, полагая

$$f_+(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } f(x)\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } f(x)<0.\end{cases}$$

Очевидно, если $f(x)\leqslant F(x)$, то $f_+(x)\leqslant F_+(x)$. Заметив это, образуем функции

$$(\varphi_1-\psi_1)_+\geqslant(\varphi_1-\psi_2)_+\geqslant(\varphi_2-\psi_2)_+\geqslant(\varphi_2-\psi_3)_+\geqslant\ldots$$
$$\ldots\geqslant(\varphi_n-\psi_n)_+\geqslant(\varphi_n-\psi_{n+1})_+\geqslant(\varphi_{n+1}-\psi_{n+1})_+\geqslant\ldots$$

Так как разность $\varphi_n(x)-\psi_n(x)$ стремится к $u(x)-v(x)\leqslant 0$, то[1] $(\varphi_n-\psi_n)_+\to 0$. Поэтому знакопеременный ряд

$$f(x)=\psi_1(x)+[\varphi_1(x)-\psi_1(x)]_+-[\varphi_1(x)-\psi_2(x)]_++[\varphi_2(x)-\psi_2(x)]_+-\ldots \quad (8)$$

сходится всюду на $[a, b]$.

Если в какой-нибудь точке x оказывается $u(x)=v(x)$, то в ней будет $\varphi_i(x)\geqslant\psi_k(x)$ при всех i и k. Стало быть:

$$[\varphi_n(x)-\psi_n(x)]_+=\varphi_n(x)-\psi_n(x),$$
$$[\varphi_n(x)-\psi_{n+1}(x)]_+=\varphi_n(x)-\psi_{n+1}(x),$$

и поэтому

$$f(x)=\psi_1(x)+\{\varphi_1(x)-\psi_1(x)\}-\{\varphi_1(x)-\psi_2(x)\}+\{\varphi_2(x)-\psi_2(x)\}-\ldots$$

Частные суммы этого ряда суть $\psi_1(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\varphi_2(x)$, ... Стало быть

$$f(x)=\lim\varphi_n(x)=\lim\psi_n(x)=u(x)=v(x).$$

Если же в точке x будет $u(x)<v(x)$, то для достаточно больших n окажется $\varphi_n(x)<\psi_n(x)$ [тогда и подавно $\varphi_n(x)<\psi_{n+1}(x)$]. Поэтому члены ряда (8), начиная с некоторого из них, равны нулю. Если *первая* из равных нулю скобок $[\ldots]_+$ есть $[\varphi_n(x)-\psi_n(x)]_+$, то

$$f(x)=\psi_1(x)+\{\varphi_1(x)-\psi_1(x)\}-\ldots-\{\varphi_{n-1}(x)-\psi_n(x)\}=\psi_n(x).$$

Значит, $f(x)\leqslant v(x)$. Кроме того,[2] $\psi_n(x)\geqslant\varphi_n(x)$. Значит, $f(x)\geqslant u(x)$. Таким образом, $u(x)\leqslant f(x)\leqslant v(x)$. Аналогично устанавливается это неравенство, если первая из обращающихся в нуль скобок в ряду (8) имеет вид $[\varphi_n(x)-\psi_{n+1}(x)]_+$. Итак, всегда $u(x)\leqslant f(x)\leqslant v(x)$. Остается обнаружить непрерывность $f(x)$. Но все члены ряда (8), а значит и его частные суммы непрерывны. С другой стороны, ряд (8) знакопеременный, а модуль его общего члена убывает. В таком ряде частные суммы ведут себя так:

$$S_2\leqslant S_4\leqslant S_6\leqslant\ldots,\qquad S_1\geqslant S_3\geqslant S_5\geqslant\ldots$$

Поэтому сумма $f(x)$ ряда (8) будет одновременно и пределом возрастающей последовательности непрерывных функций и пределом убывающей последовательности таких же функций. Иначе говоря, $f(x)$ одновременно полунепрерывна снизу и сверху, а тогда она непрерывна. Теорема доказана.

---

[1]) Мы пользуемся здесь тем, что из соотношения $f_n(x)\to F(x)$ вытекает соотношение $[f_n(x)]_+\to F_+(x)$.

[2]) Именно потому, что $[\varphi_n(x)-\psi_n(x)]_+=0$.

ГЛАВА XVI

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА

§ 1. Введение

В конце гл. IX был приведен пример функции

$$f(x)=x^2\cos\frac{\pi}{x^2} \qquad [f(0)=0],$$

которая всюду на [0, 1] имеет конечную производную $f'(x)$, но последняя оказывается не интегрируемой по Лебегу. Таким образом, операция интегрирования по Лебегу не полностью решает задачу восстановления первообразной функции по ее конечной производной. В 1912 г. французский математик А. Данжуа ввел более общий процесс интегрирования,[1] чем лебеговский, и показал, что этот процесс полностью решает указанную выше задачу.

С другой стороны, в 1914 г. немецкий ученый О. Перрон также ввел некоторое определение интеграла, основанное на других принципах, чем определение Данжуа, и также полностью решающее задачу восстановления первообразной функции по ее конечной производной.

Последующими работами Г. Хаке (1921), П. С. Александрова (1924) и Г. Ломана (1925) была установлена, однако, полная тождественность интегралов Данжуа и Перрона. Таким образом, оказалось, что Перроном была предложена лишь новая форма определения интеграла Данжуа, почему этот интеграл в настоящее время принято называть интегралом Данжуа—Перрона.

В 1916 г., независимо друг от друга, А. Данжуа и русский математик А. Я. Хинчин дали еще более общее определение интеграла, позволяющее восстанавливать первообразную функцию не только по ее обыкновенной производной, но и по ее так называемой аппроксимативной (или асимптотической) производной[2]. Этот более общий интеграл принято называть интегралом Данжуа—Хинчина, или «широким» интегралом Данжуа; в отличие от него интеграл Данжуа—Перрона называют «узким» интегралом Данжуа.

Мы подробно изучим теорию интегралов Данжуа—Перрона. По поводу же интегралов Данжуа—Хинчина ограничимся лишь их определением, отсылая за подробностями к монографии С. Сакса.[3]

---

[1] Сам Данжуа назвал свой процесс интегрирования «тотализацией», а построенный им интеграл «тоталом», но мы не будем придерживаться этой терминологии.

[2] Число A называется аппроксимативной производной функции $f(x)$ в точке x_0, если существует такое множество E, имеющее x_0 точкой плотности, что при $x \in E$ и $x \to x_0$ оказывается

$$\lim\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A.$$

[3] С. Сакс, Теория интеграла, ИЛ, 1949.

§ 2. Определение интеграла Перрона

Для дальнейшего нам потребуется следующее

Определение 1. Пусть $F(x)$ конечная функция, заданная на отрезке $[a, b]$ и x_0 точка этого отрезка. Числа

$$\underline{D}F(x_0)=\underline{\lim_{x\to x_0}}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0},\qquad \overline{D}F(x_0)=\overline{\lim_{x\to x_0}}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$$

называются соответственно *нижней* и *верхней производной* функции $F(x)$ в точке x_0.

Легко понять, что эти числа (они могут равняться и бесконечности определенного знака) суть наименьшее и наибольшее из производных чисел $F(x)$ в точке x_0.

Лемма 1. *Пусть на $[a, b]$ заданы конечные функции $U(x)$ и $V(x)$. Если при некотором $x_0\in[a, b]$ будет*

$$\underline{D}U(x_0)>-\infty,\qquad \overline{D}V(x_0)<+\infty \tag{1}$$

и $R(x)=U(x)-V(x)$, то

$$\underline{D}R(x_0)\geqslant\underline{D}U(x_0)-\overline{D}V(x_0).$$

Доказательство. Рассмотрим такую последовательность $\{h_k\}$, что $h_k\neq 0$, $h_k\to 0$ и

$$\lim\frac{R(x_0+h_k)-R(x_0)}{h_k}=\underline{D}R(x_0).$$

Переходя в случае надобности от самой последовательности $\{h_k\}$ к надлежащей ее подпоследовательности, можно добиться существования определенных пределов

$$\lambda=\lim\frac{U(x_0+h_k)-U(x_0)}{h_k},\qquad \mu=\lim\frac{V(x_0+h_k)-V(x_0)}{h_k}.$$

Согласно (1) будет $\lambda>-\infty$ и $\mu<+\infty$, так что разность $\lambda-\mu$ будет иметь смысл. В силу этого окажется $\underline{D}R(x_0)=\lambda-\mu$. Остается заметить, что $\lambda\geqslant\underline{D}U(x_0)$, $\mu\leqslant\overline{D}V(x_0)$.

Следствие. *Если $U_1(x)$ и $U_2(x)$ — конечные функции и*

$$\underline{D}U_1(x)>-\infty,\quad \underline{D}U(x)>-\infty,$$

то

$$\underline{D}[U_1(x)+U_2(x)]\geqslant\underline{D}U_1(x)+\underline{D}U_2(x).$$

Действительно, положив $U_2(x)=-V(x)$ и заметив, что

$$\underline{D}U_2(x)=-\overline{D}V(x),$$

можем применить лемму.

Определение 2. Пусть $f(x)$ — функция (не обязательно конечная), заданная на $[a, b]$. Непрерывная на $[a, b]$ функция $F(x)$ называется[1])

надфункцией для $f(x)$, если

1) $F(a)=0$,
2) $\underline{D}F(x)>-\infty$ для всех $x\in[a, b]$,
3) $\underline{D}F(x)\geqslant f(x)$ для всех $x\in[a, b]$.

подфункцией для $f(x)$, если

1) $F(a)=0$,
2) $\overline{D}F(x)<+\infty$ для всех $x\in[a, b]$,
3) $\overline{D}F(x)\leqslant f(x)$ для всех $x\in[a, b]$.

---

[1]) Таким образом мы переводим немецкие Oberfunktion и Unterfunktion.

Понятия надфункции и подфункции являются обобщениями понятия первообразной. Именно, вполне очевидна следующая

Лемма 2. *Если конечная функция $f(x)$ является производной функции $F(x)$ (причем $F(a)=0$), то $F(x)$ служит для $f(x)$ одновременно и надфункцией и подфункцией.*

Для всего дальнейшего большое значение имеет

Лемма 3. *Если $U(x)$ есть надфункция, а $V(x)$ — подфункция для одной и той же функции $f(x)$, то разность $R(x)=U(x)-V(x)$ не убывает.*

Доказательство. В силу леммы 1 всюду на $[a, b]$ будет

$$\underline{D}R(x) \geqslant \underline{D}U(x) - \overline{D}V(x) \geqslant 0,$$

и дело сводится к лемме 1 из § 7 гл. IX.

Следствие 1. *В условиях леммы 3 будет $U(b) \geqslant V(b)$.*

Из сопоставления этого предложения с леммой 2 вытекает

Следствие 2. *В условиях леммы 2 число $F(b)$ одновременно является наименьшим из чисел $U(b)$ и наибольшим из чисел $V(b)$, где $U(x)$ и $V(x)$ произвольные надфункция и подфункция функции $f(x)$*

$$F(b)=\min\{U(b)\}=\max\{V(b)\}.$$

Теперь мы можем дать основное

Определение 3. Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, называется *интегрируемой в смысле Перрона* [или интегрируемой (P)] на этом отрезке, если

1) она имеет хоть одну надфункцию $U(x)$ и хоть одну подфункцию $V(x)$;

2) точная нижняя граница множества $\{U(b)\}$ значений всех надфункций в точке $x=b$ совпадает с точной верхней границей множества $\{V(b)\}$ значений всех подфункций в той же точке

$$\inf\{U(b)\}=\sup\{V(b)\}. \qquad (2)$$

Если $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ интегрируема (P), то общее значение чисел (2) называется *интегралом Перрона* функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается через

$$(P)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Приведенное выше следствие 2 лемм 2 и 3 можно теперь формулировать в виде теоремы: [1])

Теорема. *Если функция $F(x)$ всюду на $[a, b]$ имеет конечную* [2]) *производную $f(x)$, то последняя интегрируема (P) и*

$$F(b)-F(a)=(P)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Таким образом, интеграл Перрона действительно до конца решает задачу восстановления первообразной по ее конечной производной. Нельзя, однако, не отметить, что приведенное определение интеграла Перрона не дает никакого процесса построения этого интеграла. Указанный дефект будет снят в теории интеграла Данжуа, который, как мы увидим ниже, определяется при помощи совершенно определенной конструкции.

---

[1]) Из этой теоремы сразу вытекает существование функций, интегрируемых (P) и не интегрируемых (L). Такова, например, производная функция $f(x)=x^2\cos\frac{\pi}{x^2}$ $[0<x\leqslant 1,\ f(0)=0]$.

[2]) Условие конечности $f(x)$ отбросить нельзя. См. В. Я. Козлов, Пример Гольдовского, Мат. сб., 1951, 28, № 1, 197—204.

В заключение этого параграфа отметим простое и важное условие (P)-интегрируемости функции, непосредственно вытекающее из самого определения интеграла Перрона.

Лемма 4. Для того чтобы функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, была на нем интегрируема (P), необходимо и достаточно, чтобы всякому $\varepsilon > 0$ отвечали такие надфункция $U(x)$ и подфункция $V(x)$, что $U(b) - V(b) < \varepsilon$.

§ 3. Основные свойства интеграла Перрона

Теорема 1. Если функция интегрируема (P), то она почти везде конечна.

Доказательство. Пусть $U(x)$ и $V(x)$ суть надфункция и подфункция функции $f(x)$, интегрируемой (P) на отрезке $[a, b]$. Положим $R(x) = U(x) - V(x)$. В силу леммы 1 § 2 всюду на $[a, b]$ будет

$$\underline{D}R(x) \geqslant \underline{D}U(x) - \overline{D}V(x).$$

Но, если в какой-нибудь точке x_0 окажется $f(x_0) = +\infty$, то тем более будет и $\underline{D}U(x_0) = +\infty$, а так как $\overline{D}V(x_0) < +\infty$, то

$$\underline{D}R(x_0) = +\infty.$$

Последнее равенство имеет место и в каждой точке x_0, где $f(x_0) = -\infty$. Таким образом, множество точек, в которых $f(x)$ обращается в бесконечность, есть часть множества точек, в которых $R'(x) = +\infty$, и наша теорема вытекает из того факта, что производная непрерывной возрастающей функции $R(x)$ может равняться $+\infty$ лишь на множестве меры 0.

Теорема 2. Если $f(x)$ интегрируема (P) на отрезке $[a, b]$ и $a < c < b$, то $f(x)$ будет интегрируема (P) и на каждом из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, причем[1]

$$(P)\int_a^b f(x)\,dx = (P)\int_a^c f(x)\,dx + (P)\int_c^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, а $U(x)$ и $V(x)$ — такие надфункция и подфункция функции $f(x)$, что $U(b) - V(b) < \varepsilon$.

Ясно, что и на отрезке $[a, c]$ они также являются надфункцией и подфункцией для $f(x)$. С другой стороны, разность $U(x) - V(x)$ возрастает и потому $U(c) - V(c) < \varepsilon$.

В силу произвольности ε отсюда вытекает (P)-интегрируемость $f(x)$ на отрезке $[a, c]$. Отметим, что

$$V(c) \leqslant (P)\int_a^c f(x)\,dx \leqslant U(c). \tag{2}$$

Для отрезка $[c, b]$ надфункцией и подфункцией для $f(x)$ будут служить

$$U^*(x) = U(x) - U(c), \qquad V^*(x) = V(x) - V(c).$$

Так как $U^*(b) - V^*(b) \leqslant U(b) - V(b) < \varepsilon$, то и на $[c, b]$ функция $f(x)$ интегрируема (P), причем

$$V(b) - V(c) \leqslant (P)\int_c^b f(x)\,dx \leqslant U(b) - U(c). \tag{3}$$

Складывая (2) и (3), находим, что

$$V(b) \leqslant (P)\int_a^c f(x)\,dx + (P)\int_c^b f(x)\,dx \leqslant U(b),$$

откуда следует (1).

---

[1]) Равенство (1) означает, что интеграл Перрона есть аддитивная функция промежутка интегрирования.

Теорема 3. *Если $a < c < b$ и $f(x)$ интегрируема (P) на каждом из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, то и на всем $[a, b]$ она интегрируема (P).*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $U_1(x)$ и $V_1(x)$ суть надфункция и подфункция $f(x)$ на $[a, c]$, а $U_2(x)$ и $V_2(x)$ ее надфункция и подфункция на $[c, b]$, причем $U_1(c) - V_1(c) < \varepsilon$, $U_2(b) - V_2(b) < \varepsilon$.

Введем в рассмотрение функции

$$U(x) = \begin{cases} U_1(x) & \text{при } a \leqslant x \leqslant c, \\ U_1(c) + U_2(x) & \text{при } c \leqslant x \leqslant b, \end{cases}$$

$$V(x) = \begin{cases} V_1(x) & \text{при } a \leqslant x \leqslant c, \\ V_1(c) + V_2(x) & \text{при } c \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

Легко видеть, [1]) что это надфункция и подфункция $f(x)$ на всем $[a, b]$. Поскольку же $U(b) - V(b) < 2\varepsilon$, а ε произвольно, то теорема доказана.

Теорема 4. *Если $f(x)$ интегрируема (P) на $[a, b]$, а k конечная постоянная, то функция $k\,f(x)$ также интегрируема (P) на $[a, b]$ и*

$$(P)\int_a^b kf(x)\,dx = k\,(P)\int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Доказательство. Для $k = 0$ теорема тривиальна. [2]) Пусть $k > 0$. Если $U(x)$ и $V(x)$ суть надфункция и подфункция для $f(x)$, то [3]) $kU(x)$ и $kV(x)$ оказываются надфункцией и подфункцией для $kf(x)$. Ввиду того, что разность $kU(b) - kV(b)$ вместе с $U(b) - V(b)$ может быть сделана сколь угодно малой, функция $kf(x)$ будет (P)-интегрируемой. Равенство (4) вытекает из неравенств

$$kV(b) \leqslant P\int_a^b kf(x)\,dx \leqslant kU(b).$$

Пусть, наконец, $k < 0$. Тогда надфункцией и подфункцией для $kf(x)$ будут $kV(x)$ и $kU(x)$, и доказательство заканчивается как и выше.

Теорема 5. *Пусть каждая из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируема (P) на отрезке $[a, b]$. Если их сумма определена на всем $[a, b]$ то и она интегрируема (P) на этом отрезке, причем*

$$(P)\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = (P)\int_a^b f_1(x)\,dx + (P)\int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $U_1(x)$ и $U_2(x)$ суть надфункции для $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Если $U(x) = U_1(x) + U_2(x)$, то [см. следствие леммы 1 § 2] эта функция будет надфункцией суммы $f_1(x) + f_2(x)$. Аналогичным образом сумма подфункций функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ будет подфункцией их суммы. Остальное ясно.

Теорема 6. *Если функция $f(x)$ интегрируема (P) на отрезке $[a, b]$, а функция $g(x)$, заданная на том же отрезке, ей эквивалентна, то и $g(x)$ интегрируема (P) на $[a, b]$, причем*

$$(P)\int_a^b g(x)\,dx = (P)\int_a^b f(x)\,dx. \tag{5}$$

---

[1]) В самом деле, $\underline{D}U(c) = \min\{\underline{D}U_1(c), \underline{D}U_2(c)\}$, откуда следуют оба неравенства: $\underline{D}U(c) > -\infty$, $\underline{D}U(c) \geqslant f(c)$.

[2]) Функция $\varphi(x) \equiv 0$ есть производная функции $F(x) \equiv c$. Значит, по теореме § 2 $\varphi(x)$ интегрируема (P) и $(P)\int_a^b 0\,dx = 0$.

[3]) При $k > 0$ будет $\underline{D}[kF(x)] = k\underline{D}F(x)$ и $\overline{D}[kF(x)] = k\overline{D}F(x)$.

Доказательство. Обозначим через E множество точек, в которых $g(x) \neq f(x)$.

Так как $mE=0$, то (см. теорему 6, § 2, гл. VIII) существует такая непрерывная возрастающая функция $\sigma(x)$, что во всех точках E оказывается $\sigma'(x)=+\infty$.

Можно считать, [1] что $\sigma(a)=0$, $\sigma(b)=1$.

Возьмем $\varepsilon>0$ и рассмотрим такие надфункцию $U(x)$ и подфункцию $V(x)$ функции $f(x)$, что $U(b)-V(b)<\varepsilon$.

Пусть $U^*(x)=U(x)+\varepsilon\sigma(x)$, $V^*(x)=V(x)-\varepsilon\sigma(x)$. Легко показать, [2] что это суть надфункция и подфункция уже и для $g(x)$. Но так как

$$U^*(b)-V^*(b)<3\varepsilon,$$

то $g(x)$ интегрируема (P). Наконец, из неравенств

$$V(b)-\varepsilon \leqslant (P)\int_a^b g(x)\,dx \leqslant U(b)+\varepsilon$$

вытекает (5).

Замечание. Последняя теорема позволяет в формулировке теоремы 5 отбросить оговорку о том, что сумма $f_1(x)+f_2(x)$ должна быть определена во всех точках $[a, b]$. В самом деле, так как слагаемые (по теореме 1) почти везде конечны, то сумма $f_1(x)+f_2(x)$ во всяком случае определена почти везде на $[a, b]$, а на остающемся множестве меры 0 ее можно доопределить по произволу.

§ 4. Неопределенный интеграл Перрона

Если $f(x)$ задана и интегрируема (P) на отрезке $[a, b]$, то функция

$$F(x)=C+(P)\int_a^x f(t)\,dt \quad (a<x\leqslant b)$$

называется ее *неопределенным интегралом* Перрона. Положив

$$(P)\int_a^a f(t)\,dt=0,$$

мы сможем рассматривать $F(x)$ для всех x из $[a, b]$.

Теорема 1. Неопределенный интеграл Перрона непрерывен.

Доказательство. Пусть $U(x)$ и $V(x)$ суть надфункция и подфункция, удовлетворяющие неравенству $U(b)-V(b)<\varepsilon$.

Так как разность $U(x)-V(x)$ возрастает, то при всяком x_0 из $[a, b]$ будет $U(x_0)-V(x_0)<\varepsilon$.

---

[1] В противном случае вместо $\sigma(x)$ надо рассмотреть

$$\sigma_1(x)=\frac{\sigma(x)-\sigma(a)}{\sigma(b)-\sigma(a)}.$$

[2] Действительно, из факта возрастания $\sigma(x)$, следует, что $\underline{D}U^*(x) \geqslant \underline{D}U(x)$. Поэтому всюду на $[a, b]$ будет $\underline{D}U^*(x)>-\infty$. Отсюда же вытекает, что при $x \overline{\in} E$ будет $\underline{D}U^*(x) \geqslant g(x)$. Однако при $x \in E$ последнее неравенство очевидно, так как для такого x будет $\underline{D}U^*(x) \geqslant \underline{D}U(x)+\underline{D}\sigma(x)=+\infty$. Таким образом, $U^*(x)$ есть надфункция для $g(x)$. Для $V^*(x)$ рассуждение аналогично.

С другой стороны, и на всяком отрезке $[a, x_0]$ функции $U(x)$ и $V(x)$ будут являться надфункцией и подфункцией для $f(x)$. Стало быть

$$V(x_0) \leqslant (P)\int_a^{x_0} f(t)\,dt \leqslant U(x_0).$$

Таким образом, при всех x из $[a, b]$ будет

$$0 \leqslant U(x) - (P)\int_a^x f(t)\,dt < \varepsilon.$$

Возможность сколь угодно хорошего равномерного приближения к интегралу $(P)\int_a^x f(t)\,dt$ при помощи **непрерывных** функций $U(x)$ и доказывает теорему.

Теорема 2. *Если $f(x)$ интегрируема (P) на $[a, b]$,*

$$F(x) = (P)\int_a^x f(t)\,dt, \tag{1}$$

а $U(x)$ и $V(x)$ суть надфункция и подфункция для $f(x)$, то каждая из разностей

$$U(x) - F(x), \quad F(x) - V(x) \tag{2}$$

есть возрастающая функция.

Доказательство. Пусть $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. Функция $U(x) - U(x_1)$ будет надфункцией для $f(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$. Отсюда

$$(P)\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \leqslant U(x_2) - U(x_1),$$

или, что то же самое, $F(x_2) - F(x_1) \leqslant U(x_2) - U(x_1)$ и, стало быть,

$$U(x_1) - F(x_1) \leqslant U(x_2) - F(x_2).$$

Для второй из разностей (2) все аналогично.

Теорема 3. *Функция, интегрируемая (P), почти везде является производной своего неопределенного интеграла Перрона.*

Доказательство. Сохраняя обозначение (1), найдем такую надфункцию $U(x)$, что $U(b) - F(b) < \varepsilon^2$, где $\varepsilon > 0$ заранее взятое число. Пусть $R(x) = U(x) - F(x)$. Это возрастающая и непрерывная функция. Как известно, у нее почти везде существует конечная производная $R'(x)$, причем

$$(L)\int_a^b R'(x)\,dx \leqslant R(b) - R(a) < \varepsilon^2.$$

Обозначим через $A(\varepsilon)$ множество тех точек, в которых оказывается

$$\underline{D}F(x) < f(x) - \varepsilon.$$

В каждой из этих точек и подавно будет

$$\underline{D}F(x) < \underline{D}U(x) - \varepsilon, \text{ откуда}^{1)} \ \underline{D}U(x) - \underline{D}F(x) > \varepsilon.$$

---

[1]) Неравенство $\underline{D}F(x) < f(x) - \varepsilon$ гарантирует, что $\underline{D}F(x) < +\infty$, а так как $\underline{D}U(x) > -\infty$, то разность $\underline{D}U(x) - \underline{D}F(x)$ имеет смысл.

Обозначим, далее, через M множество тех точек $[a, b]$, где существует конечная $R'(x)$ (таким образом, $mM = b - a$). Если $x \in M$, то [1])

$$\underline{D}U(x) - \underline{D}F(x) = R'(x).$$

Значит, пересечение $MA(\varepsilon)$ есть часть множества $B(\varepsilon)$ тех точек $[a, b]$, в которых $R'(x) > \varepsilon$. Но

$$\varepsilon mB(\varepsilon) \leqslant (L) \int\limits_{B(\varepsilon)} R'(x)\,dx \leqslant (L) \int\limits_a^b R'(x)\,dx < \varepsilon^2,$$

откуда следует, что $mB(\varepsilon) < \varepsilon$ и, стало быть, $m^*A(\varepsilon) < \varepsilon$.

Заменяя здесь ε на $\frac{\varepsilon}{2^n}$, находим

$$m^* A\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Но очевидно, что $E(\underline{D}F < f) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right)$. Отсюда видно, что $m^*E \times$ $\times (\underline{D}F < f) < \varepsilon$.

В силу произвольности ε ясно, что почти везде на $[a, b]$ будет

$$\underline{D}F(x) \geqslant f(x). \qquad (3)$$

Аналогично, привлекая подфункции, можно доказать, что почти везде на $[a, b]$ будет

$$\overline{D}F(x) \leqslant f(x), \qquad (4)$$

а всюду, где выполнены оба неравенства (3) и (4), существует производная $F'(x)$, равная $f(x)$.

Следствие 1. *Всякая (P)-интегрируемая функция измерима.*

В самом деле, сохраняя введенные обозначения и полагая

$$F(x) = F(b) \quad \text{для} \quad x > b,$$

мы видим, что $f(x)$ почти для всех x из $[a, b]$ представляется в форме предела последовательности непрерывных функций

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} n\left[F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right].$$

Следствие 2. *Надфункция $U(x)$ и подфункция $V(x)$ любой (P)-интегрируемой функции почти везде дифференцируемы.*

В самом деле, в тех же обозначениях, что и выше, будет

$$U(x) = [U(x) - F(x)] + F(x),$$

а каждая из функций $U(x) - F(x)$ и $F(x)$ почти везде дифференцируема. Для $V(x)$ — все аналогично.

§ 5. Сравнение интегралов Перрона и Лебега

Как мы уже отметили в § 2 (см. сноску на стр. 454), существуют функции, интегрируемые по Перрону, но не по Лебегу.

В этом параграфе мы покажем, что обратного быть не может. Для этой цели нам потребуются две леммы.

---

[1]) Действительно, $\frac{U(x+h) - U(x)}{h} = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \frac{R(x+h) - R(x)}{h}$. Отсюда ясно, что $\underline{D}U(x) = \underline{D}F(x) + R'(x)$.

Лемма 1. Пусть функция $u(x)$ суммируема на $[a, b]$ и

$$U(x) = (L) \int_a^x u(t)\,dt.$$

Если $u(x)$ в точке x_0 полунепрерывна снизу, то

$$\underline{D}U(x_0) \geq u(x_0).$$

Доказательство. Можно считать, что $u(x_0) > -\infty$, ибо иначе нечего доказывать. Взяв какое-либо A, удовлетворяющее неравенству $A < u(x_0)$, мы сможем гарантировать существование такого $\delta > 0$, что при всех $t \in [a, b]$, для которых $|t - x_0| < \delta$, будет $u(t) > A$.

В таком случае при $|x - x_0| < \delta$ будет [1])

$$(L) \int_{x_0}^x u(t)\,dt \geq A(x - x_0), \quad \text{откуда} \quad \frac{U(x) - U(x_0)}{x - x_0} \geq A$$

и, стало быть, все производные числа $DU(x_0)$ не меньше A. В частности, и $\underline{D}U(x_0) \geq A$. Остальное ясно.

Лемма 2. Пусть $f(x)$ суммируема на $[a, b]$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует функция $u(x)$ со следующими свойствами:

1) *она задана на $[a, b]$ и всюду полунепрерывна снизу;*
2) *всюду $u(x) > -\infty$;*
3) *всюду $u(x) \geq f(x)$;*
4) *функция $u(x)$ суммируема и*

$$(L) \int_a^b u(x)\,dx < \varepsilon + (L) \int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. I. Допустим сначала, что $f(x)$ неотрицательна и ограничена $0 \leq f(x) < M$.

Положим

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{1 + b - a}, \tag{1}$$

где ε — число, упомянутое в условии леммы, и подберем столь большое натуральное n, чтобы оказалось $n\sigma > M$.

Введем в рассмотрение множества

$$E_k = E(k\sigma \leq f < (k+1)\sigma) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Для каждого из них существует такое ограниченное открытое множество G_k, что

$$G_k \supset E_k, \qquad mG_k < mE_k + \frac{1}{(k+1)\,2^{k+1}}.$$

Пусть $S_k = [a, b]\,G_k$ и $\varphi_k(x)$ — характеристическая функция множества S_k (мы задаем $\varphi_k(x)$ на исходном отрезке $[a, b]$). Все функции $\varphi_k(x)$ полунепрерывны снизу. [2])

Положим $u(x) = \sigma \sum\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\varphi_k(x)$ и покажем, что это требуемая функция. В самом деле, она неотрицательна, полунепрерывна снизу и ограничена сверху. Пусть $x \in [a, b]$. Тогда при некотором i окажется $x \in E_i \subset S_i$ и $\varphi_i(x) = 1$. В таком случае

$$u(x) \geq (i+1)\,\sigma > f(x).$$

---

[1]) Мы приспособили запись к случаю $x > x_0$. Читатель сам проведет рассуждение для $x < x_0$.

[2]) См. пример, приведенный в § 4 гл. XV.

Наконец,

$$(L)\int_a^b u(x)\,dx=\sigma\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,mS_k<\sigma\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\left[mE_k+\frac{1}{(k+1)\,2^{k+1}}\right].$$

Отсюда

$$(L)\int_a^b u(x)\,dx<\sum_{k=0}^{n-1}\sigma kmE_k+\sigma\,[(b-a)+1].$$

Учитывая (1) и неравенство

$$\sigma kmE_k\leqslant(L)\int_{E_k} f(x)\,dx,$$

находим, что

$$(L)\int_a^b u(x)\,dx<\varepsilon+(L)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Таким образом, для рассматриваемого случая лемма доказана.

II. Откажемся от предположения ограниченности функции $f(x)$, продолжая, однако, пока еще считать ее неотрицательной.

Положим

$$S_n(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } f(x)\leqslant n,\\ n, & \text{если } f(x)>n,\end{cases}$$

и пусть

$$f_1(x)=S_1(x),\qquad f_n(x)=S_n(x)-S_{n-1}(x)\qquad (n=2,\ 3,\ \ldots).$$

Функции $f_n(x)$ измеримы, неотрицательны и ограничены, причем

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

По доказанному, для каждого натурального n существует полунепрерывная снизу функция $u_n(x)$, удовлетворяющая неравенствам

$$u_n(x)\geqslant f_n(x),\qquad (L)\int_a^b u_n(x)\,dx<\frac{\varepsilon}{2^n}+(L)\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Легко видеть[1]), что функция $u(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ удовлетворяет всем требованиям леммы.

III. Рассмотрим, наконец, общий случай, когда $f(x)$ есть произвольная суммируемая функция.

Положим

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } f(x)\geqslant -n,\\ -n, & \text{если } f(x)<-n.\end{cases}$$

Очевидно

$$|f_n(x)|\leqslant|f(x)|,\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x).$$

Стало быть

$$\lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b f_n(x)\,dx=(L)\int_a^b f(x)\,dx.$$

[1]) См. следствие теоремы 6, § 4, гл. XV.

Выберем и закрепим такое n, при котором

$$(L)\int_a^b f_n(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2} + (L)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Функция $n+f_n(x)$ будет неотрицательной и суммируемой. По доказанному существует полунепрерывная снизу функция $u^*(x)$, такая что

$$u^*(x) \geqslant n+f_n(x),\quad (L)\int_a^b u^*(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2} + (L)\int_a^b [n+f_n(x)]\,dx.$$

В таком случае функция $u(x)=u^*(x)-n$ обладает всеми требуемыми свойствами.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ интегрируема в смысле Лебега, то она интегрируема на этом отрезке и в смысле Перрона и*

$$(P)\int_a^b f(x)\,dx = (L)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Возьмем $\varepsilon>0$ и рассмотрим ту полунепрерывную снизу функцию $u(x)$, о которой шла речь в предыдущей лемме. Если

$$U(x)=(L)\int_a^x u(t)\,dt,$$

то $U(x)$ будет надфункцией для $f(x)$. В самом деле, ее непрерывность и равенство $U(a)=0$ очевидны. Далее, согласно лемме 1, при любом x из $[a, b]$ будет $\underline{D}U(x) \geqslant u(x)$, откуда вытекают оба неравенства $\underline{D}U(x) > -\infty$, $\underline{D}U(x) \geqslant f(x)$, характеризующие надфункцию.

В силу произвольности числа ε из неравенства

$$U(b)=(L)\int_a^b u(t)\,dt < \varepsilon + (L)\int_a^b f(x)\,dx$$

вытекает, что

$$\inf\{U(b)\} \leqslant (L)\int_a^b f(x)\,dx,$$

где $\{U(b)\}$ означает множество значений всевозможных надфункций при $x=b$.

Аналогичным образом устанавливается, что

$$\sup\{V(b)\} \geqslant (L)\int_a^b f(x)\,dx,$$

где введенные обозначения понятны сами собой. Но так как всегда

$$\sup\{V(b)\} \leqslant \inf\{U(b)\},$$

то оба эти числа равны интегралу $(L)\int_a^b f(x)\,dx$, что и завершает доказательство.

Интересным дополнением этой теоремы служит

Теорема 2. *Всякая неотрицательная и интегрируемая (P) функция обязательно интегрируема (L).*

Доказательство. Пусть $f(x)$ функция, о которой идет речь, и $U(x)$ ее надфункция. Тогда из неравенств $\underline{D}U(x) \geqslant f(x) \geqslant 0$ вытекает, что $U(x)$ — возрастающая функция и потому ее производная $U'(x)$ (существующая почти

везде) суммируема[1]). Но в таком случае теорема следует из неравенства $0 \leqslant f(x) \leqslant U'(x)$, имеющего место во всех точках существования $U'(x)$.

Следствие. *Если $f(x)$ измеримая функция и существует интеграл Перрона*

$$(P)\int_a^b |f(x)|\,dx,$$

то $f(x)$ суммируема.

Таким образом, интеграл Перрона является абсолютно сходящимся тогда и только тогда, когда он приводится к интегралу Лебега.

§ 6. Абстрактно заданный интеграл и его обобщение

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые общие понятия, которые будут в дальнейшем использованы при изложении теории интегралов Данжуа.

Мы уже знакомы с целым рядом интегралов: R (Римана), L (Лебега), P (Перрона). Все эти интегралы обладают некоторыми общими свойствами, и мы хотим охватить эти свойства некоей единой схемой.

Пусть каждому отрезку $[a, b]$, где $a \leqslant b$, соотнесен некоторый непустой класс $T([a, b])$, состоящий из каких-то функций, заданных на $[a, b]$.

Систему подобных классов мы условимся называть п р а в и л ь н о й, если при любом $c \in [a, b]$ будет $T([a, b]) = T([a, c])\,T([c, b])$.[2])

Пусть $\mathfrak{M} = \{T([a, b])\}$ — некоторая правильная система классов и пусть на каждом классе $T([a, b])$ задан функционал

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{T}}}(f),$$

сопоставляющий каждой функции f из $T([a, b])$ определенное вещественное число. Этот функционал мы будем называть *интегралом*, если для любой $f \in T([a, b])$ и любого $c \in [a, b]$ будет[3])

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{T}}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{\mathbf{T}}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{\mathbf{T}}}(f) \tag{1}$$

и (при $x \in [a, b]$)

$$\lim_{x \to c} \overset{x}{\underset{a}{\mathbf{T}}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{\mathbf{T}}}(f). \tag{2}$$

Иными словами, интеграл есть аддитивная и непрерывная функция отрезка.

Все функции, входящие в класс $T([a, b])$, мы будем называть T-интегрируемыми на $[a, b]$. Из условия правильности системы классов $T([a, b])$ вытекает, что всякая функция, T-интегрируемая на отрезке $[a, b]$, будет T-интегрируема и на каждом отрезке[4]) $[p, q]$, содержащемся в $[a, b]$.

Рассмотрим некоторые свойства введенного понятия интеграла. Пусть $f(x)$ функция, заданная на $[a, b]$ и $c \in [a, b]$. Если при любом $\delta > 0$ функция $f(x)$ не будет T-интегрируемой на отрезке $[c-\delta, c+\delta]\,[a, b]$,

---

[1]) См. теорему 5, § 2, гл. VIII.

[2]) Точный смысл этого соотношения таков: функция $f(x)$, заданная на $[a, b]$, входит в $T([a, b])$, тогда и только тогда, когда обе функции, получающиеся из $f(x)$ при рассмотрении ее лишь на $[a, c]$ или на $[c, b]$, входят в соответствующие классы $T([a, c])$ и $T[(c, b)]$.

[3]) В частности, если $f \in T([a, a])$, то $\overset{a}{\underset{a}{\mathbf{T}}}(f) = \overset{a}{\underset{a}{\mathbf{T}}}(f) + \overset{a}{\underset{a}{\mathbf{T}}}(f)$, т. е. $\overset{a}{\underset{a}{\mathbf{T}}}(f) = 0$: интеграл «по точке» равен нулю.

[4]) И, в частности, на каждой точке $c \in [a, b]$.

то точку c условимся называть T-особой для функции $f(x)$, а множество всех таких точек будем обозначать через $S_T(f;\ [a,\ b])$. Иногда вместо $S_T(f;\ [a,b])$ мы будем писать $S_T([a,\ b])$, или $S_T(f)$ и даже просто S_T.

Ясно, что у функции T-интегрируемой на $[a,\ b]$, будет $S_T([a,b])=0$. Справедливо и обратное, как показывает следующая лемма.

Лемма 1. *Если $f(x)$ задана на $[a,\ b]$ и не входит в $T([a,\ b])$, то*

$$S_T(f;\ [a,\ b])\neq 0.$$

Доказательство. Положим $d=\frac{a+b}{2}$. Хоть один из отрезков $[a,\ d]$ и $[d,\ b]$ обладает тем свойством, что на нем $f(x)$ не будет T-интегрируемой. Обозначим его через $[a_1,\ b_1]$ и, положив $d_1=\frac{a_1+b_1}{2}$, обозначим через $[a_2,\ b_2]$ тот из отрезков $[a_1,\ d_1]$ и $[d_1,\ b_1]$, на котором $f(x)$ не T-интегрируема. Продолжая этот процесс, мы построим бесконечную последовательность вложенных отрезков $[a,\ b]\supset[a_1,\ b_1]\supset[a_2,\ b_2]\supset\ldots$, на каждом из которых $f(x)$ не будет T-интегрируемой.

Пусть c — точка, общая всем $[a_n,\ b_n]$. Если $\delta>0$, то при достаточно большом n окажется $[a_n,\ b_n]\subset[c-\delta,\ c+\delta]\ [a,\ b]$.

Отсюда следует, что $f\,\overline{\in}\,T([c-\delta,\ c+\delta]\ [a,\ b])$, и точка c оказывается T-особой.

Лемма 2. *Множество $S_T=S_T(f;\ [a,\ b])$ замкнуто.*

Доказательство. Пусть $c_n\in S_T$ и $c_n\to c$. Возьмем $\delta>0$. Если n достаточно велико, то $|c_n-c|<\frac{\delta}{2}$ и потому

$$\left[c_n-\frac{\delta}{2},\ c_n+\frac{\delta}{2}\right][a,\ b]\subset[c-\delta,\ c+\delta]\ [a,\ b].$$

Так как $f(x)$ не T-интегрируема на отрезке, представляющем левую часть этого включения, то она и подавно не T-интегрируема на $[c-\delta,\ c+\delta]\ [a,\ b]$. В силу произвольности δ отсюда следует, что $c\in S_T$, что и требовалось доказать.

В дальнейшем нас будут интересовать случаи, когда S_T не заполняет всего отрезка $[a,\ b]$. В таких случаях дополнительное множество $[a,\ b]-S_T$ будет состоять из конечного или счетного множества попарно не пересекающихся промежутков. Действительно, если $S_T=0$, то $[a,\ b]-S_T=[a,\ b]$. Если же $S_T\neq 0$ и $[p,\ q]$ — наименьший отрезок, содержащий S_T, то[1])

$$[a,\ b]-S_T=[a,\ p)+\{[p,\ q]-S_T\}+(q,\ b]$$

и остается напомнить, что множество $[p,\ q]-S_T$ или пусто, или состоит из попарно не пересекающихся интервалов. То обстоятельство, что некоторые из промежутков, дополнительных к S_T, не являются открытыми интервалами, строго говоря, требует соответствующих усложнений в обозначениях, но мы все же будем в дальнейшем все эти промежутки обозначать просто через $(a_n,\ b_n)$, хотя и не исключено, что один из промежутков $(a_n,\ b_n)$ на самом деле есть $[a_n,\ b_n)$ или $(a_n,\ b_n]$ и даже $[a_n,\ b_n]$ (если $S_T=0$).

Допустим, что нами рассматриваются два интеграла T_1 и T_2. Если всякая T_1-интегрируемая функция обязательно и T_2-интегрируема, причем значения обоих интегралов для нее совпадают, то говорят, что интеграл T_2 более общий, чем T_1.

Покажем, как, исходя из некоторого интеграла T (в самое определение которого должно входить указание на соответствующую правильную систему

---

[1]) При $p=a$ будет $[a,\ p)=0$.

$\mathfrak{W}$ классов T-интегрируемых функций $T([a, b])$, можно построить другой более общий интеграл T_*.

Для этой цели мы прежде всего должны определить соответствующую новому интегралу правильную систему классов интегрируемых функций. Условимся включать функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[a, b]$, в класс $T_*([a, b])$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:

1) Множество $S_T = S_T(f; [a, b])$ нигде не плотно на $[a, b]$ и функция $f(x)$ на этом множестве интегрируема в смысле Лебега. [1])

2) Если $\{(a_n, b_n)\}$ — совокупность дополнительных интервалов S_T, то для каждого n существует конечный предел

$$I_n = \lim \overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{T}}}(f) \qquad (a_n < \alpha < \beta < b_n,\ \alpha \to a_n,\ \beta \to b_n).$$

3) Если [2])

$$W_n = \sup \left| \overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{T}}}(f) \right| \qquad (a_n < \alpha < \beta < b_n),$$

то

$$\sum_n W_n < +\infty.$$

Убедимся в правильности системы классов $T_*([a, b])$. Допустим прежде всего, что $f(x) \in T([a, b])$. Тогда $S_T(f; [a, b]) = 0$ и вся сумма $\sum (a_n, b_n)$ сводится к одному слагаемому: отрезку $[a, b]$. Уже было отмечено (см. первую сноску на этой странице), что условию 1) наша функция удовлетворяет. Условие 2) для нее также выполняется, ибо в силу (2) будет

$$\lim \overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{T}}}(f) = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}}(f),$$

если $a < \alpha < \beta < b$, $\alpha \to a$, $\beta \to b$. Наконец, и условие 3) для $f(x)$ также будет выполняться, так как имеется всего лишь одно (конечное!) число W.

Таким образом, $T([a, b]) \subset T_*([a, b])$ и все классы $T_*([a, b])$ не пусты.

Пусть, далее, $f(x) \in T_*([a, b])$ и $a < c < b$. [3]) Рассмотрим множество $S_T(f; [a, c])$. Легко видеть, что оно является частью множества $S_T(f; [a, b])$ и потому нигде не плотно на $[a, c]$, а функция $f(x)$ на нем интегрируема в смысле Лебега. Таким образом, функция $f(x)$ на отрезке $[a, c]$ удовлетворяет условию 1). Пусть $[a, c] - S_T(f; [a, c]) = \sum_n (a_n, b_n)$.

Если $c \in S_T(f; [a, c])$, то каждый фигурирующий здесь промежуток (a_n, b_n) будет являться дополнительным и ко всему множеству $S_T(f; [a, b])$ до отрезка $[a, b]$. Если же $c \overline{\in} S_T(f; [a, c])$, то это так для всех (a_n, b_n), кроме, может быть, одного промежутка вида [4]) $(a_{n_0}, c]$. Из этого обстоятельства непосредственно вытекает выполнение условий 2) и 3), необходимых для включения $f(x)$ в класс $T_*([a, c])$. Аналогично доказывается, что $f \in T_*([c, b])$.

---

[1]) Это условие выполнено всегда, когда $mS_T = 0$, и тем более тогда, когда $S_T = 0$.

[2]) Условие 2) обеспечивает конечность чисел W_n.

[3]) Случаи $c = a$ и $c = b$ тривиальны. В самом деле, если $f(x)$ задана в точке x_0, то независимо от того, будет или нет она T-интегрируема на этой точке, $f(x)$ обязательно войдет в класс $T_*([x_0, x_0])$.

[4]) Впрочем, возможно, что $S_T(f; [a, c]) = 0$. Тогда упомянутым исключением будет сам отрезок $[a, c]$.

Таким образом,

$$T_*([a, b]) \subset T_*([a, c])\, T_*([c, b]).$$

Обратное включение устанавливается при помощи сходных рассуждений.

Итак, система классов $T_*([a, b])$ правильна. Определим теперь для каждой $f \in T_*([a, b])$ значение функционала $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}}{}_*(f)$ при помощи формулы

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}}{}_*(f) = \sum_n I_n + (L) \int_{S_T(f)} f(x)\, dx. \tag{3}$$

Это определение корректно, так как $|I_n| \leqslant W_n$ и потому ряд $\sum I_n$ абсолютно сходится.

Полезно заметить, что для всякой T-интегрируемой функции $f(x)$ [мы уже отметили выше, что она входит и в $T_*([a, b])$] будет

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}}{}_*(f) = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}}(f),$$

ибо в правой части (3) интеграл Лебега исчезает, а сумма $\sum I_n$ сводится к одному слагаемому $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}}(f)$.

Другой простейший случай мы имеем тогда, когда T-особыми точками на $[a, b]$ будут только a и b. В этом случае

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}}{}_*(f) = \lim \overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{T}}}(f) \qquad (a < \alpha < \beta < b,\ \alpha \to a,\ \beta \to b).$$

В силу этого простого замечания из (3) вытекает, что

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}}{}_*(f) = \sum_n \overset{b_n}{\underset{a_n}{\mathrm{T}}}{}_*(f) + (L) \int_{S_T(f)} f(x)\, dx.$$

Убедимся в том, что определенный нами функционал $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}}{}_*(f)$ является интегралом в смысле определения, данного в начале параграфа, т. е. в том, что он аддитивен и непрерывен как функция отрезка $[a, b]$.

Пусть $f \in T_*([a, b])$ и $a < c < b$. Ясно, что

$$S_T(f;\ [a, b]) = S_T(f;\ [a, c]) + S_T(f;\ [c, b]),$$

причем множества, записанные справа, либо вовсе не пересекаются, либо имеют только одну общую точку. Отсюда следует, что

$$(L) \int_{S_T([a, b])} f(x)\, dx = (L) \int_{S_T([a, c])} f(x)\, dx + (L) \int_{S_T([c, b])} f(x)\, dx, \tag{4}$$

причем оба интеграла, стоящие справа, существуют и конечны.

Пусть, далее,

$$[a, b] - S_T(f;\ [a, b]) = \sum_n (a_n, b_n).$$

Относительно точки c можно сделать три предположения: она входит в оба множества $S_T([a, c])$ и $S_T([c, b])$, она не входит ни в одно из них, она входит в одно из этих множеств и не входит в другое. Во всех этих

случаях рассуждения очень похожи друг на друга, и мы для примера рассмотрим только первый из них. В этом случае все множество промежутков (a_n, b_n) распадается на два непересекающихся подмножества, состоящих из промежутков, лежащих соответственно левее и правее точки c. При само собой понятных обозначениях будет

$$\sum_{[a, b]} I_n = \sum_{[a, c]} I_n + \sum_{[c, b]} I_n,$$

откуда, в связи с (4), вытекает, что[1])

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}_*}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{\mathrm{T}_*}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{\mathrm{T}_*}}(f). \tag{5}$$

Итак, функционал T_* есть аддитивная функция отрезка. Докажем теперь, что при $f \in T_*([a, b])$, $x \in [a, b]$, $c \in [a, b]$ и $x \to c$ будет

$$\lim \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{T}_*}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{\mathrm{T}_*}}(f). \tag{6}$$

Пусть для определенности $x < c$. Тогда мы можем считать, что $c = b$. Относительно точки b можно сделать три предположения: она не входит в множество $S_T(f; [a, b])$, она является его изолированной точкой, она является предельной точкой этого множества.

В первых двух случаях рассуждения почти самоочевидны. Действительно, если $b \overline{\in} S_T(f; [a, b])$, то функция $f(x)$ будет T-интегрируемой на отрезке $[p, b]$, если только p достаточно близко к b. Стало быть, для таких p будет

$$\overset{b}{\underset{p}{\mathrm{T}_*}}(f) = \overset{b}{\underset{p}{\mathrm{T}}}(f).$$

В таком случае

$$\overset{b}{\underset{p}{\mathrm{T}_*}}(f) = \lim \overset{x}{\underset{p}{\mathrm{T}}}(f), \tag{7}$$

где $p < x < b$, $x \to b$. Но так как $\overset{x}{\underset{p}{\mathrm{T}}}(f) = \overset{x}{\underset{p}{\mathrm{T}_*}}(f)$, то вместо (7) можно написать $\overset{b}{\underset{p}{\mathrm{T}_*}}(f) = \lim \overset{x}{\underset{p}{\mathrm{T}_*}}(f)$, и остается заметить, что

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}_*}}(f) - \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{T}_*}}(f) = \overset{b}{\underset{p}{\mathrm{T}_*}}(f) - \overset{x}{\underset{p}{\mathrm{T}_*}}(f).$$

Если b — изолированная точка $S_T(f; [a, b])$, то при p, достаточно близком к b, она будет единственной T-особой точкой отрезка $[p, b]$. По определению $T_*(f)$ снова будет выполняться (7), и доказательство заканчивается, как и в предыдущем случае.

Рассмотрим, наконец, основной случай, когда b есть предельная точка множества $S_T(f; [a, b])$. В этом случае точка b не может служить правым концом ни одного интервала (a_n, b_n), дополнительного к $S_T(f; [a, b])$,

---

[1]) Мы предположили, что $a < c < b$, но для $a = c$ и $c = b$ равенство (5) очевидно, ибо из самого определения $T_*(f)$ ясно, что $\overset{c}{\underset{c}{\mathrm{T}_*}}(f) = 0$.

а число этих интервалов будет заведомо бесконечным. Заметив это, возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем такое N, чтобы было

$$\sum_{n>N} W_n < \varepsilon. \tag{8}$$

Существование подобного N следует из условия 3), которому должна удовлетворять $f(x)$.

Отметим также такое $\delta > 0$, чтобы неравенство $b-\delta < x < b$ влекло неравенство

$$\left| (L) \int\limits_{S_T([x,\, b])} f(t)\, dt \right| < \varepsilon. \tag{9}$$

Обозначим через β самую правую из точек $b-\delta$, b_1, b_2, ..., b_N и пусть $x > \beta$.

Если $x \in S_T([x, b])$, то по самому определению $T_*(f)$ будет

$$\overset{b}{\underset{x}{\mathrm{T}}}{}_*(f) = \sum_{n \in M} I_n + (L) \int\limits_{S_T([x,\, b])} f(t)\, dt, \tag{10}$$

где M есть множество тех n, для которых $(a_n, b_n) \subset [x, b]$. Ясно, что для всех этих n будет $n > N$ и потому

$$\left| \sum_{n \in M} I_n \right| \leqslant \sum_{n \in M} W_n < \varepsilon. \tag{11}$$

Если же $x \overline{\in} S_T([x, b])$, то найдется такое m, что $a_m \leqslant x < b_m$. Очевидно, при этом $m > N$. Тогда вместо (10) окажется

$$\overset{b}{\underset{x}{\mathrm{T}}}{}_*(f) = \overset{b_m}{\underset{x}{\mathrm{T}}}{}_*(f) + \sum_{n \in M} I_n + (L) \int\limits_{S_T([x,\, b])}. \tag{12}$$

Но

$$\overset{b_m}{\underset{x}{\mathrm{T}}}{}_*(f) = \lim \overset{y}{\underset{x}{\mathrm{T}}}(f) \qquad (x < y < b_m, \quad y \to b_m)$$

и потому

$$\left| \overset{b_m}{\underset{x}{\mathrm{T}}}{}_*(f) \right| \leqslant W_m < \varepsilon.$$

Отсюда, с учетом (9) и (11), ясно, что при $x > \beta$ будет

$$\left| \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}}{}_*(f) - \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{T}}}{}_*(f) \right| = \left| \overset{b}{\underset{x}{\mathrm{T}}}{}_*(f) \right| < 3\varepsilon.$$

Таким образом, и в этом случае верно (6) и, следовательно, $T_*(f)$ действительно является интегралом.[1])

§ 7. Узкий интеграл Данжуа

Теперь, наконец, мы можем дать определение «узкого» интеграла Данжуа. С этой целью сначала построим трансфинитную последовательность (типа $\Omega+1$) все более и более общих интегралов, которые мы будем назы-

---

[1]) И притом более общим, чем $T(f)$.

вать D_ξ-интегралами и для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, обозначать через

$$(D_\xi) \int_a^b f(x)\, dx. \tag{1}$$

Интегралы (1) определяются индуктивно. Именно, под

$$(D_0) \int_a^b f(x)\, dx$$

мы будем понимать просто интеграл Лебега

$$(L) \int_a^b f(x)\, dx.$$

Допустим теперь, что нами уже определены интегралы (1) для всех $\xi < \eta$, где[1] $\eta \leqslant \Omega$, причем из $\xi_1 < \xi_2 < \eta$ следует, что интеграл D_{ξ_2} общее чем D_{ξ_1}. Если η — число первого рода и $\eta - 1$ ему непосредственно предшествует, то, полагая

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}}(f) = (D_{\eta-1}) \int_a^b f(x)\, dx,$$

мы определяем интеграл D_η формулой

$$(D_\eta) \int_a^b f(x)\, dx = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}}{}_*(f).$$

Если же η — число второго рода, то мы включим в класс функций, D_η-интегрируемых на отрезке $[a, b]$, все функции $f(x)$, которые оказываются на этом отрезке D_ξ-интегрируемыми хоть при одном $\xi < \eta$, и положим по определению

$$(D_\eta) \int_a^b f(x)\, dx = (D_{\xi_0}) \int_a^b f(x)\, dx,$$

где ξ_0 есть наименьшее[2] из упомянутых ξ. Таким образом, если η — число второго рода, то класс D_η-интегрируемых функций есть теоретико-множественная сумма (по всем $\xi < \eta$) классов D_ξ-интегрируемых функций. Поэтому данное нами определение интегралов (1) можно записать при помощи символических соотношений

$$D_0 = L, \quad D_\eta = (D_{\eta-1})_*, \quad D_\eta = \sum_{\xi < \eta} D_\xi,$$

причем второе соотношение надо применять тогда, когда η есть число первого рода, а третье тогда, когда η второго рода.

В частности, беря $\xi = \Omega$, мы приходим к «узкому» интегралу Данжуа.

Определение. *Интегралом Данжуа* в узком смысле слова функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, называется интеграл

$$(D_\Omega) \int_a^b f(x)\, dx \tag{2}$$

---

[1]) Ниже будет объяснено, почему интегралы (1) не рассматриваются для $\xi > \Omega$.

[2]) Легко видеть, что это ξ_0 есть обязательно число первого рода. Ясно, что функционал $(D_\eta) \int_a^b f(x)\, dx$ является интегралом в смысле § 6.

Как мы уже упоминали, этот интеграл называют часто и интегралом Данжуа — Перрона. Вместо (2) его обозначают обычно через [1])

$$(D)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Пользуясь той же символикой, что и выше, мы можем написать формулу $D=\sum_{\xi<\Omega} D_\xi$, так что всякая функция, интегрируемая по Данжуа, будет и D_ξ-интегрируема при некотором $\xi<\Omega$ и если наименьшее из этих ξ есть ξ_0, то

$$(D)\int_a^b f(x)\,dx=(D_{\xi_0})\int_a^b f(x)\,dx.$$

Остановимся на некоторых свойствах введенного интеграла.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ оказывается D_ξ-интегрируемой при каком-нибудь $\xi<\Omega$, то она там и D_η-интегрируема при всех η, удовлетворяющих неравенству $\xi\leqslant\eta\leqslant\Omega$, причем*

$$(D_\eta)\int_a^b f(x)\,dx=(D_\xi)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Докажем теорему сначала для $\xi=0$. При $\eta=0$ наше утверждение тривиально. Допустим, что оно уже доказано для всех $\eta<\zeta$, где $0<\zeta\leqslant\Omega$. Если ζ — число первого рода, то утверждение справедливо для $\eta=\zeta$ потому, что интеграл T_* более общий чем T. Если же ζ — число второго рода, то дело сводится непосредственно к определению интеграла (1), когда индекс есть число второго рода. Итак, для $\xi=0$ теорема доказана. Пусть она доказана для всех $\xi<\alpha$, где $0<\alpha<\Omega$. Убедимся, что тогда она будет верна и для $\xi=\alpha$.

Справедливость утверждения теоремы для $\eta=\alpha$ очевидна. Допустим, что оно верно для всех $\eta<\zeta$, где $\alpha<\zeta\leqslant\Omega$. Если ζ — число первого рода, то справедливость утверждения для $\eta=\zeta$ устанавливается, как и выше. Пусть же ζ — второго рода. Тогда D_ζ-интегрируемость функции очевидна. При этом $(D_\zeta)\int_a^b f(x)\,dx=(D_\beta)\int_a^b f(x)\,dx$, где β есть наименьшее из γ, обладающих тем свойством, что функция $f(x)$ будет D_γ-интегрируема. Ясно, что $\beta\leqslant\alpha$. Если $\beta=\alpha$, то утверждение доказано, если же $\beta<\alpha$, то оно вытекает из индуктивного предположения, что теорема верна для всех $\xi<\alpha$, что и требовалось доказать.

Кратко доказанную теорему можно формулировать так: чем больше ξ, тем общее интеграл D_ξ.

Условимся обозначать множество D_ξ-особых точек функции $f(x)$, заданной на $[a, b]$, через $S_\xi(f;\,[a, b])$. Иногда мы будем употреблять и одно из более простых обозначений: $S_\xi([a, b])$, $S_\xi(f)$, S_ξ.

Из теоремы 1 непосредственно следует, что при $\xi<\eta$ будет $S_\xi\supset S_\eta$.

Теорема 2. *Для того чтобы функция $f(x)$, заданная на $[a, b]$, была там D-интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы было*

$$\prod_{\xi<\Omega} S_\xi(f;\,[a, b])=0. \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ будет D-интегрируема на $[a, b]$. Тогда она D_ξ-интегрируема на $[a, b]$ при каком-нибудь $\xi<\Omega$ и при этом ξ будет

[1]) А иногда через $(D_*)\int_a^b f(x)\,dx$.

$S_\xi(f;\ [a,\ b])=0$. Этим доказана необходимость условия (3). Достаточность его вытекает из принципа стационарности Кантора — Бэра,[1]) ибо при выполнении (3) найдется такое ξ, что $S_\xi(f;\ [a,\ b])=0$, а это означает D_ξ-интегрируемость $f(x)$ на $[a,\ b]$.

Остановимся в заключение этого параграфа на том, почему не рассматривают интегралов (1) при $\xi>\Omega$. Дело в том, что если бы мы захотели ввести интеграл $D_{\Omega+1}$ по формуле $D_{\Omega+1}=(D_\Omega)_*$, то это уже не привело бы к расширению класса интегрируемых функций. Действительно, допустим, что функция $f(x)$, заданная на $[a,\ b]$, оказалась бы на этом отрезке интегрируемой в смысле $D_{\Omega+1}$, не будучи интегрируемой в смысле D_Ω. В таком случае множество $S_\Omega(f)$ было бы нигде не плотным на $[a,\ b]$ и $f(x)$ была бы на нем суммируема. Обозначим через $\{(a_n,\ b_n)\}$ множество всех интервалов, дополнительных к множеству $S_\Omega(f)$. Для каждого из них должен существовать конечный предел интеграла

$$(D_\Omega)\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \tag{4}$$

при $a_n<\alpha<\beta<b_n$, $\alpha\to a_n$, $\beta\to b_n$. Закрепим число n и пусть $\alpha_1<\beta_1$, $\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>\ldots$, $\beta_1<\beta_2<\beta_3<\ldots$, $\alpha_k\to a_n$, $\beta_k\to b_n$.

Тогда на каждом отрезке $[\alpha_k,\ \beta_k]$ наша $f(x)$ должна быть D_Ω-интегрируемой, а это означает существование для каждого натурального k такого числа $\xi_k<\Omega$, что $f(x)$ на $[\alpha_k,\ \beta_k]$ будет D_{ξ_k}-интегрируема. Поскольку чисел ξ_k имеется всего лишь счетное множество, то должно найтись число $\eta_n<\Omega$, большее всех ξ_k. По той же причине найдется такое $\zeta<\Omega$, которое будет больше всех η_n. Ясно, что $f(x)$ будет D_ζ-интегрируемой на каждом отрезке $[\alpha,\ \beta]$, не пересекающемся с $S_\Omega(f)$ и лежащем в $[a,\ b]$.

Отсюда вытекает совпадение множеств $S_\zeta(f)$ и $S_\Omega(f)$ и возможность замены в интегралах (4) знака D_Ω на D_ζ. Все это, вместе взятое, означает не что иное как интегрируемость $f(x)$ в смысле $D_{\zeta+1}$. Последнее, однако, противоречит предположенной неинтегрируемости $f(x)$ в смысле D_Ω.

§ 8. Теорема Г. Хаке

В 1921 г. немецкий математик Г. Хаке доказал, что интеграл Перрона общее,[2]) чем узкий интеграл Данжуа. Здесь мы излагаем этот результат.

Лемма 1. *Пусть функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a,\ b]$, оказывается интегрируемой (P) на каждом отрезке $[a,\ \beta]$, где $a<\beta<b$. Если существует конечный предел*

$$J=\lim_{\beta\to b}(P)\int_a^\beta f(x)\,dx,$$

то $f(x)$ будет интегрируемой (P) и на всем $[a,\ b]$, причем

$$(P)\int_a^b f(x)\,dx=J. \tag{1}$$

---

[1]) Гл. XV, § 3.

[2]) Мы употребляем этот термин в точном соответствии со смыслом, приданным ему в § 6. Таким образом, каждый интеграл T, «более общий», чем он сам. В частности, в рассматриваемом случае мы как раз сталкиваемся с этим обстоятельством, ибо, как будет показано ниже, на самом деле интегралы P и D тождественны.

Доказательство. Положим $b_0 = a$ и

$$b_n = \frac{b_{n-1} + b}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Очевидно $b_0 < b_1 < b_2 < \ldots$ и $b_n \to b$. На каждом отрезке $[b_{n-1}, b_n]$ функция $f(x)$ будет интегрируема (P). Выберем некоторое $\varepsilon > 0$. При каждом натуральном n на отрезке $[b_{n-1}, b_n]$ будет существовать такая надфункция $U_n(x)$ функции $f(x)$, что

$$U_n(b_n) < (P) \int_{b_{n-1}}^{b_n} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

С помощью этих надфункций зададим для $a \leqslant x < b$ функцию $M(x)$, положив

$M(x) = U_1(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b_1$,
$M(x) = U_1(b_1) + U_2(x)$ при $b_1 \leqslant x \leqslant b_2$,
. . . .
$M(x) = U_1(b_1) + U_2(b_2) + \ldots + U_{n-1}(b_{n-1}) + U_n(x)$ при $b_{n-1} \leqslant x \leqslant b_n$,
. . . .

Так как $U_n(b_{n-1}) = 0$, то $M(x)$ будет непрерывна, и при любом x из $[a, b)$ будет

$$\underline{D}M(x) > -\infty, \quad \underline{D}M(x) \geqslant f(x). \tag{2}$$

Убедимся в существовании конечного предела

$$\lim_{x \to b} M(x). \tag{3}$$

По самому определению $U_n(x)$ будет

$$0 \leqslant U_n(b_n) - (P) \int_{b_{n-1}}^{b_n} f(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2^n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

и потому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[U_n(b_n) - (P) \int_{b_{n-1}}^{b_n} f(x)\,dx \right]$$

сходится, причем сумма его меньше ε. С другой стороны, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (P) \int_{b_{n-1}}^{b_n} f(x)\,dx$$

сходится и сумма его равна J. Отсюда вытекает сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(b_n), \tag{4}$$

причем его сумма меньше чем $J + \varepsilon$.

Пусть теперь $b_{n-1} \leqslant x \leqslant b_n$. Тогда

$$(P) \int_{b_{n-1}}^{x} f(t)\,dt \leqslant U_n(x) < (P) \int_{b_{n-1}}^{x} f(t)\,dt + \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{5}$$

Если $x \to b$, то $n \to \infty$ и крайние члены неравенства (5) стремятся к нулю. Стало быть, и $\lim U_n(x) = 0$. Отсюда и вытекает существование предела (3), причем он оказывается равным сумме ряда (4). Обозначая этот предел через $M(b)$, мы приходим к функции $M(x)$, заданной и непрерывной уже на всем $[a, b]$. Однако мы все же не можем назвать ее надфункцией для $f(x)$, ибо неравенства (2) не обязаны выполняться[1]) при $x = b$.

Покажем, что исходя из $M(x)$, можно построить функцию $U(x)$, которая будет для $f(x)$ служить надфункцией уже на всем $[a, b]$. Для этого обозначим через $S(x)$ колебание функции $M(x)$ на отрезке $[x, b]$. Ясно, что $S(x)$ будет убывающей и неотрицательной функцией, заданной на всем $[a, b]$, причем $S(b) = 0$. Нетрудно также убедиться в том, что $S(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Выберем точку c $(a < c < b)$ настолько близкой к b, чтобы оказалось $S(c) < \varepsilon$, и введем функцию $U(x)$, положив

$$U(x) = \begin{cases} M(x) & \text{при } a \leq x \leq c, \\ M(x) + S(c) - S(x) + \varepsilon \dfrac{\sqrt{b-c} - \sqrt{b-x}}{\sqrt{b-c}} & \text{при } c \leq x \leq b. \end{cases}$$

Ясно, что $U(x)$ непрерывна на $[a, b]$, $U(a) = 0$, и при $a \leq x < c$ будет

$$\underline{D}U(x) > -\infty, \quad \underline{D}U(x) \geq f(x). \tag{6}$$

При $x = c$ эти неравенства тоже очевидно будут выполнены, если под $\underline{D}U(x)$ понимать левостороннюю нижнюю производную. Покажем, что и для $x \in [c, b]$ будут выполнены соотношения (6). Пусть x и $x + \Delta x$ — две различные точки из $[c, b]$. Тогда

$$\frac{U(x+\Delta x) - U(x)}{\Delta x} = \frac{M(x+\Delta x) - M(x)}{\Delta x} - \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} - \\ - \frac{\varepsilon}{\sqrt{b-c}} \cdot \frac{\sqrt{b-x-\Delta x} - \sqrt{b-x}}{\Delta x}.$$

Так как обе функции $S(x)$ и $\sqrt{b-x}$ убывают, то

$$\frac{U(x+\Delta x) - U(x)}{\Delta x} \geq \frac{M(x+\Delta x) - M(x)}{\Delta x}$$

и для $x \neq b$ соотношения (6) справедливы в силу (2).

С другой стороны, если $c \leq b - h < b$, то

$$\frac{U(b-h) - U(b)}{-h} = \frac{M(b-h) - M(b) - S(b-h)}{-h} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{b-c}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

По определению $S(x)$ будет $M(b-h) - M(b) \leq S(b-h)$ и потому

$$\frac{U(b-h) - U(b)}{-h} \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{b-c}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Отсюда вытекает, что $U'(b) = +\infty$, т. е. при $x = b$ выполнены неравенства (6). Таким образом $U(x)$ есть надфункция для $f(x)$. При этом

$$U(b) = M(b) + S(c) + \varepsilon$$

и потому $U(b) < J + 3\varepsilon$.

---

[1]) Существенно, разумеется, лишь то, что не исключена возможность равенства $\underline{D}M(b) = -\infty$, ибо функцию $f(x)$ можно изменить в точке $x = b$, что не отражается на P-интегрируемости ее.

Аналогичным образом можно построить такую подфункцию V функции $f(x)$, что $V(b) > J - 3\varepsilon$. Ввиду произвольности ε из сказанного вытекает P-интегрируемость $f(x)$ на всем $[a, b]$. Что касается равенства (1), то оно является следствием непрерывности неопределенного интеграла Перрона.

Лемма 2. *Если 1) $f(x)$ задана на $[a, b]$ и интегрируема (P) на каждом $[\alpha, b]$, где $a < \alpha < b$, 2) существует конечный предел*

$$\lim_{\alpha \to a} (P) \int_{\alpha}^{b} f(x)\, dx,$$

то $f(x)$ интегрируема (P) на всем $[a, b]$.

Доказательство. Рассмотрим вместо $f(x)$ функцию $f^*(x)$, заданную на $[-b, -a]$ формулой $f^*(x) = f(-x)$. Если $a < \alpha < b$ и $U(x)$ есть надфункция для $f(x)$ на отрезке $[\alpha, b]$, то функция

$$U^*(x) = U(b) - U(-x)$$

будет надфункцией для $f^*(x)$ на $[-b, -\alpha]$, ибо

$$\frac{U^*(x+h) - U^*(x)}{h} = \frac{U(-x-h) - U(-x)}{-h}$$

и потому

$$\underline{D}U^*(x) = \underline{D}U(-x).$$

Так как $U^*(-\alpha) = U(b)$, то $\inf\{U^*(-\alpha)\} = \inf\{U(b)\}$. Опираясь на этот факт, легко убедиться, что $f^*(x)$ на отрезке $[-b, -a]$ удовлетворяет всем условиям леммы 1. Значит, $f^*(x)$ будет (P)-интегрируемой на $[-b, -a]$, а это равносильно P-интегрируемости $f(x)$ на $[a, b]$.

Из сопоставления обеих лемм следует

Теорема 1. *Если $f(x)$ задана на $[a, b]$, интегрируема (P) на каждом $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ и существует конечный предел*

$$\lim (P) \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx \qquad (\alpha \to a+0,\ \beta \to b-0),$$

то $f(x)$ интегрируема (P) на всем $[a, b]$.

Для дальнейшего нужна

Лемма 3. *Пусть на $[a, b]$ расположено счетное множество отрезков $[a_k, b_k]$, попарно без общих внутренних точек. Пусть функция $f(x)$, заданная на $[a, b]$, равна нулю вне интервалов (a_k, b_k) и интегрируема (P) на каждом $[a_k, b_k]$. Если*

$$W_k = \sup \left| (P) \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx \right| \qquad (a_k \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b_k)$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} W_k = H < +\infty,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ у $f(x)$ существует такая надфункция $U(x)$, что

$$U(b) \leqslant 3H + \varepsilon. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $M_k(x)$ — такая надфункция $f(x)$ на отрезке $[a_k, b_k]$, что

$$M_k(b_k) < (P) \int_{a_k}^{b_k} f(x)\, dx + \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^k}.$$

Так как для всех x из $[a_k, b_k]$ будет

$$(P)\int_{a_k}^{x} f(t)\,dt \leqslant M_k(x) \leqslant (P)\int_{a_k}^{x} f(t)\,dt + \frac{\varepsilon}{3\cdot 2^k},$$

то

$$-W_k \leqslant M_k(x) \leqslant W_k + \frac{\varepsilon}{3\cdot 2^k}.$$

Обозначим через R_k, $P_k(x)$ и $Q_k(x)$ колебания $M(t)$ соответственно на отрезках $[a_k, b_k]$, $[a_k, x]$ и $[x, b_k]$. Тогда

$$0 \leqslant P_k(x) \leqslant R_k, \quad 0 \leqslant Q_k(x) \leqslant R_k,$$

$P_k(a_k)=0$, $Q_k(b_k)=0$, $P_k(x)$ и $Q_k(x)$ непрерывны на $[a_k, b_k]$, причем первая из этих функций возрастает, а вторая убывает.

Покажем, что $R_k \leqslant W_k + \frac{\varepsilon}{3\cdot 2^k}$. Действительно, если x и y — две точки из $[a_k, b_k]$, причем $x \leqslant y$, то

$$(P)\int_{a_k}^{x} f(t)\,dt + \frac{\varepsilon}{3\cdot 2^k} \geqslant M_k(x) \geqslant (P)\int_{a_k}^{x} f(t)\,dt,$$

$$(P)\int_{a_k}^{y} f(t)\,dt \leqslant M_k(y) \leqslant (P)\int_{a_k}^{y} f(t)\,dt + \frac{\varepsilon}{3\cdot 2^k},$$

откуда

$$(P)\int_{x}^{y} f(t)\,dt - \frac{\varepsilon}{3\cdot 2^k} \leqslant M_k(y) - M_k(x) \leqslant (P)\int_{x}^{y} f(t)\,dt + \frac{\varepsilon}{3\cdot 2^k}$$

и, стало быть,

$$|M_k(y) - M_k(x)| \leqslant W_k + \frac{\varepsilon}{3\cdot 2^k},$$

чем и доказана требуемая оценка R_k.

Определим на всем $[a, b]$ последовательность функций $\varphi_k(x)$, полагая

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } a \leqslant x \leqslant a_k, \\ M_k(x) + R_k + P_k(x) - Q_k(x) \text{ при } a_k \leqslant x \leqslant b_k, \\ M_k(b_k) + 2R_k \text{ при } b_k \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

Все эти функции непрерывны, причем

$$0 \leqslant \varphi_k(x) \leqslant 3W_k + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Покажем, что функция

$$U(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)$$

требуемая. Равенство $U(a)=0$, неравенство (7) и непрерывность $U(x)$ очевидны. Остается проверить, что $\underline{D}U(x) > -\infty$, $\overline{D}U(x) \geqslant f(x)$.

Докажем эти неравенства только для п р а в о с т о р о н н и х производных чисел[1]) $\underline{D}_+U(x)$, ибо для левосторонних производных $\underline{D}_-U(x)$ рассуждения почти аналогичны (хотя и немного сложнее).

---

[1]) Правостороннее производное число есть предел последовательности $\frac{U(x_0+h_k)-U(x_0)}{h_k}$, в которой $h_k \to 0$ и $h_k > 0$. Аналогично, с заменой лишь на $h_k < 0$, определяется левостороннее производное число.

Пусть $a \leqslant x_0 < b$. Если найдется такое i, что $a_i \leqslant x_0 < b_i$, то при достаточно малых $h > 0$ будет $a_i < x_0 + h < b_i$ и потому при $k \neq i$ окажется $\varphi_k(x_0+h) = \varphi_k(x_0)$, так что

$$U(x_0+h) - U(x_0) = \varphi_i(x_0+h) - \varphi_i(x_0) \geqslant M_i(x_0+h) - M_i(x_0).$$

Отсюда сразу вытекают оба неравенства

$$\underline{D}_+ U(x_0) > -\infty, \quad \underline{D}_+ U(x_0) \geqslant f(x_0). \tag{8}$$

Допустим теперь, что такого i не существует. Тогда x_0 лежит вне всех промежутков $[a_k, b_k)$ и потому $f(x_0) = 0$. Выберем какое-либо натуральное k. Если $b_k \leqslant x_0$, то при любом $h > 0$ будет $\varphi_k(x_0+h) = \varphi_k(x_0)$. Если же $b_k > x_0$, то и $a_k > x_0$ (ибо иначе было бы $a_k \leqslant x_0 < b_k$). Стало быть, $\varphi_k(x_0) = 0 \leqslant \varphi_k(x_0+h)$. Итак, при $h > 0$ и любом k оказывается $\varphi_k(x_0) \leqslant \varphi_k(x_0+h)$. Но тогда $\underline{D}_+ U(x_0) \geqslant 0$ и снова выполнено (8). Лемма доказана.

Докажем теперь основное для дальнейшего утверждение:

Теорема 2. *Если интеграл* $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}}(f)$ *менее общий,*[1] *чем интеграл Перрона, то и его расширение* $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}}{}_*(f)$ *также менее общее, чем интеграл Перрона.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ — функция T_*-интегрируемая на $[a, b]$, но не T-интегрируемая на этом отрезке. Обозначим через S множество ее T-особых точек, а через (a_k, b_k) — интервалы, дополнительные к множеству S. Согласно теореме 1, функция $f(x)$ будет P-интегрируемой на каждом отрезке $[a_k, b_k]$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем такое m, что $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} W_k < \varepsilon$, где, как и раньше,

$$W_k = \sup \left| \overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{T}}}(f) \right| = \sup \left| (P)\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \right| \quad (a_k < \alpha < \beta < b_k).$$

Введем в рассмотрение три функции $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, заданные следующим образом:

$$p(x) = \begin{cases} f(x) \text{ при } x \in \sum\limits_{k=1}^{m} (a_k, b_k), \\ 0 \quad \text{при } x \in [a, b] - \sum\limits_{k=1}^{m} (a_k, b_k). \end{cases}$$

$$q(x) = \begin{cases} f(x) \text{ при } x \in \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} (a_k, b_k), \\ 0 \quad \text{при } x \in [a, b] - \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} (a_k, b_k); \end{cases}$$

$$r(x) = \begin{cases} f(x) \text{ при } x \in S, \\ 0 \quad \text{при } x \in [a, b] - S. \end{cases}$$

---

[1]) Это значит, что интеграл $(P)\int_a^b f(x)\,dx$ более общий (в смысле § 6), чем $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}}(f)$.

Ясно, что

$$f(x)=p(x)+q(x)+r(x).$$

Функция $r(x)$ будет суммируемой на $[a, b]$, а значит и P-интегрируемой на этом отрезке, причем

$$(P)\int_a^b r(x)\,dx=(L)\int_a^b r(x)\,dx=(L)\int_S f(x)\,dx.$$

Функция $p(x)$ также P-интегрируема на $[a, b]$. Действительно, как уже было отмечено, функция $f(x)$ интегрируема на каждом из отрезков $[a_k, b_k]$. Если изменить ее значения в двух точках a_k и b_k, сделав их равными нулю, то это не нарушит ее P-интегрируемости и не изменит величины ее интеграла. Поэтому функция $p(x)$ на отрезках $[a_k, b_k]$ $(k=1, 2, \ldots, m)$ будет P-интегрируема. Но на множестве $[a, b]-\sum_{k=1}^{m}(a_k, b_k)$, являющемся суммой конечного числа отрезков, эта функция есть 0 и, очевидно, P-интегрируема. Таким образом, $p(x)$ интегрируема (P) на всем $[a, b]$, причем

$$(P)\int_a^b p(x)\,dx=\sum_{k=1}^{m}(P)\int_{a_k}^{b_k} f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{m} I_k,$$

где положено

$$I_k=\lim \overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{T}}}(f) \quad (\alpha\to a_k+0,\ \beta\to b_k-0).$$

Благодаря P-интегрируемости $p(x)$ и $r(x)$ (и указанным значениям их P-интегралов) найдутся такие их надфункции $U_p(x)$ и $U_r(x)$, что

$$U_p(b)<\sum_{k=1}^{m} I_k+\varepsilon, \quad U_r(b)<(L)\int_S f(x)\,dx+\varepsilon.$$

Наконец, в силу леммы 3 для $q(x)$ существует такая надфункция $U_q(x)$, что[1] $U_q(b)<4\varepsilon$.

Положим $U(x)=U_p(x)+U_q(x)+U_r(x)$.

Тогда (см. следствие леммы 1 § 2) $U(x)$ будет надфункцией для $f(x)$, причем

$$U(b)<\sum_{k=1}^{m} I_k+(L)\int_S f(x)\,dx+6\varepsilon.$$

С другой стороны,

$$\left|\sum_{k=m+1}^{\infty} I_k\right|\leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} W_k<\varepsilon.$$

Стало быть,

$$U(b)<\sum_{k=1}^{\infty} I_k+(L)\int_S f(x)\,dx+7\varepsilon,$$

или, что то же самое,

$$U(b)<\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}_*}}(f)+7\varepsilon.$$

Остальное ясно.

Теперь уже легко доказать интересующую нас теорему.

[1] Здесь $H<\varepsilon$.

Теорема 3 (Г. Хаке). Интеграл Перрона более общий, чем узкий интеграл Данжуа.

Доказательство. Всякая функция, D-интегрируемая, будет D_ξ-интегрируемой при каком-нибудь $\xi < \Omega$. Поэтому достаточно доказать следующее предложение: если функция D_ξ-интегрируема при $\xi < \Omega$, то она и P-интегрируема, и оба ее интеграла (P) и (D_ξ) совпадают. Для $\xi = 0$ это предложение верно. Пусть оно верно для всех $\xi < \eta$ и пусть $f(x)$ — функция D_η-интегрируемая. Если η — число второго рода, то справедливость предложения для этого η очевидна. Если же η — первого рода и $\eta - 1$ ему непосредственно предшествует, то по предположению наше предложение верно для интегралов $D_{\eta-1}$ и достаточно, сославшись на то, что $D_\eta = (D_{\eta-1})_*$, применить теорему 2. Теорема доказана.

§ 9. Теорема П. С. Александрова — Г. Ломана

В этом параграфе мы докажем полную тождественность интегралов Перрона и Данжуа. В силу теоремы Хаке для этого достаточно обнаружить, что интеграл Данжуа общее [1]) интеграла Перрона. Этот факт был установлен независимо друг от друга русским математиком П. С. Александровым (1924) и голландским ученым Г. Ломаном (1925).

Лемма 1. Пусть функция $f(x)$ интегрируема (P) на отрезке $[a, b]$ и $U(x)$ — какая-нибудь ее надфункция. Обозначим через E_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ множество всех таких x из $[a, b]$, что при любом $t \neq x$ и $t \in [a, b]$ оказывается

$$\frac{U(t) - U(x)}{t - x} \geqslant -i. \tag{1}$$

Тогда: a) *каждое множество E_i замкнуто,*

b) *справедлива формула*

$$[a, b] = \sum_{i=1}^{\infty} E_i. \tag{2}$$

c) *На каждом множестве E_i функция $f(x)$ суммируема.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_k\}$ точек E_i имеет пределом точку x^*. Выберем какое-нибудь $t \in [a, b]$, отличное от x^*. Тогда для достаточно больших k окажется $x_k \neq t$ и

$$\frac{U(t) - U(x_k)}{t - x_k} \geqslant -i.$$

Остается, опираясь на непрерывность $U(x)$, перейти к пределу при $k \to \infty$. Итак, a) доказано. Чтобы доказать b), выберем какое-либо $x_0 \in [a, b]$. По определению надфункции будет

$$\varliminf \frac{U(t) - U(x_0)}{t - x_0} = \underline{D}U(x_0) > -\infty.$$

Возьмем какое-нибудь число A, удовлетворяющее неравенству

$$A < \varliminf \frac{U(t) - U(x_0)}{t - x_0}.$$

По самому определению наименьшего предела существует такое $\delta > 0$, что при $t \in [a, b] (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (и $t \neq x_0$) будет

$$\frac{U(t) - U(x_0)}{t - x_0} > A.$$

---

[1]) См. сноску [2]) на стр. 411.

С другой стороны, если $t \in [a, b]$ и $t \overline{\in} (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то

$$\left| \frac{U(t) - U(x_0)}{t - x_0} \right| \leq \frac{2M}{\delta},$$

где положено $M = \max |U(x)|$. Тем самым для этих t окажется

$$\frac{U(t) - U(x_0)}{t - x_0} \geq -\frac{2M}{\delta}.$$

Если i настолько велико, что $-i < \min\left\{A, -\frac{2M}{\delta}\right\}$, то $x_0 \in E_i$.

Остается доказать[1]) c). Для этого выберем какое-нибудь i и положим $U_i(x) = U(x) + ix$. Если $t \neq x$, то

$$\frac{U_i(t) - U_i(x)}{t - x} = \frac{U(t) - U(x)}{t - x} + i$$

и потому для $x \in E_i$ и $t \neq x$ оказывается

$$\frac{U_i(t) - U_i(x)}{t - x} \geq 0.$$

Отсюда следует, что на множестве E_i функция $U_i(x)$ возрастает. По теореме Кантора — Бендиксона E_i представляется в форме суммы $P_i + D_i$, где P_i — совершенное, а D_i — не более чем счетное множество. Обозначим через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ самую левую и самую правую точки P_i и пусть $\{(a_n, b_n)\}$ — совокупность интервалов, дополнительных к P_i до $[\bar{a}, \bar{b}]$. Зададим на $[\bar{a}, \bar{b}]$ функцию $\bar{U}_i(x)$, положив ее равной $U_i(x)$ на множестве P_i и линейной на каждом из отрезков $[a_n, b_n]$. Эта функция будет возрастающей на $[\bar{a}, \bar{b}]$. Поэтому почти везде на $[\bar{a}, \bar{b}]$ она имеет конечную производную $\bar{U}_i'(x)$, причем последняя суммируема на $[\bar{a}, \bar{b}]$ и тем более на P_i.

С другой стороны, надфункция $U(x)$ почти везде на $[a, b]$ имеет конечную производную $U'(x)$ (см. § 4). Так как $U_i(x) = U(x) + ix$, то и $U_i(x)$ почти везде дифференцируема на $[a, b]$, а значит и на $[\bar{a}, \bar{b}]$. Если x_0 — такая точка P_i, в которой существуют обе производные $\bar{U}_i'(x_0)$ и $U_i'(x_0)$, то последние обязательно равны друг другу, ибо x_0 есть предельная точка множества P_i, на котором $\bar{U}_i(x)$ и $U_i(x)$ совпадают. Значит на P_i производная $U_i'(x)$ эквивалентна суммируемой функции $\bar{U}_i'(x)$, а потому и сама суммируема. Но тогда и $U'(x) = U_i'(x) - i$ суммируема на P_i.

Положим $F(x) = (P)\int\limits_a^x f(t)\,dt$.

Разность $U(x) - F(x)$ возрастает на $[a, b]$, а потому она имеет почти везде конечную производную, суммируемую на $[a, b]$ и, тем более, на P_i. Но

$$F(x) = U(x) - [U(x) - F(x)].$$

Отсюда следует, что $F'(x)$ суммируема на P_i, а так как почти везде на $[a, b]$ будет $F'(x) = f(x)$, то $f(x)$ оказывается суммируемой на P_i. Поскольку суммируемость $f(x)$ на счетном множестве D_i тривиальна, доказано и c).

Лемма 2. *Если $f(x)$ интегрируема (P) на $[a, b]$, то существует такой отрезок $[c, d] \subset [a, b]$, на котором $f(x)$ суммируема.*

Доказательство. Применим к отрезку $[a, b]$ теорему о том, что замкнутое множество не есть множество первой категории на самом себе.

---

[1]) Разумеется, c) содержательно лишь при $mE_i > 0$. Будем считать это выполненным.

Согласно следствию этой теоремы (гл. XV, § 3, стр. 374) и соотношению (2), найдется отрезок $[c, d] \subset [a, b]$ и натуральное i такие, что $[c, d] \subset E_i$. Так как $f(x)$ суммируема на E_i, то тем более она суммируема на $[c, d]$, что и требовалось доказать.

Так как доказанную лемму можно применить к любому отрезку $[a_1, b_1] \subset \subset [a, b]$, то из нее вытекает

Лемма 3. *Если функция $f(x)$ P-интегрируема на $[a, b]$, то множество S_0 ее точек несуммируемости* (т. е. *L-особых точек*) *нигде не плотно.*

В обозначениях § 7 будет $S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_\xi \supset \ldots$

Поэтому каждое из множеств S_ξ и подавно нигде не плотно.

Лемма 4. *Если функция $f(x)$ P-интегрируема на $[a, b]$ и $S_\xi = S_\xi(f; [a, b]) \neq 0$, то и $S_\xi - S_{\xi+1} \neq 0$.*

Доказательство. Пусть сначала в S_ξ имеется изолированная точка c. Будем считать, что $a < c < b$ (если $c = a$, или $c = b$, то рассуждение почти не изменится). Тогда найдутся такие p и q ($a \leqslant p < c < q \leqslant b$), что на $[p, q]$ c будет единственной D_ξ-особой точкой. Пусть r и s таковы, что $p < r < < c < s < q$. На каждом из отрезков $[p, r]$ и $[s, q]$ функция $f(x)$ будет D_ξ-интегрируема и [1])

$$(D_\xi)\int_p^r f(x)\,dx = F(r) - F(p), \quad (D_\xi)\int_s^q f(x)\,dx = F(q) - F(s).$$

Благодаря непрерывности $F(x)$, написанные здесь интегралы стремятся к конечным пределам при $r \to c$, $s \to c$. Отсюда вытекает, что на $[p, c]$ и на $[c, q]$, а значит и на $[p, q]$, функция $f(x)$ $D_{\xi+1}$-интегрируема. Иными словами, $c \,\overline{\in}\, S_{\xi+1}$, и теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда в S_ξ изолированных точек нет, т. е. когда S_ξ есть множество совершенное. Введем уже рассмотренные в лемме 1 функцию $U(x)$ и множества E_i.

Кроме того, обозначим через $V(x)$ какую-либо подфункцию $f(x)$ и построим для каждого натурального j множество F_j тех x, для которых при $t \neq x$ оказывается

$$\frac{V(t) - V(x)}{t - x} \leqslant j.$$

Аналогично множествам E_i множества F_j замкнуты и сумма их составляет весь отрезок $[a, b]$. В таком случае

$$S_\xi = \sum_{i,\, j} S_\xi E_i F_j.$$

Поэтому (на основании уже упоминавшегося выше следствия теоремы 2, § 3, гл. XV) найдутся такие i_0 и j_0 и такой интервал (h, g), что

$$0 \neq (h, g)\, S_\xi \subset E_{i_0} F_{j_0}.$$

Пусть x_0 — какая-нибудь точка $(h, g)\, S_\xi$. Так как S_ξ нигде не плотно, то найдутся такие точки p и q, что $h < p < x_0 < q < g$ и $p \,\overline{\in}\, S_\xi$, $q \,\overline{\in}\, S_\xi$. Ясно, что

$$0 \neq [p, q]\, S_\xi \subset E_{i_0} F_{j_0}.$$

Из того, что p и q не входят в S_ξ, вытекает, [2]) что

$$[p, q]\, S_\xi = S_\xi([p, q]).$$

---

[1]) Через $F(x)$ обозначен $(P)\int_a^x f(t)\,dt$. Мы пользуемся здесь той частью теоремы Хаке, в которой утверждается, что значение D-интеграла равно значению P-интеграла.

[2]) Если бы было $p \in S_\xi$, то p могло бы оказаться левым концом интервала, дополнительного к S_ξ, и тогда было бы $p \in [p, q]\, S_\xi - S_\xi([p, q])$.

Итак, $S_\xi([p, q]) \subset E_{i_0}F_{j_0}$. Покажем, что на отрезке $[p, q]$ функция $f(x)$ будет $D_{\xi+1}$-интегрируема. Из этого будет следовать справедливость леммы, так как внутрь отрезка $[p, q]$ не сможет попасть ни одна точка $S_{\xi+1}$, в то время как точки S_ξ там заведомо имеются (например, точка x_0).

Условие суммируемости $f(x)$ на (нигде не плотном!) множестве $S_\xi([p, q])$ выполнено в силу включения этого множества в E_{i_0} и леммы 1. Обозначим через $\{(a_n, b_n)\}$ совокупность всех интервалов, дополнительных к множеству $S_\xi([p, q])$ до отрезка $[p, q]$. Если n закреплено и $a_n < \alpha < \beta < b_n$, то $f(x)$ будет D_ξ-интегрируема на $[\alpha, \beta]$, и по теореме Хаке окажется

$$(D_\xi)\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

Отсюда, благодаря непрерывности неопределенного интеграла Перрона, сразу вытекает, что при $\alpha \to a_n + 0$, $\beta \to b_n - 0$ существует конечный предел написанного здесь D_ξ-интеграла.

Поэтому для завершения доказательства остается лишь убедиться в том, что $\sum_n W_n < +\infty$, где, как и до сих пор,

$$W_n = \sup\left|(D_\xi)\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right| \qquad (a_n < \alpha < \beta < b_n).$$

С этой целью заметим, что при всех[1]) n будет

$$a_n \in S_\xi([p, q]) \subset E_{i_0}F_{j_0}.$$

Значит, при всех t из $[a, b]$, отличных от a_n, будет

$$\frac{U(t) - U(a_n)}{t - a_n} \geqslant -i_0, \qquad \frac{V(t) - V(a_n)}{t - a_n} \leqslant j_0.$$

В частности, если $a_n < t < b_n$, то

$$U(t) - U(a_n) \geqslant -i_0(t - a_n), \quad V(t) - V(a_n) \leqslant j_0(t - a_n)$$

и, тем более, для этих t будет

$$U(t) - U(a_n) \geqslant -i_0(b_n - a_n), \quad V(t) - V(a_n) \leqslant j_0(b_n - a_n).$$

С другой стороны, обе функции

$$L(t) = U(t) - F(t), \quad M(t) = F(t) - V(t)$$

возрастают. Стало быть,

$$F(t) - F(a_n) = [U(t) - U(a_n)] - [L(t) - L(a_n)] \geqslant -i_0(b_n - a_n) - [L(b_n) - L(a_n)],$$
$$F(t) - F(a_n) = [V(t) - V(a_n)] + [M(t) - M(a_n)] \leqslant j_0(b_n - a_n) + [M(b_n) - M(a_n)].$$

Отсюда следует, что при $a_n < \alpha < \beta < b_n$ будет

$$|F(\beta) - F(\alpha)| \leqslant (i_0 + j_0)(b_n - a_n) + [L(b_n) - L(a_n)] + [M(b_n) - M(a_n)],$$

а значит и

$$W_n \leqslant (i_0 + j_0)(b_n - a_n) + [L(b_n) - L(a_n)] + [M(b_n) - M(a_n)].$$

Но тогда ясно, что $\sum W_n < +\infty$, что и требовалось доказать.

Теорема (П. С. Александров — Г. Ломан). *Функция, интегрируемая по Перрону, интегрируема и по Данжуа в узком смысле слова.*

---

[1]) Кроме того единственного n, при котором $a_n = p$ (такое n существует, поскольку $p \in S_\xi$).

В самом деле, по принципу стационарности Кантора — Бэра существует такое $\alpha < \Omega$, что $\prod_{\xi<\Omega} S_\xi = S_\alpha = S_{\alpha+1}$.

Если бы множество $\prod S_\xi$ оказалось не пустым, то получилось бы противоречие с леммой 4. Остается сослаться на теорему 2 из § 7.

§ 10. Понятие о широком интеграле Данжуа

Чтобы дать понятие о широком интеграле Данжуа, или интеграле Данжуа — Хинчина, нам придется вернуться к общим рассмотрениям § 6.

Пусть дан какой-нибудь интеграл $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}}(f)$. Построим его обобщение $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}^*}}(f)$, отличное от того обобщения $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}_*}}(f)$, с которыми мы ознакомились в § 6.

Именно, условимся включать в класс $T^*([a, b])$ всякую функцию $f(x)$, заданную на $[a, b]$ и удовлетворяющую следующим четырем условиям:

1) множество $S_T = S_T(f; [a, b])$ нигде не плотно и $f(x)$ на нем суммируема по Лебегу;

2) если $\{(a_n, b_n)\}$ есть совокупность дополнительных интегралов[1]) S_T, то для каждого n существует конечный предел

$$I_n = \lim \overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{T}}}(f) \qquad (a_n < \alpha < \beta < b_n,\ \alpha \to a_n,\ \beta \to b_n);$$

3) справедливо неравенство

$$\sum_n |I_n| < +\infty; \tag{1}$$

4) если промежутков (a_n, b_n) бесконечно много и

$$W_n = \sup \left| \overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{T}}}(f) \right| \qquad (a_n < \alpha < \beta < b_n),$$

то

$$\lim W_n = 0. \tag{2}$$

Мы видим, что отличие определения класса $T^*([a, b])$ от определения класса $T_*([a, b])$ состоит в замене одного требования

$$\sum_n W_n < +\infty \tag{3}$$

совокупностью двух требований (1) и (2). Так как $|I_n| \leqslant W_n$, то из (3) вытекает и (1) и (2), откуда

$$T_*([a, b]) \subset T^*([a, b]).$$

В частности, отсюда следует, что классы $T^*([a, b])$ не пусты. Ничего не меняя в рассуждениях § 6, можно показать, что система этих классов правильна.

---

[1]) С теми оговорками, которые были сделаны в § 6 относительно самого левого и самого правого из промежутков (a_n, b_n).

Введя классы $T^*([a, b])$, мы можем на каждом из них задать функционал $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}}{}^*$, сопоставляющий каждой $f \in T^*([a, b])$ число

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}}{}^*(f) = \sum_n I_n + (L) \int_{S_T} f(x)\, dx.$$

Таким образом, $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}}{}^*(f)$ задается той же формулой, что и $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}}{}_*(f)$, но на более широком классе функций. Теми же рассуждениями, что и в § 6, можно показать, что $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}}{}^*(f)$ есть интеграл в смысле § 6. Из сказанного ясно, что интеграл этот более общий, чем $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}}{}_*(f)$.

Широкий интеграл Данжуа строится при помощи интеграла T^* совершенно так же, как узкий интеграл был построен при помощи T_*.

Именно, вводится трансфинитная (типа $\Omega+1$) последовательность интегралов

$$(D^\xi) \int_a^b f(x)\, dx, \tag{4}$$

определяемая по индукции. При $\xi = 0$ интеграл (4) есть просто интеграл Лебега. Если для всех $\xi < \eta$, где $\eta \leqslant \Omega$, интегралы (4) уже определены, то для η первого рода полагаем $D^\eta = (D^{\eta-1})^*$, а для η второго рода $D^\eta = \sum\limits_{\xi < \eta} D^\xi$.

Интеграл

$$D^\Omega = \sum_{\xi < \Omega} D^\xi$$

и есть широкий интеграл Данжуа.

Можно доказать, что широкий интеграл Данжуа общее узкого. Более того, оказывается,[1] что вообще при любом $\xi \leqslant \Omega$ интеграл D^ξ общее чем D_ξ.

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ XVI

1. Понятие интеграла Перрона не расширится, если в определении надфункции $U(x)$ и подфункции $V(x)$ функции $f(x)$ требовать выполнения неравенств $\underline{D}U(x) \geqslant f(x)$ и $\overline{D}V(x) \leqslant f(x)$ лишь почти везде.

2. Пусть на $[a, b]$ расположено замкнутое нигде не плотное множество S, $\{(a_n, b_n)\}$ — совокупность его дополнительных промежутков, T — некоторый интеграл и $f(x)$ — функция, заданная на $[a, b]$ и T-интегрируемая на каждом $[\alpha, \beta] \subset (a_n, b_n)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Пусть

$$W_n = \sup \left| \overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{T}}}(f) \right| \qquad (a_n < \alpha < \beta < b_n).$$

Если: а) при каждом n существует конечный предел

$$I_n = \lim \overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{T}}}(f) \qquad (\alpha \to a_n + 0,\ \beta \to b_n - 0)$$

---

[1] См. И. П. Натансон и Г. И. Натансон, «К взаимоотношению между узким и широким интегралами Данжуа». Успехи матем. наук, 1958, т. 13, № 1.

и b) $\sum W_n < +\infty$, то c) всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что для любой конечной или счетной системы отрезков $[\alpha_i, \beta_i]$, у которой $[\alpha_i, \beta_i] \subset (a_{n_i}, b_{n_i})$ $(n_i \neq n_k$ при $i \neq k)$ и $\sum (\beta_i - \alpha_i) > \sum (b_n - a_n) - \delta$, будет

$$\left| \sum_n I_n - \sum_i \overset{\beta_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{T}}} (f) \right| < \varepsilon.$$

3. Пусть (в тех же обозначениях) число H обладает свойством: всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы отрезков $[\alpha_i, \beta_i]$, у которой $[\alpha_i, \beta_i] \subset (a_{n_i}, b_{n_i})$ $(n_i \neq n_k$ при $i \neq k)$ и $\sum (\beta_i - \alpha_i) > \sum (b_n - a_n) - \delta$, оказывается

$$\left| H - \sum_i \overset{\beta_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{T}}} (f) \right| < \varepsilon.$$

Тогда имеют место a) и b).

4. Если S_ξ — множество D_ξ-особых точек функции $f(x)$, то

$$\prod_{\xi < \Omega} S_\xi = S_\Omega.$$

5. Чтобы функция $f(x)$ была D-интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы соотношение $S_\xi \neq 0$ влекло соотношение $S_\xi \neq S_{\xi+1}$.

6. Показать, что функция $U(x)$, построенная в лемме 3 § 8, удовлетворяет соотношениям $-\infty \neq \underline{D}_U(x) \geqslant f(x)$.

7. Доказать, что если $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}} (f)$ есть интеграл, то и $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}^*}} (f)$ есть интеграл.

8. Если $f(x) \in D_\xi([a, b]) D^\eta([a, b])$, то ее D_ξ- и D^η-интегралы равны.

9. Интеграл D^ξ более общий, чем D_ξ.

10. При любом $\xi < \Omega$ существует $f(x)$, входящая в $D_{\xi+1}([a, b]) - D^\xi([a, b])$.

11. При любом $\xi < \Omega$ будет $D^{\xi+1}([a, b]) \neq D_{\xi+1}([a, b]) + D^\xi([a, b])$.

ГЛАВА XVII

ФУНКЦИИ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ЗАДАНИЯ

До сих пор мы рассматривали функции, заданные на ограниченных множествах. Теперь мы намерены распространить некоторые из изложенных выше результатов на функции с неограниченными областями задания. Для простоты мы будем говорить лишь о функциях одной переменной, так как переход к случаю нескольких переменных не представляет новых трудностей.

§ 1. Мера неограниченного множества

Множество E, содержащееся в $(-\infty, +\infty)$, называется измеримым, если при любом натуральном n измеримо множество

$$E(n) = [-n, n] \cdot E.$$

Мерой такого множества называется предел

$$mE = \lim_{n \to \infty} mE(n).$$

Этот предел всегда существует, так как $mE(n)$ возрастает вместе с n. Однако не исключено, что $mE = +\infty$.

Вместо множеств на прямой можно было бы рассматривать множества на плоскости или, вообще, в произвольном многомерном пространстве. Естественно, что в определении при этом надо промежутки $[-n, n]$ заменить квадратами $[-n, n; -n, n]$ или, в общем случае, соответствующими кубами.

Можно показать, что множество E будет измеримым тогда и только тогда, когда измеримо пересечение $E \cdot e$ данного множества с любым измеримым ограниченным множеством e. Далее,

$$mE = \sup me,$$

где точная верхняя граница берется по всем измеримым ограниченным множествам $e \subset E$.

Класс измеримых множеств и после указанного расширения остается инвариантным относительно операций сложения, пересечения и вычитания, если они производятся конечное или счетное множество раз.

Остановимся на доказательстве *полной аддитивности* меры. Пусть множества E_1, E_2, E_3, ... измеримы, попарно не пересекаются и $E=\sum_{k=1}^{\infty} E_k$. Тогда

$$E(n)=\sum_{k=1}^{\infty} E_k(n), \tag{1}$$

откуда

$$mE(n)=\sum_{k=1}^{\infty} mE_k(n)\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} mE_k$$

и

$$mE\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} mE_k. \tag{2}$$

С другой стороны, из (1) вытекает, что при всяком конечном N будет $mE\geqslant \sum_{k=1}^{N} mE_k(n)$. Переходя здесь к пределу сначала при $n\to\infty$, а затем при $N\to\infty$, находим, что $mE\geqslant \sum_{k=1}^{\infty} mE_k$, откуда в связи с (2) следует, что[1])

$$mE=\sum_{k=1}^{\infty} mE_k. \tag{3}$$

В частности, если $A\supset B$ и оба эти множества измеримы, то

$$mA=mB+m(A-B).$$

Если дополнительно потребовать конечности mB, то

$$m(A-B)=mA-mB.$$

Легко перенести на неограниченные множества теорему 11 из § 4 гл. III. Именно, пусть $E_1\subset E_2\subset E_3\subset\ldots$ измеримые множества и E их сумма. Если хоть при одном n будет $mE_n=+\infty$, то и $mE=+\infty$, откуда

$$mE=\lim_{n\to\infty} mE_n. \tag{4}$$

Если же все E_n имеют конечную меру, то (4) доказывается буквальным повторением рассуждений гл. III.

Теорема 12 переносится на неограниченные множества в следующем виде:

Теорема. *Пусть $E_1\supset E_2\supset E_3\supset\ldots$ — измеримые множества и E их пересечение. Если $mE_1<+\infty$, то справедливо* (4).

---

[1]) Каждая из частей равенства (3) может равняться $+\infty$.

Для доказательства надо лишь применить предшествующий результат к множествам $E_1 - E_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Без оговорки $mE_1 < +\infty$ теорема неверна. Это видно из примера $E_n = [n, +\infty)$.

§ 2. Измеримые функции

Функцию $f(x)$, заданную на множестве E, по-прежнему называют измеримой, если измеримо как E, так и все множества вида $E(f > c)$.

Если потребовать, чтобы было $mE < +\infty$, то перенос результатов гл. IV на функции, заданные на множестве E, не потребует почти никаких новых соображений. Впрочем, теорема о том, что предел сходящейся последовательности функций $f_k(x)$, измеримых на множестве E, есть функция, также измеримая на E, сохраняется и без ограничения $mE < +\infty$. Это легко показать с помощью предельного перехода от множеств $E(n)$. Для обобщения теоремы Лузина оговорка $mE < +\infty$ также не нужна. Докажем это хотя бы для случая полупрямой.

Теорема (Н. Н. Лузин). *Пусть $f(x)$ измерима и почти везде конечна на множестве $E = [0, +\infty)$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная на E функция $\varphi(x)$, что*

$$mE(\varphi \neq f) < \varepsilon. \tag{1}$$

Доказательство. Положим $E_k = [k, k+1]$ $(k = 0, 1, \ldots)$. При каждом k найдется функция $\varphi_k(x)$, заданная и непрерывная на E_k, для которой $mE_k(\varphi_k \neq f) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. Можно считать при этом, что[1] $\varphi_k(k) = \varphi_k(k+1) = 0$. Тогда требуемая функция $\varphi(x)$ может быть определена так:

$$\varphi(x) = \varphi_k(x) \text{ при } k \leqslant x \leqslant k+1 \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

§ 3. Интегралы по неограниченным множествам

Пусть $f(x)$ — измеримая и неотрицательная функция, заданная на неограниченном множестве E. По определению полагаем

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{E(n)} f(x)\,dx, \tag{1}$$

где, как и выше, $E(n) = [-n, n] \cdot E$. Предел (1) заведомо существует (хотя может и равняться $+\infty$) ввиду того, что интегралы $\int_{E(n)} f(x)\,dx$ возрастают вместе с n.

---

[1] Пусть $f(x)$ измерима и почти везде конечна на $S = [a, b]$. Взяв любое $\varepsilon > 0$, можем (по теореме Лузина из гл. IV) найти такую непрерывную на S функцию $\psi(x)$, для которой $mS(\psi \neq f) < \varepsilon$. Сделав это, возьмем такое $\delta > 0$, что $2\delta < \min\{b-a, \varepsilon\}$, и построим непрерывную на S функцию $\varphi(x)$, положив для $a+\delta \leqslant x \leqslant b-\delta$ ее равной $\psi(x)$, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ и сделав $\varphi(x)$ линейной на отрезках $[a, a+\delta]$ и $[b-\delta, b]$. Легко проверить что $mE(\varphi \neq f) < 2\varepsilon$.

Если интеграл (1) конечен, то $f(x)$ называют суммируемой функцией. Остановимся на вопросе о том, как на интегралы (1) распространяются теоремы § 1 гл. VI. Здесь проще всего начать с теоремы Фату.

Теорема 1. *Если последовательность измеримых и неотрицательных функций $\{f_k(x)\}$, заданных на множестве E, почти везде на E сходится к функции $F(x)$, то,*

$$\int_E F(x)\,dx \leqslant \sup\left\{\int_E f_k(x)\,dx\right\}. \tag{2}$$

В самом деле, при любом натуральном n будет

$$\int_{E(n)} F\,dx \leqslant \sup\left\{\int_{E(n)} f_k\,dx\right\} \leqslant \sup\left\{\int_E f_k\,dx\right\},$$

откуда предельным переходом при $n\to\infty$ получается (2).

Опираясь на это предложение и буквально повторяя[1]) рассуждения § 1 гл. VI, переносим на случай неограниченного множества E теоремы 10, 11 и 12 указанного параграфа.

В качестве следствия теоремы Б. Леви получается

Теорема 2. *Если $f(x)$ измерима и неотрицательна на множестве E, а $f_n(x)$ есть срезанная функция, $f_n(x)=\min\{f(x),\ n\}$, то*

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx.$$

Заметим еще, что в том случае, когда $f(x)$ есть измеримая и ограниченная функция, заданная на множестве E конечной меры, $0\leqslant f(x)\leqslant A$, то $f(x)$ суммируема и $\int_E f(x)\,dx\leqslant AmE$. Это также устанавливается предельным переходом от множеств $E(n)$. Перенос на рассматриваемый случай других результатов § 1, гл. VI не представляет труда.

Если $f(x)$ — измеримая на множестве E функция, которая может принимать и отрицательные значения, то мы, как и в гл. VI, вводим функции $f_+(x)$ и $f_-(x)$:

$$f_+(x)=\max\{f(x),\ 0\},\qquad f_-(x)=\max\{-f(x),\ 0\},$$

и полагаем по определению[2])

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E f_+(x)\,dx - \int_E f_-(x)\,dx, \tag{3}$$

---

[1]) По ходу дела потребуется опереться на то, что из неравенства $f(x)\leqslant g(x)$ следует, что $\int_E f\,dx\leqslant\int_E g\,dx$. Это предложение легко устанавливается предельным переходом от множеств $E(n)$.

[2]) В тех случаях, когда $E=(-\infty,+\infty)$, $E=(-\infty, b]$ или $E=[a,+\infty)$, интеграл (3) обозначается соответственно через

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,\quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx,\quad \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

если только эта разность имеет смысл. Если интеграл (3) существует и **конечен**, то $f(x)$ называется суммируемой на множестве E функцией. Класс таких $f(x)$ обозначается через $L(E)$.

На рассматриваемый случай легко переносятся результаты § 2 гл. VI. В частности, из суммируемости $f(x)$ вытекает суммируемость и $|f(x)|$. Если $f(x) \in L(E)$, а $g(x)$ ограниченная и измеримая на E функция, то $f(x) g(x) \in L(E)$. Сохраняется и теорема 8, § 2, гл. VI (об абсолютной непрерывности интеграла), но только при доказательстве ее нам придется теперь сослаться не на **определение** интеграла, а на теорему 2 настоящего параграфа.

§ 4. Функции, суммируемые с квадратом

Как и в случае ограниченного множества, определяется понятие функции, суммируемой с квадратом на множестве E. Именно, это есть функция $f(x)$, измеримая на E, для которой $f^2 \in L(E)$. Класс таких функций обозначается через $L_2(E)$. Если $mE < +\infty$, то всякая ограниченная измеримая функция входит в $L(E)$. В частности, $1 \in L(E)$, откуда, в связи с неравенством $2|a| \leqslant 1 + a^2$, следует включение $L_2(E) \subset L(E)$. Если $mE = +\infty$, то это включение не имеет места[1]). Например, если $E = [1, +\infty)$, то $\frac{1}{x} \in L_2(E) - L(E)$.

На неограниченные множества распространяются неравенства Буняковского[2]) и Коши, а также вся основанная на них геометрическая трактовка $L_2(E)$ как пространства. Это пространство полно: всякая сходящаяся в себе последовательность его элементов имеет предел. Если $mE = +\infty$, то существуют измеримые ограниченные функции $g(x)$ (хотя бы $g(x) = 1$), не входящие в $L_2(E)$. Однако имеет место

Теорема 1. *Класс тех непрерывных и ограниченных функций, которые входят в $L_2(E)$, всюду плотен в $L_2(E)$.*

Докажем теорему хотя бы для случая[3]) $E = [0, +\infty)$. Пусть $f \in L_2(E)$ и $\varepsilon > 0$. Закрепляем столь большое A, чтобы оказалось

$$\int_A^{+\infty} f^2(x)\,dx < \frac{\varepsilon^2}{2}, \tag{1}$$

и вводим непрерывную на $[0, A]$ функцию $\psi_0(x)$, удовлетворяющую неравенству

$$\int_0^A [\psi_0(x) - f(x)]^2\,dx < \frac{\varepsilon^2}{8}. \tag{2}$$

---

[1]) Предоставляем читателю доказать это в общем виде.

[2]) В частности, из $f \in L_2(E)$, $g \in L_2(E)$ следует, что $fg \in L(E)$.

[3]) Тем самым она будет доказана для всех измеримых множеств $E \subset [0, +\infty)$, ибо все функции, заданные на E, можно доопределить, положив их равными 0 на $[0, +\infty) - E$.

Пусть $M = \max |\psi_0(x)|$ и $\delta > 0$ столь мало, что $\delta < A$ и $32M^2\delta < \varepsilon^2$. Зададим на $[0, A]$ функцию $\psi(x)$, полагая $\psi(x) = \psi_0(x)$ для $0 \leqslant x \leqslant A - \delta$, $\psi(A) = 0$ и делая $\psi(x)$ линейной на $[A - \delta, A]$. Ясно, что $\psi(x)$ непрерывна и

$$\int_0^A [\psi(x) - \psi_0(x)]^2 \, dx \leqslant 4M^2\delta < \frac{\varepsilon^2}{8}. \tag{3}$$

Так как $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, то из (2) и (3) следует, что

$$\int_0^A (\psi - f)^2 \, dx < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Если положить $\varphi(x) = \psi(x)$ для $0 \leqslant x \leqslant A$ и $\varphi(x) = 0$ для $x \geqslant A$, то $\varphi(x)$ будет непрерывной и ограниченной функцией, входящей в $L_2(E)$, для которой [1]) $\|f - \varphi\| < \varepsilon$.

Теория ортогональных систем для бесконечного промежутка интегрирования почти [2]) не отличается от случая конечного промежутка: сохраняются теоремы Рисса — Фишера, В. А. Стеклова, теорема о равносильности замкнутости и полноты системы и т. п.

§ 5. Функции с конечным изменением. Интегралы Стилтьеса

Пусть функция $f(x)$ задана и конечна на всей оси $(-\infty, +\infty)$. Ее полным изменением называется предел

$$\mathop{V}_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{n \to +\infty} \mathop{V}_{-n}^{n} (f).$$

Аналогичным образом определяем [3])

$$\mathop{V}_{-\infty}^{a} (f) = \lim_{n \to +\infty} \mathop{V}_{-n}^{a} (f), \quad \mathop{V}_{a}^{+\infty} (f) = \lim_{n \to +\infty} \mathop{V}_{a}^{n} (f). \tag{1}$$

При любых конечных a и b $(a < b)$ будет

$$\mathop{V}_{-\infty}^{+\infty} (f) = \mathop{V}_{-\infty}^{a} (f) + \mathop{V}_{a}^{+\infty} (f), \quad \mathop{V}_{a}^{+\infty} (f) = \mathop{V}_{a}^{b} (f) + \mathop{V}_{b}^{+\infty} (f).$$

---

[1]) Аналогично, для любой $f \in L(E)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная и ограниченная $\varphi \in L(E)$, для которой

$$\int_E |\varphi - f| \, dx < \varepsilon.$$

[2]) Так как функции x^n не входят в $L_2(E)$, то не будет иметь места, например, следствие 1 теоремы Стеклова.

[3]) Разумеется, для введения величин (1) нет надобности, чтобы $f(x)$ была задана на всей оси.

Если $\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(f)<+\infty$, то

$$\lim_{a\to-\infty}\overset{a}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(f)=0, \qquad \lim_{a\to+\infty}\overset{+\infty}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)=0.$$

Доказательство этих (и аналогичных) простых утверждений опускаем.

Теорема 1. *Чтобы полное изменение $f(x)$ было конечным, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была разностью двух возрастающих и ограниченных функций.*

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай, когда $f(x)$ задана на $(-\infty, +\infty)$. Если $\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(f)<+\infty$, то $f(x)$ ограничена[1]). Полагая

$$\pi(x)=\overset{x}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(f), \qquad \nu(x)=\pi(x)-f(x),$$

получаем требуемое представление

$$f(x)=\pi(x)-\nu(x). \tag{2}$$

Обратно, если имеет место (2), где $\pi(x)$ и $\nu(x)$ возрастают и ограничены, то

$$\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(f)\leqslant\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(\pi)+\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(\nu),$$

и остается заметить, что для всякой возрастающей функции $\varphi(x)$ будет

$$\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(\varphi)=\varphi(+\infty)-\varphi(-\infty),$$

где $\varphi(+\infty)$ и $\varphi(-\infty)$ суть пределы $\varphi(x)$ соответственно при $x\to+\infty$ *и* $x\to-\infty$.

Следствие. *Если* $\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(f)<+\infty$, *то существуют конечные* $f(+\infty)$ *и* $f(-\infty)$.

Теорема 2 (Э. Хелли). *Пусть на $(-\infty, +\infty)$ задано бесконечное семейство функций $F=\{f(x)\}$. Если существует такое $K<+\infty$, что при всех $f\in F$ оказывается*

$$|f(x)|\leqslant K, \qquad \overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(f)\leqslant K,$$

---

[1]) Действительно, если $-n\leqslant x\leqslant n$, то $|f(x)-f(0)|\leqslant\overset{+n}{\underset{-n}{\mathrm{V}}}(f)\leqslant\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(f)$.

то из F выделяется последовательность $\{f_n(x)\}$, которая при всяком x сходится к некоторой $\varphi(x)$ с конечным изменением.

Доказательство. Рассмотрим расширяющуюся последовательность отрезков $[-1, +1] \subset [-2, +2] \subset [-3, +3] \subset \ldots$ Из F выделяется последовательность $\{f_k^{(1)}(x)\}$, сходящаяся на $[-1, +1]$. Из этой последовательности выделяется последовательность[1], $\{f_k^{(2)}(x)\}$, сходящаяся на более широком отрезке $[-2, +2]$, и т. д. Построив последовательность последовательностей

$$\{f_k^{(1)}\} \supset \{f_k^{(2)}\} \supset \{f_k^{(3)}\} \ldots$$

и рассмотрев „диагональную" последовательность $f_n(x) = f_n^{(n)}(x)$, получаем требуемое, ибо ясно, что полное изменение предельной функции не больше K.

Интегралы Стилтьеса

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dg(x), \quad \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dg(x), \quad \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dg(x) \tag{3}$$

мы определим только для случая, когда $f(x)$ непрерывна и ограничена, а $g(x)$ имеет конечное изменение. Остановимся хотя бы на последнем из интегралов (3).

Легко показать[2]), что существует конечный предел

$$\lim_{A \to +\infty} \int_{B}^{A} f(x)\,dg(x),$$

и мы по определению полагаем последний из интегралов (3) равным этому пределу. Другие интегралы (3) определяются аналогично.

Не останавливаясь на элементарных свойствах интегралов (3), отметим, что теорема Хелли из § 7 гл. VIII на них не распространяется. Например, если $f(x) = 1$ и

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant n, \\ x - n & \text{при} \quad n \leqslant x \leqslant n+1, \\ 1 & \text{при} \quad n+1 \leqslant x < +\infty, \end{cases}$$

то

$$\overset{+\infty}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(g_n) = 1, \quad g(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x) = 0, \quad \int_0^{+\infty} f\,dg_n = 1, \quad \int_0^{+\infty} f\,dg = 0.$$

---

[1]) Важно заметить, что порядок следования элементов в $\{f_k^{(2)}\}$ такой же, как и в $\{f_k^{(1)}\}$.

[2]) Действительно, если $a < B < C$, то $\left|\int_B^C f\,dg\right| \leqslant M \overset{+\infty}{\underset{B}{\mathrm{V}}}(g)$, где $M = \max|f(x)|$. Если $B \to +\infty$, то $\overset{+\infty}{\underset{B}{\mathrm{V}}}(g) \to 0$. Остальное ясно.

Однако при условии обращения $f(x)$ в 0 на бесконечности теорема сохранится:

Теорема 3. *Пусть функции* $g_n(x)$ $(0 \leqslant x < +\infty,\ n=1, 2, 3, \ldots)$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\overset{+\infty}{\underset{0}{\mathrm{V}}}(g_n) \leqslant K < +\infty, \quad \lim_{n \to \infty} g_n(x) = g(x).$$

Если $f(x)$ $(0 \leqslant x < +\infty)$ *непрерывна, ограничена и такова, что* $f(+\infty) = 0$, *то*

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{+\infty} f(x)\, dg_n(x) = \int_0^{+\infty} f(x)\, dg(x).$$

Доказательство. Взяв $\varepsilon > 0$, закрепляем столь большое A, чтобы для $x \geqslant A$ оказалось $|f(x)| < \varepsilon$. Тогда

$$\left| \int_A^{+\infty} f\, dg_n \right| \leqslant K\varepsilon, \quad \left| \int_A^{+\infty} f\, dg \right| \leqslant K\varepsilon.$$

Для достаточно больших n окажется

$$\left| \int_0^A f\, dg_n - \int_0^A f\, dg \right| < \varepsilon$$

и, тем самым,

$$\left| \int_0^{+\infty} f(x)\, dg_n(x) - \int_0^{+\infty} f(x)\, dg(x) \right| < (2K+1)\,\varepsilon,$$

чем и доказана теорема.

§ 6. Неопределенные интегралы и абсолютно непрерывные функции множества

Распространим некоторые результаты гл. XIII на функции с неограниченными областями задания. Для простоты мы рассмотрим лишь функции одной переменной, заданные на $(-\infty, +\infty)$. [1])

Теорема 1. *Чтобы измеримая функция* $f(x)$ *была суммируема на каждом множестве конечной меры, необходимо и достаточно, чтобы* $f(x)$ *представлялась в виде*

$$f(x) = g(x) + h(x), \tag{1}$$

где $g(x)$ *суммируема на* $(-\infty, +\infty)$, *а* $h(x)$ *измерима и ограничена.*

Доказательство. Достаточность условия теоремы тривиальна. Докажем его необходимость. Итак, пусть $f(x)$ суммируема на каждом множестве конечной меры. Предположим сначала, что $f(x) \geqslant 0$ и введем множества $E_k = E(f > 2^k)$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$. Покажем, что хоть одно из этих множеств имеет конечную меру. Действительно, если бы при всех k оказалось $mE_k = +\infty$, то

---

[1]) Все сказанное ниже легко переносится и на функции, заданные на множестве A, отличном от $(-\infty, +\infty)$. Для этого надо лишь доопределить такие функции, положив их равными нулю вне A.

мы ввели бы такие измеримые и ограниченные множества $e_1, e_2, e_3, \ldots$, что

$$e_1 \subset E_1, \ me_1 = \frac{1}{2},$$

$$e_2 \subset E_2 - e_1, \ me_2 = \frac{1}{2^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$e_k \subset E_k - (e_1 + \ldots + e_{k-1}), \ me_k = \frac{1}{2^k},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Если $s = e_1 + e_2 + e_3 + \ldots$, то $ms = 1$, и потому $f \in L(s)$. В то же время множества e_k попарно не пересекаются, откуда

$$\int_s f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{e_k} f(x)\,dx > \sum_{k=1}^{\infty} 2^k me_k = +\infty,$$

что противоречит соотношению $f \in L(s)$.

Таким образом, найдется такое N, что

$$mE(f > 2^N) < +\infty.$$

Полагая

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad f(x) > 2^N, \\ 0 & \text{при} \quad f(x) \leqslant 2^N, \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad f(x) > 2^N, \\ f(x) & \text{при} \quad f(x) \leqslant 2^N, \end{cases}$$

получаем (1) с требуемыми $g(x)$ и $h(x)$. Если $f(x)$ может принимать и отрицательные значения, то надо применить доказанную часть теоремы к $f_+(x)$ и $f_-(x)$.

Обозначим через Γ класс измеримых функций, суммируемых на каждом множестве конечной меры. Если $f \in \Gamma$, то каждому множеству e, где $me < +\infty$, соответствует число

$$\Phi(e) = \int_e f(x)\,dx. \tag{2}$$

Иными словами, каждая функция $f \in \Gamma$ порождает функцию множества (2), заданную на всех множествах e конечной меры. Эта функция вполне аддитивна[1]) и (в силу теоремы 1) абсолютно непрерывна. Функция $\Phi(e)$ называется неопределенным интегралом функции $f(x)$.

Теорема 2. *Всякая абсолютно непрерывная и вполне аддитивная функция $\Phi(e)$, определенная на множествах конечной меры, является неопределенным интегралом некоторой функции из Γ.*

Доказательство. Так как функция $\Phi(e)$ будет определена, в частности, для всех измеримых и ограниченных множеств e, то к ней применимы результаты гл. VIII. Поэтому почти везде будет существовать симметричная производная

$$f(x) = D_x f(e) = \lim_{h \to 0} \frac{\Phi([x-h,\ x+h])}{2h}, \tag{3}$$

[1]) В том смысле, что при $E = \sum e_k$, где $e_k e_i = 0$ $(k \neq i)$, и при условии $mE < +\infty$ будет $\Phi(E) = \sum \Phi(e_n)$.

являющаяся функцией, суммируемой на всяком измеримом и ограниченном множестве E, причем для всякого такого множества будет [1])

$$\Phi(E)=\int_E f(x)\,dx. \tag{4}$$

Возьмем произвольное множество E конечной меры. Оно представимо в виде

$$E=A+B, \quad \text{где} \quad A=E(f\geqslant 0), \quad B=E(f<0).$$

Каждое из множеств A и B измеримо и имеет конечную меру. Множество A можно представить в виде суммы $A=\sum_{k=1}^{\infty} A_k$, где слагаемые множества A_k измеримы и ограничены. Для каждого из них можно написать равенство (4), откуда

$$\Phi(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k} f(x)\,dx.$$

Этим доказано включение $f\in L(A)$ и равенство

$$\Phi(A)=\int_A f(x)\,dx.$$

Аналогично доказывается такое же равенство с заменой лишь A на B. Но тогда $f\in L(E)$ и справедливо (4). Ввиду произвольности множества E теорема доказана.

Следствие. *Класс абсолютно непрерывных и вполне аддитивных функций множеств конечной меры совпадает с классом неопределенных интегралов функций из* Г.

В связи с этим следствием в теореме 3, § 2, гл. XIII можно говорить не о суммируемой функции, а о функции из Г.

Теорема 3. *Для того, чтобы абсолютно непрерывная и вполне аддитивная функция* $\Phi(e)$, *определенная на множествах конечной меры, была ограничена, необходимо и достаточно, чтобы она была неопределенным интегралом функции, суммируемой на всей оси.*

Доказательство. По предыдущей теореме справедливо (2), где $f\in\Gamma$. Если $f\in L[(-\infty, +\infty)]$, то для любого множества e конечной меры оказывается

$$|\Phi(e)|\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx,$$

чем доказана достаточность условия теоремы. Обратно, если для всякого такого множества e будет $|\Phi(e)|\leqslant K$, то и для множеств $e(f\geqslant 0)$ и $e(f<0)$ можно написать подобное неравенство, откуда

$$\int_e |f(x)|\,dx\leqslant 2K. \tag{5}$$

Полагая, в частности, $e=[-n, +n]$ и переходя в (5) к пределу при $n\to+\infty$, получим $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx\leqslant 2K$, что и завершает доказательство.

---

[1]) Определение $f(x)$ мы пополняем, положив $f(x)=0$ в тех точках, где предел (3) не существует (эти точки образуют множество меры 0).

ГЛАВА XVIII

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

§ 1. Метрические и, в частности, линейные нормированные пространства

В гл. VII мы уже говорили о понятии *метрического пространства*. Напомним, что множество E элементов $x, y, z, \ldots$ называется метрическим пространством, если любой паре x и y этих элементов соотнесено вещественное число $\rho(x, y)$, обладающее свойствами:

1) $\rho(x, y) \geqslant 0$, *причем* $\rho(x, y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Это число $\rho(x, y)$ называется *расстоянием* между элементами x и y, а неравенство 3) называется *неравенством треугольника*, ибо в случае двумерного эвклидова пространства оно означает, что одна сторона треугольника не больше суммы двух других.

В метрическом пространстве можно ввести понятие *предела последовательности* элементов $x_1, x_2, x_3, \ldots$, понимая под этим такой элемент x пространства, для которого $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, x) = 0$.

То обстоятельство, что элемент x является пределом последовательности $\{x_n\}$, записывают обычным образом:

$$\lim x_n = x, \quad \text{или} \quad x_n \to x.$$

Нетрудно показать, что последовательность элементов пространства может иметь разве лишь один предел.

В самом деле, если $x_n \to x$ и $x_n \to y$, то

$$0 \leqslant \rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y),$$

откуда, переходя к пределу при $n \to \infty$, мы находим, что

$$\rho(x, y) = 0 \quad \text{и, стало быть,} \quad x = y.$$

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства называется *сходящейся в себе*, если всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое N, что при $n > N$ и $m > N$ оказывается

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Легко видеть, что *последовательность, имеющая предел, сходится в себе.* Действительно, пусть $x_n \to x$. Тогда, взяв произвольное $\varepsilon > 0$, можно найти такое N, что при $n > N$ будет $\rho(x_n, x) < \varepsilon/2$. Ясно, что когда оба значка n и m станут больше N, то окажется справедливым неравенство $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Если, например, в качестве метрического пространства взять множество всех *отличных от нуля* вещественных чисел, причем расстояние определено обычным образом, т. е. формулой $\rho(x, y) = |x - y|$, то последовательность $\{1/n\}$ будет сходящейся в себе, но не имеющей предела. Ясно, что это обстоятельство вызвано своеобразной «неполнотой» рассмотренного пространства и что «дополнив» пространство элементом 0, мы устраним этот его дефект. В связи с этим введем точное определение.

Определение. Метрическое пространство называется *полным*, если всякая сходящаяся в себе последовательность его элементов имеет предел.

Хорошо известно, что n-мерное эвклидово пространство обладает свойством полноты. Рассмотренные в гл. VII пространства L_p и l_p так же, как было показано, обладают этим свойством.

Важным частным случаем метрического пространства является так называемое *линейное нормированное пространство.*

Определение. Множество E элементов $x, y, z, \ldots$ называется *линейным пространством*, если

I. *Каждой паре элементов x и y из E соотнесен некоторый третий элемент, их* с у м м а, $z = x + y$.

II. *Каждому элементу $x \in E$ и каждому вещественному числу a соотнесено их* п р о и з в е д е н и е — *элемент* ax.

III. *Введенные операции обладают следующими свойствами*:

1) $x + y = y + x$, т. е. *сложение коммутативно.*

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$, т. е. *сложение ассоциативно.*

3) *Из соотношения* $x + y = x + z$ *следует, что* $y = z$.

4) $1 \cdot x = x$.

5) $a(bx) = (ab)x$.

6) $(a + b)x = ax + bx$.

7) $a(x + y) = ax + ay$.

Пусть E — линейное пространство. Соотнесем каждому его элементу x произведение $\Theta_x = 0 \cdot x$.

Покажем, что это произведение на самом деле от выбора x не зависит. Действительно, прежде всего,

$$x + \Theta_x = 1 \cdot x + 0 \cdot x = (1 + 0)x = 1 \cdot x = x.$$

Но тогда для любой пары элементов x и y будет

$$(x + y) + \Theta_x = x + (y + \Theta_x) = x + (\Theta_x + y) = (x + \Theta_x) + y = x + y,$$
$$(x + y) + \Theta_y = x + (y + \Theta_y) = x + y.$$

Таким образом, $(x + y) + \Theta_x = (x + y) + \Theta_y$, откуда следует, что

$$\Theta_x = \Theta_y.$$

Впредь элемент Θ_x мы будем обозначать просто через Θ. Ясно, что он играет роль нуля при сложении элементов E. В связи с этим мы будем иногда обозначать его и через 0 (причем, конечно, опасность смешения с числом 0 должна быть исключена). Нетрудно видеть, что, кроме элемента Θ, ни один элемент z пространства не может удовлетворить соотношению $x+z=x$ при каком-нибудь x. Действительно, из этого соотношения вытекало бы, что $x+z=x+\Theta$ и $z=\Theta$.

Таким образом, линейное пространство E обладает и таким свойством:

8) *В E существует такой элемент Θ, что при всех x из E будет $x+\Theta=x$. Если хотя бы для одного $x\in E$ оказывается $x+z=x$, то $z=\Theta$.*

Отметим далее, что

9) *Если $ax=\Theta$, то либо $a=0$, либо $x=\Theta$. Наоборот, каждое из соотношений $a=0$, $x=\Theta$ влечет равенство $ax=\Theta$.*

В самом деле, если $a=0$, то $ax=\Theta$ по самому определению элемента Θ. Далее, $0\Theta=\Theta$ и потому $a\Theta=a\cdot(0\Theta)=(a\cdot 0)\Theta=0\cdot\Theta=\Theta$. Итак, каждое из соотношений $a=0$, $x=\Theta$ влечет равенство $ax=\Theta$. Пусть теперь дано, что $ax=\Theta$. Если $a\neq 0$, то $x=1\cdot x=\left(\frac{1}{a}\cdot a\right)x=\frac{1}{a}\cdot(ax)=\frac{1}{a}\,\Theta=\Theta$.

Из 9) без труда выводится, что

10) *Если $x\neq\Theta$, то из $ax=bx$ следует $a=b$;*

11) *Если $a\neq 0$, то из $ax=ay$ следует $x=y$.*

Действительно, соотношение $ax=bx$ показывает, что $(a-b)x=ax+(-b)x=bx+(-b)x=[b+(-b)]x=0\cdot x=\Theta$, откуда при $x\neq\Theta$ и следует, что $a=b$.

Точно так же из $ax=ay$ последовательно выводим

$$a[x+(-1)y]=ax+(-a)y=ay+(-a)y=[a+(-a)]y=0\cdot y=\Theta.$$

Значит, при $a\neq 0$ будет $x+(-1)y=\Theta$. Но, с другой стороны, $y+(-1)y=\Theta$, а потому $x=y$.

Впредь условимся в обозначениях

$$(-1)\cdot x=-x,\quad x+(-y)=x-y.$$

Легко показать, что

12) *$x-x=\Theta$ и если $x-y=\Theta$, то $x=y$.*

13) *Из $x-y=x-z$, следует $y=z$.*

14) *Если $x+y=z$, то $x=z-y$, и обратно.*

Мы не будем останавливаться на простой проверке этих утверждений.

Определение. Линейное пространство E называется *нормированным*, если каждому его элементу x соотнесено вещественное число $\|x\|$, называемое *нормой* этого элемента и обладающее следующими свойствами:

1) $\|x\|\geqslant 0$, *причем* $\|x\|=0$ *тогда и только тогда, когда* $x=\Theta$.

2) $\|ax\|=|a|\cdot\|x\|$ *и, в частности,* $\|-x\|=\|x\|$.

3) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

Ясно, что имея такое пространство, достаточно положить

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \tag{1}$$

чтобы превратить его в метрическое пространство. Впредь, говоря о линейном нормированном пространстве, мы всегда будем считать его метрическим, причем расстояние будем считать заданным формулой (1).

Полные линейные нормированные пространства были предметом изучения польского математика С. С. Банаха, почему их и называют *пространствами Банаха.*

Рассмотренные в гл. VII пространства L_p и l_p дают нам примеры пространств Банаха. Приведем еще два примера таких пространств.

Пространство C. Рассмотрим множество всех функций $f(x)$, заданных и непрерывных в одном и том же сегменте $[a, b]$. Определим в этом множестве сложение элементов $f_1 = f_1(x)$ и $f_2 = f_2(x)$ и умножение элемента $f = f(x)$ на число c обычными формулами

$$f_1 + f_2 = f_1(x) + f_2(x), \quad cf = cf(x).$$

Легко видеть, что тем самым наше множество превращено в линейное пространство. Полагая для каждого элемента $f = f(x)$

$$\|f\| = \max |f(x)|,$$

мы превращаем наше линейное пространство в нормированное. Действительно, без труда проверяется выполнение всех трех свойств нормы. Построенное таким образом линейное нормированное пространство обозначается обычно через C или $C([a, b])$.

Пусть $\{f_n\}$ [где $f_n = f_n(x)$] есть последовательность элементов C. Ясно, что соотношение $f_n \to f$ [где $f = f(x) \in C$], означает равномерную сходимость последовательности функций $f_n(x)$ к функции $f(x)$.

Теорема 1. *Пространство C полно.*

Действительно, пусть последовательность $\{f_n\}$ $[f_n = f_n(x)]$ элементов C сходится в себе. Закрепим какую-либо точку $x \in [a, b]$. Так как $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|$, то числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в себе и (в силу известного признака Больцано — Коши) существует конечный предел

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x). \tag{2}$$

Ввиду произвольности x, функция $f(x)$ определена на всем $[a, b]$. Далее, взяв $\varepsilon > 0$ и найдя такое N, что при $n > N$, $m > N$ будет

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon,$$

будем для всех x иметь (при $n > N$, $m > N$)

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Закрепим здесь x и $n>N$ и перейдем к пределу при возрастающем m. Это приводит нас к неравенству

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon,$$

справедливому при $n>N$ и любом x. Так как число N от выбора x не зависит, то стремление (2) происходит равномерно, откуда вытекает, что предельная функция $f(x)$ непрерывна и, стало быть, является элементом пространства C. Кроме того, равномерность стремления (2) и означает, что $f=f(x)$ есть предел последовательности $\{f_n\}$ в смысле метрики пространства C.

Пространство m. Рассмотрим множество всевозможных *ограниченных* последовательностей [1])

$$x=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots)$$

вещественных чисел. Определим в этом множестве сложение, умножение на число и норму следующим образом: пусть $x=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots)$ и $y=(y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots)$ две ограниченные последовательности, а a некоторое число. Положим по определению

$$x+y=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3,\ \ldots),$$
$$ax=(ax_1,\ ax_2,\ ax_3,\ \ldots),$$
$$\|x\|=\sup\{\,|x_k|\,\}.$$

Нетрудно убедиться, что тем самым наше множество превращается в линейное нормированное пространство. Это пространство принято обозначать буквой m.

Теорема 2. *Пространство m полно.*

Пусть $\{x^{(n)}\}$, где

$$x^{(n)}=(\xi_1^{(n)},\ \xi_2^{(n)},\ \xi_3^{(n)},\ \ldots)\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

— сходящаяся в себе последовательность элементов m.

Так как при любом закрепленном k будет

$$|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}|\leqslant\|x^{(n)}-x^{(m)}\|,$$

то числовая последовательность $\{\xi_k^{(1)},\ \xi_k^{(2)},\ \xi_k^{(3)},\ \ldots\}$ сходится в себе и, стало быть, имеет конечный предел $\xi_k=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}$.

Взяв $\varepsilon>0$, найдем такое N, что при $n>N$ и $m>N$ будет $\|x^{(n)}-x^{(m)}\|<\varepsilon$. Тогда при любом k окажется $|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}|<\varepsilon$. Закрепив здесь k и $n>N$, устремим m к бесконечности. В пределе получится неравенство

$$|\xi_k^{(n)}-\xi_k|\leqslant\varepsilon.\tag{3}$$

---

[1]) Напомним, что числовая последовательность $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots)$ называется ограниченной, если существует такая постоянная A, что при всех k будет $|x_k|\leqslant A$. Таким образом, ограниченность последовательности вовсе не означает, что в ней конечное число членов. Напротив, их имеется счетное множество (хотя некоторые из них могут быть равны друг другу).

Отсюда, в частности, вытекает, что $|\xi_k| \leqslant |\xi_k^{(n)}| + \varepsilon \leqslant \|x^{(n)}\| + \varepsilon$, так что последовательность $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$ ограничена и принадлежит m. Кроме того, ввиду произвольности значка k, из (3) следует, что $\|x^{(n)} - x\| \leqslant \varepsilon$, а так как для достижения этого неравенства потребовалось лишь, чтобы было $n > N$, то нами доказано соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$.

Теорема доказана.

Не следует думать, что не существует других метрических пространств, кроме нормированных. Легко привести примеры линейных метрических пространств, которые не являются нормированными.

Пространство s. Рассмотрим множество всевозможных числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, в котором сложение элементов и умножение элемента на число определим так же, как и в случае пространства m.

Расстояние $\rho(x, y)$ между элементами

$$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \quad \text{и} \quad y = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$$

определим формулой

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

Выполнение первых двух условий, которым должно удовлетворять расстояние, вполне очевидно. Чтобы установить неравенство треугольника

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z), \tag{4}$$

заметим, что функция $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$ в области $0 \leqslant t < +\infty$ возрастает $\left(\text{ибо } \varphi(t) = 1 - \frac{1}{1+t}\right)$. Значит, если $z = (z_1, z_2, z_3, \ldots)$ есть третья числовая последовательность, то

$$\frac{|x_k - z_k|}{1 + |x_k - z_k|} \leqslant \frac{|x_k - y_k| + |y_k - z_k|}{1 + |x_k - y_k| + |y_k - z_k|}.$$

Но

$$\frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k| + |y_k - z_k|} \leqslant \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|},$$
$$\frac{|y_k - z_k|}{1 + |x_k - y_k| + |y_k - z_k|} \leqslant \frac{|y_k - z_k|}{1 + |y_k - z_k|}.$$

Поэтому

$$\frac{|x_k - z_k|}{1 + |x_k - z_k|} \leqslant \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} + \frac{|y_k - z_k|}{1 + |y_k - z_k|}.$$

Умножая это неравенство на 2^{-k} и суммируя по всем k, приходим к (4). Таким образом, построенное линейное пространство оказывается метрическим. И в то же время оно не является нормиро-

ванным.[1]) Это пространство обозначается буквой s. Нетрудно показать, что если $x^{(n)}=(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \xi_3^{(n)}, \ldots)$, $x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$, то для соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}=x$ необходимо и достаточно, чтобы при всех k было $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_k^{(n)}=\xi_k$. Опираясь на это предложение, легко убедиться в полноте пространства s.

Пространство S. Пространством S называется пространство, элементами которого являются всевозможные измеримые функции, заданные на одном и том же измеримом множестве E с мерой $mE>0$. При этом эквивалентные функции не считаются различными. Сложение элементов $f_1=f_1(x)$ и $f_2=f_2(x)$ этого пространства и умножение элемента $f=f(x)$ на число a определяется, как и в случае пространства C, формулами

$$f_1+f_2=f_1(x)+f_2(x), \quad af=af(x).$$

Тем самым S есть пространство линейное. Оно становится метрическим (но не нормированным!), если положить

$$\rho(f_1, f_2)=\int\limits_E \frac{|f_1(x)-f_2(x)|}{1+|f_1(x)-f_2(x)|}\,dx.$$

Сходимость $\lim f_n=f$ [где $f_n=f_n(x)$, $f=f(x)$] *в этом пространстве есть сходимость последовательности* $\{f_n(x)\}$ *к функции* $f(x)$ *по мере.* Предоставляем читателю доказать это предложение, а также убедиться в том, что пространство S полно.

§ 2. Компактность

Установив понятие предела последовательности элементов метрического пространства, мы уже без всякого труда переносим в теорию этих пространств важнейшие понятия теории точечных множеств. Так, например, если из множества A элементов метрического пространства можно выделить последовательность р а з л и ч н ы х элементов $\{x_n\}$, имеющую пределом элемент $x\in E$, то говорят, что x есть *предельный элемент*, или предельная точка множества A. Множество, содержащее все свои предельные точки, называется *замкнутым*. Множество $\bar{A}$, получающееся из множества A присоединением к нему всех его предельных точек, называется *замыканием* множества A. Множество, дополнительное к замкнутому, называется *открытым* и т. д.

Если x_0 — закрепленный элемент метрического пространства, а $r>0$ — некоторое положительное число, то *открытой сферой* с центром x_0 и радиусом r называется множество $S_r(x_0)$, состоящее из всех точек x пространства, для которых $\rho(x, x_0)<r$. Ана-

---

[1]) Если положить $\|x\|=\rho(x, \Theta)$, то не будет выполняться условие $\|ax\|=|a|\cdot\|x\|$. Например, если $e_0=(1, 1, 1, \ldots)$, то $\|e_0\|=1/2$, $\|2e_0\|=2/3$.

логично этому, множество $\overline{S_r(x_0)}$ тех точек x, для которых $\rho(x, x_0) \leqslant r$, называется *замкнутой сферой* с центром x_0 и радиусом r. Легко показать, что замкнутая сфера есть множество замкнутое, [1]) а открытая — открытое и что сфера $\overline{S_r(x_0)}$ есть замыкание сферы $S_r(x_0)$. При помощи понятия сферы вводится обычным образом понятие *внутренней точки* множества, а пользуясь этим последним понятием, легко показать, что открытые множества это такие, все точки которых суть внутренние. На всех этих вещах мы не будем останавливаться ввиду отсутствия новых принципиальных моментов.

Множество A элементов метрического пространства E называется *ограниченным*, если оно целиком содержится в некоторой сфере. В гл. II была доказана теорема Больцано — Вейерштрасса, гласящая, что у всякого ограниченного бесконечного множества точек прямой имеется хотя бы одна предельная точка. В самом начале гл. XI этот результат был перенесен со случая прямой на случай любого эвклидова пространства. Однако он не переносится на всякое метрическое пространство. Действительно, рассмотрим хотя бы пространство L_2. В качестве множества A возьмем какую-либо ортонормальную систему $\{\omega_k\}$ $[\omega_k = \omega_k(x)]$. Так как при любом k будет $\|\omega_k\| = 1$, то это множество ограниченное. Но при $i \neq k$ будет

$$\|\omega_i - \omega_k\|^2 = \int_a^b [\omega_i^2(x) - 2\omega_i(x)\,\omega_k(x) + \omega_k^2(x)]\,dx = 2$$

и потому из A нельзя выделить никакой сходящейся последовательности. Поэтому в общей теории метрических пространств понятие ограниченного множества уже не имеет того фундаментального значения, как в случае пространств евклидовых. Его место занимает понятие *компактного* множества.

Определение 1. Непустое множество A элементов метрического пространства E называется *компактным*, если оно конечно, или же если всякая бесконечная часть A_0 этого множества имеет хотя бы одну предельную точку.

Впрочем, надо заметить, что справедлива

Теорема 1. *Всякое компактное множество ограничено.*

Допустим, что множество A не ограничено. Закрепив какую-либо точку $x_0 \in E$, мы можем найти такую точку $x_1 \in A$, что $\rho(x_1, x_0) > 1$. После этого можно найти такую точку $x_2 \in A$, что

$$\rho(x_2, x_0) > \rho(x_1, x_0) + 1.$$

---

[1]) Для этого достаточно показать, что метрическая функция $\rho(x, y)$ непрерывна, т. е. что из соотношений $x_n \to x$, $y_n \to y$ вытекает соотношение $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$. Действительно, $\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x, y) + \rho(y, y_n)$ и при достаточно больших n окажется $\rho(x_n, y_n) < \rho(x, y) + \varepsilon$. С другой стороны $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, y)$ и при достаточно больших n будет $\rho(x, y) < \rho(x_n, y_n) + \varepsilon$.

Продолжая этот процесс, мы получим такую последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ точек множества A, что

$$\rho(x_n, x_0) > \rho(x_1, x_0) + \rho(x_2, x_0) + \ldots + \rho(x_{n-1}, x_0) + 1.$$

Тогда при $n > m$ будет $\rho(x_n, x_0) > \rho(x_m, x_0) + 1$, а так как $\rho(x_n, x_0) < \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, x_0)$, то $\rho(x_n, x_m) > 1$ и потому из последовательности $\{x_n\}$ не выделяется никакой сходящейся подпоследовательности, т. е. $\{x_n\}$ не имеет предельных точек. Но тогда множество A не компактно.

Доказанная теорема допускает значительное усиление. Для его изложения нужно следующее

Определение 2. Пусть A — некоторое множество точек метрического пространства E, $B \subset A$ — его подмножество, а $\varepsilon > 0$ — некоторое положительное число. Говорят, что B есть *ε-сеть* в множестве A, если для всякого элемента $x \in A$ найдется такой элемент $y \in B$, что $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Теорема 2. *Если A есть компактное множество, то для любого $\varepsilon > 0$ в A имеется конечная ε-сеть.*

Нетрудно видеть, что всякое множество, в котором есть конечная ε-сеть, необходимо ограничено. [1]) Поэтому настоящая теорема есть действительно усиление теоремы 1. Переходя к доказательству, допустим, что теорема неверна. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ в множестве A нет конечной ε-сети. Выберем в A какой-либо элемент x_1. Так как он не образует ε-сети, то в A найдется такой элемент x_2, что $\rho(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$. Но система двух элементов x_1 и x_2 также не образует ε-сети. Поэтому в A найдется такой элемент x_3, что $\rho(x_1, x_3) \geqslant \varepsilon$, $\rho(x_2, x_3) \geqslant \varepsilon$.

Продолжая это рассуждение, мы убеждаемся в существовании такой последовательности $\{x_n\}$ элементов A, что при $n \neq m$ будет $\rho(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon$.

Но тогда у этой последовательности нет предельных элементов, что противоречит компактности A. Теорема доказана.

Таким образом, существование в множестве A при любом $\varepsilon > 0$ конечной ε-сети есть условие, необходимое для компактности A. Естественно спросить, не будет ли оно также и достаточным. Оказывается, что для произвольного метрического пространства это не так. Пусть, например, нашим метрическим пространством является множество рациональных чисел, содержащихся в сегменте $[0, 1]$ с обычным определением расстояния $\rho(x, y) = |x - y|$.

Будем рассматривать само это пространство как некоторое содержащееся в нем множество. Ясно, что в этом множестве имеется конечная ε-сеть при любом $\varepsilon > 0$ (такой сетью служит хотя бы множество точек $0, 1/n, 2/n, \ldots, 1$, где $n\varepsilon > 1$). Тем не

---

[1]) Действительно, пусть ε-сеть состоит из элементов $y_1, y_2, \ldots y_s$. Выберем какой-либо элемент пространства x_0 и пусть $\max\limits_{(i=1, 2, \ldots, s)} \{\rho(y_i, x_0)\} = d$. Ясно, что $A \subset S_r(x_0)$, где $r = d + \varepsilon$.

менее, наше множество не компактно, ибо из него можно выделить последовательность

$$x_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

имеющую иррациональный предел $e/3$, т. е. лишенную предельных точек в нашем пространстве. Читатель, вероятно, догадывается, что полученный неприятный результат имеет источником неполноту рассмотренного пространства. И действительно, справедлива

Теорема 3. *Пусть E — полное метрическое пространство и A есть бесконечное подмножество E. Если для всякого $\varepsilon > 0$ в A имеется конечная ε-сеть, то A — компактное множество.*

Обозначим через P какую-нибудь бесконечную часть множества A и пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим конечную $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть, отвечающую числу $\frac{\varepsilon}{2}$. Пусть эта $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть состоит из точек $y_1, y_2, \ldots, y_s$. Тогда множество A, а значит, и его часть P, содержится в сумме конечного числа открытых сфер $P \subset \sum_{i=1}^{s} S_{\varepsilon/2}(y_i)$. Но тогда хоть одна из этих сфер, пусть это будет $S_{\varepsilon/2}(y_m)$, содержит бесконечно много точек, содержащихся в множестве P (ибо иначе и все P было бы конечным) Если x' и x'' — две точки, входящие в (бесконечное!) пересечение $Q = S_{\varepsilon/2}(y_m) P$, то $\rho(x', x'') < \varepsilon$. Иначе говоря, нами доказан следующий факт: всякое бесконечное подмножество P множества A содержит бесконечную часть Q диаметра[1]) не большего любого наперед заданного числа ε,

$$d(Q) < \varepsilon.$$

Заметив это, возьмем какую-нибудь бесконечную часть A_0 множества A. По доказанному из A_0 выделяется бесконечное множество A_1 диаметра $d(A_1) < 1$. Далее, из A_1 выделяется бесконечное множество A_2 диаметра $d(A_2) < 1/2$. Продолжая этот процесс, мы получим последовательность вложенных друг в друга бесконечных множеств

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$$

таких, что $d(A_n) < 1/n$. Выделим из каждого A_n по точке x_n, причем так, чтобы точка x_n была отлична от $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Если $m > n$, то $x_m \in A_m \subset A_n$ и потому $\rho(x_n, x_m) < 1/n$. Отсюда видно, что последовательность $\{x_n\}$ сходится в себе. Но тогда (благодаря полноте пространства E) существует предел $x = \lim x_n$. Этот предел есть точка, предельная для A_0. Итак, всякое беско-

[1]) Как всегда, диаметром $d(Q)$ множества Q называется точная верхняя граница множества чисел $\rho(x', x'')$, где x' и x'' элементы Q.

нечное подмножество A_0 множества A имеет предельные точки, но это ведь и означает, что A компактно.

Сходным образом доказывается

Теорема 4. *Пусть A бесконечное множество элементов метрического пространства E. Для его компактности необходимо, а в случае полноты пространства E и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ в E существовало компактное множество B_ε, обладающее следующим свойством:*[1]) *для любого $x \in A$ найдется такое $y \in B_\varepsilon$, что $\rho(x, y) < \varepsilon$.*

Необходимость условия тривиальна, ибо в случае компактности множества его само и можно принять за B_ε. Переходя к доказательству достаточности этого условия, покажем, что при его выполнении из всякой бесконечной части P множества A можно выделить бесконечное же множество Q диаметра меньшего любого наперед заданного $\varepsilon > 0$. Сделав это, мы сможем закончить доказательство уже дословно так же, как и в теореме 3.

Итак, пусть P — бесконечная часть A и $\varepsilon > 0$ — некоторое положительное число. Построим множество $B_{\varepsilon/3}$, отвечающее числу $\varepsilon/3$ и для каждого $x \in P$ выделим из $B_{\varepsilon/3}$ такой элемент $y(x)$, что

$$\rho(x, y(x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть D есть множество всех $y(x)$, где $x \in P$.

Допустим сначала, что D содержит лишь конечное число различных элементов. Тогда хоть один из них, пусть это будет y_0, допускает представление $y_0 = y(x)$ для бесконечного множества элементов $x \in P$. Это множество и можно принять за искомое множество Q, ибо его диаметр меньше $\frac{2}{3}\varepsilon$. Если же множество D бесконечно, то (оно есть часть компактного множества $B_{\varepsilon/3}$!) из него выделяется сходящаяся последовательность

$$y(x_1),\ y(x_2),\ y(x_3),\ \ldots,$$

причем все элементы $x_1, x_2, x_3 \ldots$ отличны друг от друга.

В силу сходимости последовательности $\{y(x_n)\}$ найдется такое N, что при $n > N$ и $m > N$ будет

$$\rho(y(x_n), y(x_m)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Но тогда за искомое множество Q можно принять множество $\{x_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}, \ldots\}$. В самом деле, если $n > N$ и $m > N$, то

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, y(x_n)) + \rho(y(x_n), y(x_m)) + \rho(y(x_m), x_m) < \varepsilon$$

и

$$d(Q) \leqslant \varepsilon.$$

Теорема доказана.

---

[1]) Мы не можем назвать B_ε ε-сетью в A, ибо не предполагаем, что $B_\varepsilon \subset A$.

Теоремы 3 и 4 дают общие критерии компактности в полных пространствах. Однако, для многих часто встречающихся пространств найдены более простые признаки компактности. Остановимся на некоторых из них.

§ 3. Условия компактности в некоторых пространствах

В этом параграфе мы устанавливаем условия компактности множества, лежащего в одном из четырех пространств s, l_p, C и L_p.

Пространство s. Элементами этого пространства являются числовые последовательности $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$. Так как число ξ_k, стоящее в этой последовательности на k-м месте, т. е. k-я «координата» точки x меняется при переходе от одной последовательности к другой, то оно является функцией от последовательности. Поэтому уместно обозначить это число через $\xi_k(x)$.

При помощи этого обозначения можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть $A = \{x\}$, где $x = (\xi_1(x), \xi_2(x), \xi_3(x), \ldots)$, бесконечное множество точек пространства s. Для того, чтобы A было компактно, необходимо и достаточно существование таких чисел $M_1, M_2, M_3, \ldots$, что при любом $x \in A$ оказывается*

$$|\xi_k(x)| \leqslant M_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

В самом деле, допустим, что такие числа M_k существуют. Выберем из A последовательность различных точек $x_1, x_2, x_3, \ldots$ и составим числовую последовательность из первых координат выбранных точек

$$\xi_1(x_1), \; \xi_1(x_2), \; \xi_1(x_3), \; \ldots . \tag{1}$$

Так как $|\xi_1(x_n)| \leqslant M_1$, то по теореме Больцано — Вейерштрасса из (1) выделяется сходящаяся последовательность

$$\xi_1(x_1^{(1)}), \; \xi_1(x_2^{(1)}), \; \xi_1(x_3^{(1)}), \; \ldots, \; \lim_{n \to \infty} \xi_1(x_n^{(1)}) = \alpha_1.$$

Отметим, что здесь $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots$ есть последовательность, частичная для последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$, причем взаимное расположение членов ее таково же, как и в последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$.

Последовательность вторых координат

$$\xi_2(x_1^{(1)}), \; \xi_2(x_2^{(1)}), \; \xi_2(x_3^{(1)}), \; \ldots$$

выделенных точек $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots$ ограничена (ибо $|\xi_2(x_n^{(1)})| \leqslant M_2$) и поэтому из нее выделяется сходящаяся последовательность

$$\xi_2(x_1^{(2)}), \; \xi_2(x_2^{(2)}), \; \xi_2(x_3^{(2)}), \; \ldots, \; \lim_{n \to \infty} \xi_2(x_n^{(2)}) = \alpha_2.$$

При этом последовательность $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \ldots$ есть частичная для последовательности $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)} \ldots$, и взаимный порядок двух

членов, входящих в обе последовательности, одинаков в обеих последовательностях.

Продолжая этот процесс, мы приходим к бесконечной матрице различных точек множества A:

$$\begin{array}{l} x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ x_3^{(1)},\ \ldots \\ x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ x_3^{(2)},\ \ldots \\ x_1^{(3)},\ x_2^{(3)},\ x_3^{(3)},\ \ldots \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

причем каждая следующая ее строка получается из предыдущей удалением части членов без нарушения взаимного порядка оставшихся членов. Строки матрицы таковы, что существуют конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_p(x_n^{(p)}) = \alpha_p, \quad (p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

Получив указанную матрицу, рассмотрим последовательность элементов $y_1 = x_1^{(1)},\ y_2 = x_2^{(2)},\ y_3 = x_3^{(3)}\ \ldots$, стоящих на ее диагонали. Это последовательность различных точек множества A.

Если закрепить какое-нибудь натуральное p, то элементы y_p, y_{p+1}, y_{p+2}, ... будут элементами p-й строки нашей матрицы

$$y_n = x_{m(n,\ p)}^{(p)} \qquad (n \geqslant p),$$

причем, очевидно, $m(n,\ p) \geqslant n$. Но тогда

$$\xi_n(y_n) = \xi_p\left(x_{m(n,\ p)}^{(p)}\right) \qquad (n \geqslant p)$$

и, стало быть,

$$\lim_{n\to\infty} \xi_p(y_n) = \alpha_p.$$

Последнее соотношение показывает, что последовательность $y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots$, выделенная из последовательности $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$ точек A, имеет пределом точку $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots)$.

Значит всякая счетная часть $\{x_n\}$ множества A имеет предельную точку, а потому A компактно. Таким образом, нами доказана достаточность условия теоремы.

Переходя к установлению его необходимости, допустим, что это условие не выполнено. Тогда хоть для одного k не найдется такого числа M_k, чтобы при всех $x \in A$ было $|\xi_k(x)| \leqslant M_k$. Закрепив это k, мы можем гарантировать, что множество чисел $\{\xi_k(x)\}$ не ограничено. Поэтому можно выбрать из A такую последовательность $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$, чтобы оказалось $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_k(x_n) = \infty$. Ясно, что последовательность $\{x_n\}$ не имеет предельных точек.[1]) Теорема доказана.

Пространство l_p $(p \geqslant 1)$. Это пространство состоит из последовательностей $x = (\xi_1(x),\ \xi_2(x),\ \xi_3(x_k),\ \ldots)$, у которых

$$\|x\| = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k(x)|^p\right]^{1/p} < +\infty.$$

[1]) Если бы из $\{x_n\}$ выделялась подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$, имеющая предел a, то оказывалось бы, что $\xi_k(x_{n_i}) \to \xi_k(a)$, в то время как $\xi_k(x_{n_i}) \to \infty$.

Условие компактности в этом пространстве дается следующей теоремой:

Теорема 2. *Пусть A — бесконечное множество точек пространства l_p. Для того, чтобы A было компактно, необходимо и достаточно выполнение совокупности двух условий:*

1) *существуют такие числа $M_1, M_2, M_3, \ldots,$ что при всех $x \in A$ оказывается*

$$|\xi_k(x)| \leqslant M_k \qquad (k=1, 2, 3, \ldots);$$

2) *ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k(x)|^p$$

сходится равномерно на множестве A.

Докажем сначала д о с т а т о ч н о с т ь условий теоремы. Предполагая их выполненными, прежде всего находим такое m, чтобы при всех $x \in A$ было $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} |\xi_k(x)|^p < 1$.

Закрепив это m, мы будем иметь для всех $x \in A$, что

$$\sum_{k=1}^{m} |\xi_k(x)|^p \leqslant \sum_{k=1}^{m} M_k^p.$$

Стало быть, положив $\sum\limits_{k=1}^{m} M_k^p + 1 = H$, мы для всех $x \in A$ будем иметь $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k(x)|^p < H$.

Установив это, рассмотрим какое-либо бесконечное подмножество A_0 множества A. Совершенно так же, как в теореме 1, мы покажем, что из A_0 выделяется такая последовательность $y_1, y_2, y_3, \ldots,$ что существуют конечные пределы

$$\lim_{n \to \infty} \xi_k(y_n) = \alpha_k \qquad (k=1, 2, 3, \ldots).$$

При любом N будет $\sum\limits_{k=1}^{N} |\xi_k(y_n)|^p < H$.

Переходя здесь к пределу при возрастающем n и закрепленном N, находим $\sum\limits_{k=1}^{N} |\alpha_k|^p \leqslant H$, откуда, в силу произвольности N, вытекает, что последовательность $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$ входит в пространство l_p.

Покажем, что

$$a = \lim_{n \to \infty} y_n. \tag{2}$$

С этой целью возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем такое h, чтобы при всех $x \in A$ было

$$\sum_{k=h+1}^{\infty} |\xi_k(x)|^p < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p.$$

Тогда, как и выше $\left(\text{т. е. рассмотрев сначала сумму } \sum_{k=h+1}^{N}\right)$, мы убедимся, что

$$\sum_{k=h+1}^{\infty} |\alpha_k|^p \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p.$$

Но

$$\left[\sum_{k=h+1}^{\infty} |\xi_k(y_n) - \alpha_k|^p\right]^{1/p} \leqslant \left[\sum_{k=h+1}^{\infty} |\xi_k(y_n)|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{k=h+1}^{\infty} |\alpha_k|^p\right]^{1/p}.$$

Стало быть:

$$\left[\sum_{k=h+1}^{\infty} |\xi_k(y_n) - \alpha_k|^p\right]^{1/p} < \frac{2}{3}\varepsilon$$

и

$$\|y_n - a\| < \left[\sum_{k=1}^{h} |\xi_k(y_n) - \alpha_k|^p\right]^{1/p} + \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Так как для достаточно больших n будет

$$\sum_{k=1}^{h} |\xi_k(y_n) - \alpha_k|^p < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p,$$

то для этих n оказывается

$$\|y_n - a\| < \varepsilon,$$

чем и доказано (2), а значит и компактность множества A.

Необходимость условия 1) доказывается дословно так же, как необходимость условия теоремы 1. Предположим теперь, что не выполнено условие 2). Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что для всякого натурального n в A найдется элемент x_n, для которого

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k(x_n)|^p \geqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что среди элементов x_n должно быть бесконечное множество различных. И в то же время из $\{x_n\}$ не выделяется никакой сходящейся последовательности.

В самом деле, если бы последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots$, где $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, имела предел $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$, то мы прежде всего могли бы найти такое h, что

$$\sum_{k=h+1}^{\infty} |\alpha_k|^p < \frac{\varepsilon}{2^p}.$$

Затем для достаточно больших $i \, (i > i_0)$ мы имели бы

$$\|x_{n_i} - a\| < \frac{\varepsilon^{1/p}}{2},$$

откуда и подавно при этих i

$$\sum_{k=n_i+1}^{\infty} |\xi_k(x_{n_i}) - \alpha_k|^p < \frac{\varepsilon}{2^p}.$$

Значит, считая $i > i_0$ настолько большим, что $n_i \geqslant h$, мы имели бы:

$$\left(\sum_{k=n_i+1}^{\infty} |\xi_k(x_{n_i})|^p\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=n_i+1}^{\infty} |\xi_k(x_{n_i}) - \alpha_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=n_i+1}^{\infty} |\alpha_k|^p\right)^{1/p} < \varepsilon^{1/p},$$

а это противоречит неравенству (3). Теорема доказана.

В качестве примера рассмотрим множество A, состоящее из «единичных ортов» пространства l_p, т. е. из элемента вида

$$e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots) \quad (1 \text{ на } n\text{-м месте}).$$

Здесь выполнение первого условия теоремы очевидно. Далее, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k(e_n)|^p$ сходится при всяком n, ибо $\xi_k(e_n) = 0$ при $k \neq n$. Но сходимость этого ряда не равномерна относительно n, и множество A не компактно. Это видно и непосредственно. Действительно, ведь $\lim_{n \to \infty} \xi_k(e_n) = 0$ и потому единственной предельной точкой A могла бы быть только точка $\Theta = (0, 0, 0, \ldots)$. Но при любом n

$$\|e_n - \Theta\| = 1$$

и потому у A нет предельных точек.[1]) Полезно отметить еще, что при всех n оказывается $\|e_n\| = 1$ и потому A ограниченное множество. Таким образом, мы получаем еще один пример множества ограниченного, но не компактного.

[1]) Еще проще установить это, заметив, что при $m \neq n$ будет $\|e_n - e_m\| = \sqrt[p]{2}$.

Пространство C. Переходя к рассмотрению условий компактности в пространстве C, дадим следующее

Определение. Пусть на сегменте $[a, b]$ задано семейство $A = \{f(x)\}$ непрерывных функций. Если всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что при $|x'' - x'| < \delta$ (где x' и x'' взяты из $[a, b]$) для любой функции $f(x)$ из A оказывается

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon,$$

то говорят, что функции семейства A *равностепенно непрерывны.*

В пояснение сказанного заметим, что наличие такого δ для каждой отдельной функции $f(x)$ из A непосредственно вытекает из непрерывности этих функций. Суть же дела заключается в возможности подбора одного δ для всех функций семейства сразу.

Теорема 3 (Ц. Арцела — Дж. Асколи). *Пусть $A = \{f(x)\}$ бесконечное семейство непрерывных функций, заданных на сегменте $[a, b]$. Если*

1) *все функции семейства ограничены одним числом, $|f(x)| \leqslant M$,*

2) *эти функции равностепенно непрерывны,*

то из A выделяется равномерно сходящаяся последовательность.

Доказательство. Обозначим через E множество всех рациональных чисел сегмента $[a, b]$. Это множество счетное и поэтому, на основании леммы 1, § 4, гл. VIII, из A выделяется последовательность различных функций $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$, сходящаяся на всех точках множества E. Покажем, что эта последовательность сходится не только на E, но и на всем сегменте $[a, b]$. Действительно, пусть x — иррациональная точка из этого сегмента. Взяв $\varepsilon > 0$, находим такую рациональную точку $r \in [a, b]$, чтобы для всех функций семейства A было $|f(x) - f(r)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Существование такого r вытекает из условия равностепенной непрерывности функций семейства. Так как числовая последовательность $\{f_n(r)\}$ сходится, то нашему ε отвечает такое N, что как только $n > N$ и $m > N$, так сейчас же $|f_n(r) - f_m(r)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Но тогда для этих же n и m окажется

$$f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f_n(r)| + |f_n(r) - f_m(r)| + \\ + |f_m(r) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в себе и, стало быть, имеет конечный предел.

Итак, нами доказано существование предела

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \varphi(x)$$

для всех $x \in [a, b]$. Легко видеть, что предельная функция $\varphi(x)$ непрерывна. В самом деле, взяв $\varepsilon > 0$ и найдя такое $\delta > 0$, что неравенство $|x'' - x'| < \delta$ влечет для всех функций семейства

неравенство $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$, мы закрепим такие точки x' и x'', что $|x''-x'|<\delta$ и перейдем к пределу в неравенстве

$$|f_n(x'')-f_n(x')|<\varepsilon,$$

что приведет нас к аналогичному неравенству

$$|\varphi(x'')-\varphi(x')|\leqslant\varepsilon$$

уже для предельной функции.

Остается убедиться в том, что стремление $f_n(x)$ к $\varphi(x)$ происходит равномерно относительно x.

Для этого прежде всего заметим, что разности $f_n(x)-\varphi(x)$ так же, как и функции $f_n(x)$, равностепенно непрерывны. Поэтому, взяв $\varepsilon>0$, мы сможем найти такое $\delta>0$, что при $|x''-x'|<\delta$ и при любом n будет

$$|\{f_n(x'')-\varphi(x'')\}-\{f_n(x')-\varphi(x')\}|<\frac{\varepsilon}{2}. \quad (4)$$

Найдя такое δ, возьмем настолько большое натуральное число s, что $\frac{b-a}{s}<\delta$, и положим

$$z_0=a,\ z_1=a+\frac{b-a}{s},\ z_2=a+2\frac{b-a}{s},\ \ldots,\ z_s=b.$$

В каждой точке z_i будет $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z_i)=\varphi(z_i)$ и потому найдется такое N_i, что при $n>N_i$ будет

$$|f_n(z_i)-\varphi(z_i)|<\frac{\varepsilon}{2}. \quad (5)$$

Пусть $N=\max\{N_0, N_1, \ldots, N_s\}$. Если $n>N$, то при любом $x\in[a, b]$ будет

$$|f_n(x)-\varphi(x)|<\varepsilon. \quad (6)$$

Действительно, взяв какое угодно $x\in[a, b]$, сможем найти такое i, что $|z_i-x|<\frac{b-a}{s}<\delta$, а тогда (6) будет следовать из (4) и (5). Так как число N от выбора x не зависит, то теорема доказана полностью.

Теорема 4. *Для того чтобы бесконечное множество A элементов пространства C было компактно, необходимо и достаточно, чтобы функции, входящие в A, были ограничены одним числом и равностепенно непрерывны.*

Достаточность условий теоремы доказана в теореме Арцела—Асколи. Необходимость условия ограниченности функций $f(x)$ из A одним числом вытекает из теоремы 1 предыдущего параграфа, ибо ограниченность множества A, вытекающая согласно этой теореме из его компактности, и означает, что функции, входящие в A, ограничены одним числом. Остается установить необходимость условия равностепенной непрерывности.

Допустим, что это условие не выполнено. Тогда для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ найдутся последовательность функций $\{f_n(x)\}$ из A и две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ точек из $[a, b]$, обладающие свойствами:

$$\lim (y_n - x_n) = 0, \quad |f_n(x_n) - f_n(y_n)| \geqslant \varepsilon_0. \tag{7}$$

Последовательность $\{f_n(x)\}$ должна содержать бесконечно много различных элементов A. В то же время из нее не выделяется никакой равномерно сходящейся подпоследовательности. Действительно, предположим, что такая подпоследовательность из $\{f_n(x)\}$ выделилась. Не ограничивая общности, можно считать, что это и есть сама последовательность $\{f_n(x)\}$, ибо к этому сводится дело при помощи перемены обозначений. Итак, кроме соотношений (7), о последовательности $\{f_n(x)\}$ известно, что она равномерно сходится к некоторой (очевидно непрерывной) функции $\varphi(x)$.

Для упомянутого выше $\varepsilon_0 > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $|x'' - x'| < \delta$ будет $|\varphi(x'') - \varphi(x')| < \frac{\varepsilon_0}{3}$. С другой стороны, можно найти такое N, что при $n > N$ и любом x из $[a, b]$ будет $|f_n(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon_0}{3}$.

Возьмем $n > N$, подчинив его еще условию, чтобы было $|y_n - x_n| < \delta$. При этом n окажется

$$|f_n(x_n) - f_n(y_n)| \leqslant |f_n(x_n) - \varphi(x_n)| + |\varphi(x_n) - \varphi(y_n)| + \\ + |\varphi(y_n) - f_n(y_n)| < \varepsilon_0.$$

Но это противоречит соотношению (7). Таким образом, при невыполнении условия равностепенной непрерывности функций, входящих в множество A, это множество не компактно. Теорема доказана.

Приведем пример[1]) применения теоремы 3 в вопросах классического анализа. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{8}$$

правая часть которого задана и непрерывна в некотором замкнутом прямоугольнике R.

Теорема 5. *Если (x_0, y_0) внутренняя точка R, то через эту точку проходит по крайней мере одна интегральная кривая уравнения* (8).

Доказательство. Так как $f(x, y)$ непрерывна в R, то она там ограничена. Пусть $|f(x, y)| < M$.

Проведем через (x_0, y_0) прямые I и II с угловыми коэффициентами M и $-M$. Построим, далее, две прямые $x = a$ и $x = b$, где $a < x_0 < b$, выбрав числа a и b настолько близкими к x_0, чтобы треугольники ABC и ADE, ограниченные прямыми $x = a$ и $x = b$ и проведенными ранее прямыми и II, лежали целиком в прямоугольнике R (см. рис. 9).

Проделав это построение, разложим сегмент $[a, b]$ точками $z_0 = a < z_1 < < z_2 < \ldots < z_s = b$ на s частей, причем так, чтобы точка x_0 совпадала

---

1) Я следую изложению И. Г. Петровского (см. его «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений», ГОНТИ 1939, § 12).

с одной из точек деления, пусть, например, $x_0 = z_m$. Проведем через (x_0, y_0) прямую с угловым коэффициентом $f(x_0, y_0)$. Эта прямая будет лежать в вертикальных углах BAC и DAE. Двигаясь из точки (x_0, y_0) вдоль проведенной прямой направо, мы встретим на ней точку (z_{m+1}, u_{m+1}). Предполагая $m+1 < s$, проведем через эту точку прямую с угловым коэффициентом $f(z_{m+1}, u_{m+1})$ и рассмотрим ее отрезок, лежащий над сегментом $[z_{m+1}, z_{m+2}]$. Этот отрезок целиком лежит в треугольнике ABC. Если $m+2 < s$, то через правый конец (z_{m+2}, u_{m+2}) полученного отрезка проводим новую прямую с угловым коэффициентом $f(z_{m+2}, u_{m+2})$ и продолжаем этот процесс до тех пор, пока в качестве правого конца одного из построенных отрезков не получим точки, лежащей на прямой $x = b$. Аналогичное построение проделаем, двигаясь из точки (x_0, y_0) влево.

В результате мы получим ломаную, имеющую вершины в точках

$$(z_0, u_0), \quad (z_1, u_1), \ \ldots, \quad (z_s, u_s),$$

где $z_m = x_0$, $u_m = y_0$, и такую, что угловой коэффициент звена, соединяющего вершины (z_k, u_k) и (z_{k+1}, u_{k+1}), есть $f(z_k, u_k)$ при $k \geqslant m$ и $f(z_{k+1}, u_{k+1})$ при

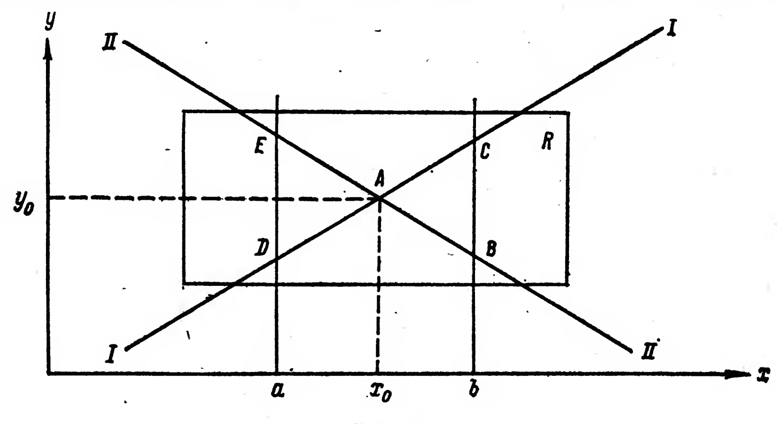


Рис. 9.

$k < m$. Эта ломаная называется *ломаной Эйлера*. Важно заметить, что она не выходит из треугольников ABC и ADE (это проще всего доказать индуктивно при самом построении ломаной, переходя последовательно от одного звена ломаной к другому). Рассмотрим ту функцию $\varphi(x)$, графиком которой является ломаная Эйлера. Эта функция ограничена, ибо ее график не выходит за пределы прямоугольника R. Нетрудно видеть также, что $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|\varphi(x'') - \varphi(x')| \leqslant M\,|x'' - x'|.$$

Будем называть $\varphi(x)$ *функцией Эйлера* и говорить, что она соответствует произведенному разложению $[a, b]$ на части. Вообразим себе всевозможные функции Эйлера, которые можно получить, меняя способ разложения $[a, b]$. Согласно сказанному, эти функции ограничены одним числом и равностепенно непрерывны. Значит, множество этих функций компактно в C.

Рассмотрим теперь последовательность таких способов разложения $[a, b]$ на части точками $z_0, z_1, \ldots, z_s$, что $\max[z_{k+1} - z_k] \to 0$. Этим способам отвечают некоторые функции Эйлера. Выберем из их последовательности равномерно сходящуюся подпоследовательность $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \psi(x)$.

Очевидно, $\psi(x_0) = y_0$, так что кривая $y = \psi(x)$ проходит через точку (x_0, y_0). Мы докажем, что это есть интегральная кривая уравнения (8).

Для этого обозначим через $z_0^{(n)}, z_1^{(n)}, \ldots, z_{s_n}^{(n)}$ точки деления того способа дробления, которому отвечает функция $\varphi_n(x)$. Напомним, что

$$\lim_{n\to\infty}\left[\max_k\left\{z_{k+1}^{(n)}-z_k^{(n)}\right\}\right]=0. \tag{9}$$

Возьмем какую-нибудь точку x, лежащую в полуоткрытом промежутке $(x_0, b]$. Пусть $z_p^{(n)} < x \leqslant z_{p+1}^{(n)}$ $[p=p(n)]$.

Тогда, сохраняя по-прежнему обозначение z_m $[m=m(n)]$ для точки деления, совпадающей с x_0, мы будем иметь:

$$\varphi_n\left(z_{m+1}^{(n)}\right)=\varphi_n\left(z_m^{(n)}\right)+f\left(x_0, \varphi_n(x_0)\right)\left(z_{m+1}^{(n)}-x_0\right),$$
$$\varphi_n\left(z_{m+2}^{(n)}\right)=\varphi_n\left(z_{m+1}^{(n)}\right)+f\left(z_{m+1}^{(n)}, \varphi_n\left(z_{m+1}^{(n)}\right)\right)\left(z_{m+2}^{(n)}-z_{m+1}^{(n)}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_n\left(z_p^{(n)}\right)=\varphi_n\left(z_{p-1}^{(n)}\right)+f\left(z_{p-1}^{(n)}, \varphi_n\left(z_{p-1}^{(n)}\right)\right)\left(z_p^{(n)}-z_{p-1}^{(n)}\right),$$
$$\varphi_n(x)=\varphi_n\left(z_p^{(n)}\right)+f\left(z_p^{(n)}, \varphi_n\left(z_p^{(n)}\right)\right)\left(x-z_p^{(n)}\right).$$

Складывая эти равенства, находим

$$\varphi_n(x)=y_0+\sum_{k=m}^{p-1} f\left(z_k^{(n)}, \varphi_n\left(z_k^{(n)}\right)\right)\left(z_{k+1}^{(n)}-z_k^{(n)}\right)+f\left(z_p^{(n)}, \varphi_n\left(z_p^{(n)}\right)\right)\left(x-z_p^{(n)}\right).$$

Функция $f(x, y)$ равномерно непрерывна. Значит, взяв произвольное $\varepsilon>0$, можно найти такое $\delta>0$, что при $|y''-y'|<\delta$ будет

$$|f(x, y'')-f(x, y')|<\varepsilon$$

при любом $x\in[a, b]$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\delta\leqslant\varepsilon$. Будем считать n настолько большим, чтобы при всех $x\in[a, b]$ оказалось

$$|\varphi_n(x)-\psi(x)|<\delta.$$

Тогда сумма

$$\sum_{k=m}^{p-1} f\left(z_k^{(n)}, \varphi_n\left(z_k^{(n)}\right)\right)\left(z_{k+1}^{(n)}-z_k^{(n)}\right)+f\left(z_p^{(n)}, \varphi_n\left(z_p^{(n)}\right)\right)\left(x-z_p^{(n)}\right)$$

будет отличаться от аналогичной суммы

$$\sigma_n=\sum_{k=m}^{p-1} f\left(z_k^{(n)}, \psi\left(z_k^{(n)}\right)\right)\left(z_{k+1}^{(n)}-z_k^{(n)}\right)+f\left(z_p^{(n)}, \psi\left(z_p^{(n)}\right)\right)\left(x-z_p^{(n)}\right)$$

меньше чем на $\varepsilon(x-x_0)$. Отсюда следует, что при указанном достаточно большом n будет

$$|\psi(x)-y_0-\sigma_n|<\varepsilon(1+x-x_0). \tag{10}$$

Замечая, что сумма σ_n есть сумма Римана для интеграла

$$\int_{x_0}^{x} f[z, \psi(z)]\,dz,$$

учитывая (9) и переходя в (10) к пределу при возрастающем n, находим

$$\left|\psi(x)-y_0-\int_{x_0}^{x} f[z, \psi(z)]\,dz\right|\leqslant\varepsilon(1+x-x_0).$$

Отсюда, ввиду произвольности ε, вытекает, что

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[z, \psi(z)]\, dz. \tag{11}$$

Дифференцируя это равенство по аргументу x, получаем[1]) для любого $x \in [x_0, b]$

$$\psi'(x) = f[x, \psi(x)]. \tag{12}$$

Аналогично устанавливается (12) для $a \leqslant x \leqslant x_0$. Теорема доказана полностью.

Замечание 1. Читатель обратит внимание на то, что если прямоугольник R определяется как $R(x_0 - A \leqslant x \leqslant x_0 + A,\ y_0 - B \leqslant y \leqslant y_0 + B)$, то проведенное доказательство обеспечивает существование решения в сегменте $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, где

$$\delta = \min\{A, B/M\}.$$

Замечание 2. В условиях теоремы 5 интегральная кривая, проходящая через (x_0, y_0), не обязательно *единственна.* Например, через (0, 0) проходят две интегральные кривые $y = 0$ и $y = x^3$ уравнения $\frac{dy}{dx} = 3\sqrt[3]{y^2}$.

Пространство L_p. Рассмотрим, в заключение, условия компактности в пространстве L_p. Эти условия для $p > 1$ были найдены А. Н. Колмогоровым в 1931 году. Через два года А. Н. Тулайков[2]) доказал, что условия А. Н. Колмогорова оказываются также необходимыми и достаточными и для случая $p = 1$.

Чтобы установить интересующие нас результаты, потребуются некоторые вспомогательные соображения.

Лемма 1. *Пусть на $[a, b]$ задана суммируемая функция $\varphi(t)$. Распространим ее определение на сегмент $[a - h, b + h]$, положив $\varphi(t) = 0$ при $t \overline{\in} [a, b]$ и построим новую функцию $\varphi_h(x)$, задав ее на $[a, b]$ формулой*

$$\varphi_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} \varphi(t)\, dt.$$

Функция $\varphi_h(x)$ (называемая функцией Стеклова) непрерывна на $[a, b]$.

Действительно, ведь

$$\varphi_h(x) = \frac{1}{2h}[F(x+h) - F(x-h)], \text{ где } F(x) = \int_{a-h}^{x} \varphi(t)\, dt,$$

а $F(x)$, как известно, есть функция непрерывная.

---

[1]) Хотя (11) доказано лишь для $x > x_0$, но (12) вытекает из (11) и при $x = x_0$; само собой разумеется, что при $x = x_0$ и $x = b$ речь может идти только об односторонних производных.

[2]) «Zur Kompaktheit im Raum L_p für $p = 1$», Göttinger Nachrichten, 1933, стр. 167—170.

Лемма 2. В тех же обозначениях

$$\int_a^b |\varphi_h(x)|\,dx \leqslant \int_a^b |\varphi(x)|\,dx. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть сначала $\varphi(x) \geqslant 0$. Рассмотрим в прямоугольнике $R\,(a \leqslant t \leqslant b,\ -h \leqslant z \leqslant h)$ функцию $\varphi(z+t)$. Согласно теореме 2, § 4, гл. XII будет[1])

$$\int_a^b dt \int_{-h}^{+h} \varphi(z+t)\,dz = \int_{-h}^{+h} dz \int_a^b \varphi(z+t)\,dt. \tag{14}$$

Так как

$$\int_{-h}^{+h} \varphi(z+t)\,dt = \int_{t-h}^{t+h} \varphi(x)\,dx = 2h\varphi_h(t),$$

то интеграл, стоящий в (14) слева, есть не что иное как

$$2h\int_a^b \varphi_h(t)\,dt.$$

Интеграл же, стоящий в (14) справа, преобразуется к виду

$$\int_{-h}^{+h} dz \int_{a+z}^{b+z} \varphi(x)\,dx,$$

и остается заметить, что[2])

$$\int_{a+z}^{b+z} \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx, \tag{15}$$

чтобы получить (13).

---

[1]) Измеримость $\varphi(z+t)$, как функции одного из аргументов t или z при любом закрепленном значении другого, очевидна. Установим, что и как функция двух аргументов она измерима в R. При любом c множество тех $x \in [a-h,\ b+h]$, для которых $\varphi(x) > c$, измеримо. Но тогда (см. лемму 1, § 2, гл. XII) измеримо множество A точек (x, y) прямоугольника $(a-h \leqslant x \leqslant b+h,\ -h \leqslant y \leqslant h)$, для которых $\varphi(x) > c$. Пусть E есть множество точек (t, z), в которое переходит A при аффинном преобразовании плоскости по формулам $t = x-y$, $z = y$. Оно измеримо и остается учесть, что

$$R\,[\varphi(z+t) > c] = RE.$$

[2]) При $z=0$ интегралы (15) равны. Если же, например, $z > 0$, то (поскольку $\varphi \geqslant 0$)

$$\int_{a+z}^{b+z} \varphi(x)\,dx = \int_{a+z}^{b} \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Откажемся теперь от предположения, что $\varphi(x) \geqslant 0$, и обозначим через $\overline{\varphi}_h(x)$ функцию Стеклова для модуля $|\varphi(x)|$. Тогда

$$|\varphi_h(x)| = \left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} \varphi(t)\,dt \right| \leqslant \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |\varphi(t)|\,dt = \overline{\varphi}_h(x)$$

и

$$\int_a^b |\varphi_h(x)|\,dx \leqslant \int_a^b \overline{\varphi}_h(x)\,dx. \tag{16}$$

Но по уже доказанному

$$\int_a^b \overline{\varphi}_h(x)\,dx \leqslant \int_a^b |\varphi(x)|\,dx,$$

откуда в связи с (16) и вытекает (13).

Лемма 3. *Если* $\varphi(t) \in L_p$ *при* $p \geqslant 1$, *то*

$$\|\varphi_h\| \leqslant \|\varphi\|. \tag{17}$$

При этом, как обычно,

$$\|\varphi\| = \sqrt[p]{\int_a^b |\varphi(x)|^p\,dx}.$$

Полезно заметить, что, в силу непрерывности функции Стеклова $\varphi_h(x)$, она входит в L_p.

Для случая $p = 1$ наша лемма совпадает с леммой 2. Поэтому можно считать $p > 1$. Но тогда, в силу неравенства Гёльдера, будет

$$\left| \int_{x-h}^{x+h} \varphi(t)\,dt \right| \leqslant \left(\int_{x-h}^{x+h} |\varphi(t)|^p\,dt \right)^{1/p} \left(\int_{x-h}^{x+h} dt \right)^{1/q}, \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$$

или, что то же самое,

$$|\varphi_h(x)|^p \leqslant \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |\varphi(t)|^p\,dt. \tag{18}$$

Правая часть этого неравенства есть не что иное, как функция Стеклова для функции $|\varphi(x)|^p$. Обозначая ее через $\overline{\varphi}_h(x)$, можем переписать неравенство (18) так: $|\varphi_h(x)|^p \leqslant \overline{\varphi}_h(x)$.

Отсюда

$$\int_a^b |\varphi_h(x)|^p\,dx \leqslant \int_a^b \overline{\varphi}_h(x)\,dx,$$

а в силу леммы 2 будет

$$\int_a^b \overline{\varphi}_h(x)\,dx \leqslant \int_a^b |\varphi(x)|^p\,dx.$$

Из этих неравенств и вытекает (17).

Лемма 4. *Если* $p \geqslant 1$ *и* $\varphi(x) \in L_p$, *то*

$$\lim_{h \to 0} \int_a^b |\varphi_h(x) - \varphi(x)|^p \, dx = 0. \tag{19}$$

Действительно, пусть сначала функция $\varphi(x)$ непрерывна. Если $a < x < b$ и h настолько мало, что $[x-h, x+h] \subset [a, b]$, то по теореме о среднем

$$\varphi_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} \varphi(t) \, dt = \varphi(\xi),$$

где $\xi \in [x-h, x+h]$. Отсюда ясно, что для $x \in (a, b)$ будет

$$\lim_{h \to 0} \varphi_h(x) = \varphi(x)$$

и потому подынтегральная функция в (19) почти везде в $[a, b]$ [точнее, везде в и н т е р в а л е (a, b)] стремится к нулю. С другой стороны, $\varphi(x)$, будучи непрерывной, ограничена. Но если $|\varphi(x)| \leqslant M$, то и $|\varphi_h(x)| \leqslant M$. Значит подынтегральная функция в (19) ограничена числом, не зависящим от параметра. Отсюда следует возможность предельного перехода под знаком интеграла; чем и доказана формула (19).

Пусть теперь $\varphi(x)$ есть любая функция из L_p. Взяв $\varepsilon > 0$, находим такую непрерывную $\psi(x)$, чтобы оказалось

$$\|\psi - \varphi\| < \varepsilon. \tag{20}$$

Если через $\psi_n(x)$ обозначить функцию Стеклова для функции $\psi(x)$ и заметить, что функция Стеклова для разности $\varphi(x) - \psi(x)$ есть разность $\varphi_h(x) - \psi_h(x)$, то из (20) по лемме 3 будет вытекать, что

$$\|\psi_h - \varphi_h\| < \varepsilon.$$

Но

$$\|\varphi_h - \varphi\| \leqslant \|\varphi_h - \psi_h\| + \|\psi_h - \psi\| + \|\psi - \varphi\|.$$

Значит

$$\|\psi_h - \varphi\| < 2\varepsilon + \|\psi_h - \psi\|,$$

а по уже доказанному для достаточно малых h будет $\|\psi_h - \psi\| < \varepsilon$, так что для этих h окажется $\|\varphi_h - \varphi\| < 3\varepsilon$. Лемма доказана.

Теорема 6 (А. Н. Колмогоров). *Пусть* $A = \{f(x)\}$ *есть множество функций из* $L_p\,(p > 1)$. *Для того, чтобы это множество было компактным, необходимо и достаточно выполнение совокупности условий:*

1) *множество* A *ограничено в* L_p;

2) *стремление к нулю разности* $\|f_h - f\|$ *при* $h \to 0$ *происходит равномерно относительно выбора функции* $f(x) \in A$.

Необходимость условия 1) ясна, ибо всякое компактное множество ограничено. Чтобы доказать необходимость условия 2),

предположим его не выполненным. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$ и такие две последовательности $\{h_n\}$ и $\{f^{(n)}(x)\}$, где $h_n > 0$ суть числа, а $f^{(n)}(x)$ — функции из A, что

$$\lim h_n = 0, \quad \| f^{(n)}_{h_n} - f^{(n)} \| \geqslant \varepsilon_0.$$

Покажем, что из $\{f^{(n)}(x)\}$ не выделяется сходящейся подпоследовательности. Допустим, напротив, что она выделяется. Не ограничивая общности, можем принять, что это есть сама последовательность $\{f^{(n)}(x)\}$, ибо к этому можно свести дело при помощи перемены обозначений. Итак, пусть последовательность $\{f^{(n)}(x)\}$ стремится (в смысле метрики L_p) к функции $g(x)$. Тогда при само собой понятных обозначениях мы будем иметь

$$\varepsilon_0 \leqslant \| f^{(n)}_{h_n} - f^{(n)} \| \leqslant \| f^{(n)}_{h_n} - g_{h_n} \| + \| g_{h_n} - g \| + \| g - f^{(n)} \|.$$

Отсюда по лемме 3 $\varepsilon_0 \leqslant 2 \| g - f^{(n)} \| + \| g_{h_n} - g \|$.

Но (по лемме 4) для достаточно больших n будет $\| g_{h_n} - g \| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ и, стало быть, для таких n окажется $\| g - f^{(n)} \| > \frac{\varepsilon_0}{4}$, что противоречит предположению о стремлении $f^{(n)}(x)$ к $g(x)$. Необходимость условий теоремы доказана.[1])

Предположим теперь, что выполнены условия 1) и 2). Тогда для любой $f(x) \in A$ будет

$$\| f \| = \left(\int_a^b | f(x) |^p \, dx \right)^{1/p} < M,$$

где постоянная M от выбора $f(x)$ не зависит. Закрепим некоторое $h > 0$ и рассмотрим множество функций Стеклова $A_h = \{f_h(x)\}$, построенных при этом h для всех функций $f(x) \in A$. В силу неравенства Гёльдера для любой из $f_h(x)$ будет

$$| f_h(x) | \leqslant \frac{1}{2h} \left(\int_{x-h}^{x+h} | f(t) |^p \, dt \right)^{1/p} \cdot \left(\int_{x-h}^{x+h} dt \right)^{1/q} < \frac{M}{(2h)^{1/p}} \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right).$$

Значит, все функции из A_h ограничены одним числом. Покажем, что они равностепенно непрерывны. В самом деле, для любой из них при $a \leqslant x < x' \leqslant b$ будет

$$f_h(x') - f_h(x) = \frac{1}{2h} \left\{ \int_{x+h}^{x'+h} f(t) \, dt - \int_{x-h}^{x'-h} f(t) \, dt \right\}. \tag{21}$$

Но

$$\left| \int_{x+h}^{x'+h} f(t) \, dt \right| \leqslant \left(\int_{x+h}^{x'+h} | f(t) |^p \, dt \right)^{1/p} \left(\int_{x+h}^{x'+h} dt \right)^{1/q} < M (x' - x)^{1/q}.$$

---

[1]) При этом проведенное рассуждение не опиралось на то, что $p > 1$, а годится и для $p = 1$.

Аналогичная оценка верна и для второго интеграла, стоящего в скобках в (21). Стало быть

$$|f_h(x') - f_h(x)| < \frac{M}{h}(x' - x)^{1/q},$$

откуда и видна равностепенная непрерывность функций $\{f_h(x)\}$.

Таким образом, при любом $h > 0$ множество A_h компактно в C. Тем более оно компактно в L_p. Но тогда компактность множества A непосредственно следует из условия 2) и теоремы 4 из § 2.

Замечание. Как показал В. Н. Судаков,[1]) первое из условий теоремы 6 является следствием второго ее условия.

§ 4. Банаховский «принцип неподвижной точки» и некоторые его приложения

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными. Ее всегда можно записать в форме

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n + b_1 \\ x_2 &= a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n + b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n + b_n \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Покажем, что на задачу решения системы (1) можно взглянуть с совсем новой точки зрения. С этой целью рассмотрим систему n равенств

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n + b_1 \\ y_2 &= a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n + b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n + b_n \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Какую бы систему чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ни вставить в правые части равенств (2), в левых частях получатся некоторые числа $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Таким образом, равенства (2) задают некоторую операцию, или, как чаще говорят, оператор, преобразующую числовой комплекс $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в комплекс $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Иначе можно сказать, что равенства (2) задают нам оператор, переводящий точки n-мерного эвклидова пространства $\boldsymbol{R}_n$ в точки этого же пространства. При таком подходе к вещам вопрос о решении системы (1) есть вопрос о нахождении такой точки пространства $\boldsymbol{R}_n$, которая оператором (2) переводится в себя же, т. е. является «неподвижной» точкой преобразования.

Оказывается, что подобная же трактовка вопроса возможна не только в отношении линейных алгебраических уравнений, но

---

[1]) «К вопросу о критериях компактности в функциональных пространствах», Успехи мат. наук, 1957, 12, № 3.

и в отношении дифференциальных уравнений, интегральных уравнений, систем таких уравнений и многих других задач анализа. В связи с этим возник очень плодотворный метод[1]) изучения всех таких задач, называемый «методом неподвижной точки». Теория его состоит в исследовании различных типов операторов и установлении условий, при которых эти операторы оставляют неподвижными определенные точки. Мы ограничимся рассмотрением лишь весьма частных условий этого рода, отсылая читателя за более подробными сведениями к уже упомянутой статье В. В. Немыцкого.

Определение 1. Пусть E и E_1 суть метрические пространства и пусть U есть правило, соотносящее каждой точке $x \in E$ некоторую точку $y \in E_1$. Такое правило называется *оператором*, заданным в пространстве E и переводящим его в пространство E_1. Если $y \in E_1$ есть точка, соотнесенная оператором U точке $x \in E$, то пишут $y = U(x)$ и называют y *значением* оператора U в точке x.

Определение 2. Пусть оператор U переводит метрическое пространство E в это же пространство E. Если существует такое число q, что $0 \leqslant q < 1$ и что для любых точек x и x' пространства E оказывается

$$\rho(U(x),\ U(x')) \leqslant q \cdot \rho(x,\ x'), \tag{3}$$

то мы будем называть U *сближающим оператором*.

Теорема (С. С. Банах). *Если сближающий оператор U задан в полном метрическом пространстве E, то в этом пространстве существует одна и только одна точка x^*, для которой*

$$U(x^*) = x^*. \tag{4}$$

Эта точка называется *неподвижной точкой* оператора U.

Для доказательства возьмем произвольную точку пространства x_0 и построим последовательность

$$x_1 = U(x_0),\ x_2 = U(x_1),\ x_3 = U(x_2),\ \ldots$$

Покажем, что эта последовательность сходится в себе. В самом деле, при $n \geqslant 1$ будет

$$\rho(x_{n+1},\ x_n) = \rho(U(x_n),\ U(x_{n-1})) \leqslant q \cdot \rho(x_n,\ x_{n-1}).$$

Отсюда следует, что $\rho(x_{n+1},\ x_n) \leqslant aq^n$, где положено для краткости $a = \rho(x_1,\ x_0)$. Заметив это, выберем какое-нибудь натуральное N и пусть $n > N$ и $m > N$. Положим для определенности, что $m > n$. Тогда

$$\rho(x_n,\ x_m) \leqslant \rho(x_n,\ x_{n+1}) + \rho(x_{n+1},\ x_{n+2}) + \ldots + \rho(x_{m-1},\ x_m).$$

---

[1]) Весьма обстоятельное изложение его дано в статье В. В. Немыцкого «Метод неподвижных точек в анализе», Успехи мат. наук, вып. 1, 1936.

Отсюда

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant aq^n + aq^{n+1} + \ldots + aq^{m-1} \leqslant \frac{aq^n}{1-q}$$

и тем более

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \frac{aq^N}{1-q}.$$

Так как q^N стремится с возрастанием N к нулю, то сходимость последовательности $\{x_n\}$ в себе доказана. Но пространство E полное. Значит существует

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*.$$

В силу (3) имеем

$$\rho(x_{n+1}, U(x^*)) = \rho(U(x_n), U(x^*)) \leqslant q \cdot \rho(x_n, x^*).$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_{n+1}, U(x^*)) = 0$, т. е. $U(x^*) = \lim x_n$, а отсюда, ввиду единственности предела, и следует (4). Итак, неподвижная точка существует. Остается убедиться в ее единственности, но это весьма просто. Действительно, если бы у оператора U, кроме x^*, была другая неподвижная точка x, то оказалось бы, что

$$\rho(x^*, x) = \rho(U(x^*), U(x)) \leqslant q \cdot \rho(x^*, x),$$

что при $\rho(x^*, x) > 0$ противоречит условию $q < 1$. Теорема доказана полностью.

Замечание 1. Из самого доказательства теоремы Банаха видно, что *точка x^* получается методом последовательных приближений, исходя из любой точки пространства* x_0. Это замечание дает практический прием приближенного нахождения этой точки. При этом, переходя в неравенстве $\rho(x_n, x_m) \leqslant \frac{aq^n}{1-q}$ к пределу при закрепленном n и возрастающем m, получаем оценку точности приближения

$$\rho(x_n, x^*) \leqslant \frac{aq^n}{1-q}.$$

Отсюда видно, что чем меньше q, тем быстрее сходимость процесса приближения.

Замечание 2. Интересно, что условие

$$\rho(U(x'), U(x)) < \rho(x', x) \quad (x' \neq x)$$

недостаточно для существования неподвижной точки. Пусть, например, E есть множество вещественных чисел с обычным определением расстояния. Положим

$$U(x) = x + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

Так как при всяком x будет $\operatorname{arctg} x < \pi/2$, то неподвижной точки у нашего оператора нет. В то же время, если $x < y$, то

$$U(y) - U(x) = y - x - (\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x),$$

и по формуле Лагранжа

$$U(y) - U(x) = y - x - \frac{y-x}{1+z^2} \quad (x < z < y).$$

Если бы оказалось, что $|U(y) - U(x)| \geqslant |y-x|$, то это означало бы, что $\left|1 - \frac{1}{1+z^2}\right| \geqslant 1$, а это неравенство не выполнено ни при каком z. Поэтому всегда

$$|U(y) - U(x)| < |y-x|.$$

Замечание 3. Ничего не меняя в рассуждении[1]), теорему Банаха можно доказать в более общей форме. Именно, достаточно предполагать сближающий оператор U с самого начала заданным лишь на некотором замкнутом множестве F полного метрического пространства E и таким, что все его значения попадают в F. Надо только начальную точку процесса последовательных приближений x_0 также выбрать из F. Само собою разумеется, что и неподвижная точка x^* будет принадлежать F.

Приведем некоторые примеры применения теоремы Банаха.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y), \tag{5}$$

правая часть которого есть функция, заданная и непрерывная на всей плоскости и удовлетворяющая относительно аргумента y условию Липшица

$$|f(x, y) - f(x, y_1)| \leqslant K|y - y_1|. \tag{6}$$

Теорема. *Какую бы точку (x_0, y_0) ни взять, через нее проходит одна и только одна интегральная кривая $y = \varphi(x)$ уравнения* (5), *причем функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению* (5) *при всех вещественных x.*

В самом деле, уравнение (5) вместе с начальным условием $y(x_0) = y_0$ вполне равносильно интегральному уравнению

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, \varphi(t)]\, dt. \tag{7}$$

Возьмем какое-нибудь $\delta > 0$, подчинив это число единственному условию $K\delta < 1$, и пусть C есть пространство непрерывных функций, заданных и непрерывных на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Определим в C оператор U, положив для всякой $\varphi(x) \in C$

$$U(\varphi) = \psi(x), \text{ где } \psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, \varphi(t)]\, dt.$$

---

[1]) Вместо того чтобы снова проводить рассуждение, можно просто сослаться на то, что замкнутое множество, лежащее в полном метрическом пространстве, само является полным метрическим пространством.

Это сближающий оператор. Действительно, если $\psi_1(x) = U(\varphi_1)$, то

$$\|\psi_1 - \psi\| = \max_{|x-x_0| \leqslant \delta} \left| \int_{x_0}^{x} \{f[t, \varphi_1(t)] - f[t, \varphi(t)]\} \, dt \right|.$$

Но

$$|f[t, \varphi_1(t)] - f[t, \varphi(t)]| \leqslant K |\varphi_1(t) - \varphi(t)| \leqslant K \|\varphi_1 - \varphi\|.$$

Поэтому

$$\|\psi_1 - \psi\| \leqslant \max_{|x-x_0| \leqslant \delta} \left| \int_{x_0}^{x} K \|\varphi_1 - \varphi\| \, dt \right| = K\delta \cdot \|\varphi_1 - \varphi\|.$$

По принципу Банаха имеется единственная неподвижная точка оператора U. Пусть это будет $\varphi(x)$. Тогда $y = \varphi(x)$ есть интегральная кривая, проходящая через (x_0, y_0). При этом функция $\varphi(x)$ пока определена только на сегменте $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Но, положив $x_1 = x_0 + \delta$, $y_1 = \varphi(x_1)$ и приняв за исходную точку (x_1, y_1), мы проведем и через нее интегральную кривую $y = \varphi_1(x)$, причем функция $\varphi_1(x)$ будет определена на сегменте $[x_1 - \delta, x_1 + \delta]$ (важно, что δ то же, что и выше!). Сегменты $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ и $[x_1 - \delta, x_1 + \delta]$ пересекаются по сегменту $[x_0, x_1]$. На этом последнем сегменте обе функции $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (5) и условию $y(x_1) = y_1$. Значит, по уже доказанному они должны совпадать. Таким образом, введя функцию $\varphi_1(x)$, мы распространяем определение $\varphi(x)$ с сегмента $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ на более длинный сегмент $[x_0 - \delta, x_0 + 2\delta]$.

Продолжая этот процесс, мы убедимся в возможности распространить определение $\varphi(x)$ на весь интервал $(-\infty, +\infty)$.

Заметим, что принцип Банаха дает возможность фактического построения функции $\varphi(x)$ на сегменте $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Именно, взяв произвольную функцию $\varphi_0(x)$, заданную и непрерывную на этом сегменте, и положив

$$\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, \varphi_n(t)] \, dt,$$

мы будем иметь оценку

$$\max |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{aK^n\delta^n}{1 - K\delta} \quad (x_0 - \delta \leqslant x \leqslant x_0 + \delta).$$

Эта оценка показывает, что скорость сходимости процесса последовательных приближений будет тем выше, чем меньше δ мы возьмем.

Нам удалось доказать существование функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей уравнению (5) и *определенной на всей оси*. Столь значительный результат получился потому, что на правую часть уравнения (5) были наложены очень тяжелые условия. Они не выполнены даже для такого простого уравнения, как, например, $y' = 2xy$, хотя оно имеет всюду заданные решения $y = Ce^{x^2}$. Естественно попытаться ослабить эти условия.

Пусть правая часть уравнения (5) задана и непрерывна только в прямоугольнике $R(x_0-A\leqslant x\leqslant x_0+A,\ y_0-B\leqslant y\leqslant y_0+B)$ и удовлетворяет условию Липшица (6). Выберем $\delta>0$, подчинив его условию

$$\delta<\min\left\{A,\ \frac{B}{M},\ \frac{1}{K}\right\},$$

где $M=\max|f(x,\ y)|$. Тогда *существует одна и только одна функция* $\varphi(x)$, *определенная на сегменте* $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$, *удовлетворяющая уравнению* (5) *и начальному условию* $\varphi(x_0)=y_0$.

В самом деле, пусть C есть пространство всех непрерывных функций, заданных на $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ и F — множество тех из них, которые удовлетворяют неравенству $|\varphi(x)-y_0|\leqslant B$.

Множество F замкнуто в пространстве C. Определим на F оператор U, положив

$$U(\varphi)=\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f[t,\ \varphi(t)]\,dt\quad(|x-x_0|\leqslant\delta).$$

Этот оператор не выводит нас из множества F. Действительно, при $x\in[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ будет

$$|\psi(x)-y_0|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}M\,dx\right|\leqslant M\delta\leqslant B.$$

Кроме того, как и выше, оператор U есть сближающий оператор и можно сослаться на замечание 3 к теореме Банаха.

Заметим, что если не пользоваться принципом Банаха, а непосредственно применить к уравнению (7) метод последовательных приближений, начав процесс с $\varphi_0(x)=y_0$, то можно не ставить условия $K\delta<1$.

Пример 2. Рассмотрим линейное интегральное уравнение

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{8}$$

Здесь $f(x)$ и $K(x,\ t)$ — заданные функции, определенные и непрерывные в областях $a\leqslant x\leqslant b$ и $(a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant t\leqslant b)$ соответственно. Эти функции называются *свободным членом* и *ядром* уравнения (8). Множитель λ, стоящий перед интегралом, есть числовой параметр, а $\varphi(x)$ есть искомая неизвестная функция.

Имея уравнение (8), можно ввести оператор U, переводящий пространство C функций, непрерывных на $[a,\ b]$, само в себя по формуле $U(\varphi)=\psi(x)$, где

$$\psi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Вводя обозначение $M = \max |K(x, t)|$, мы получим при $U(\varphi) = \psi(x)$, $U(\varphi_1) = \psi_1(x)$, что

$$|\psi_1(x) - \psi(x)| \leqslant |\lambda| \cdot M \cdot \int_a^b |\varphi_1(t) - \varphi(t)|\, dt \leqslant |\lambda| \cdot M(b-a) \cdot \|\varphi_1 - \varphi\|.$$

Стало быть, при условии

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \tag{9}$$

оператор U есть сближающий оператор. Таким образом, доказана

Теорема. *При условии* (9) *уравнение* (8) *имеет одно и только одно непрерывное решение* $\varphi(x)$. *Это решение можно получить по методу последовательных приближений, взяв произвольную функцию* $\varphi_0(x) \in C$ *и положив*

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi_n(t)\, dt.$$

Отметим еще, что $\max |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant C |\lambda|^n M^n (b-a)^n$, где C — постоянная, зависящая от начальной функции $\varphi_0(x)$.

Пример 3. Рассмотрим, в заключение, вопрос о решении *бесконечной системы линейных уравнений*. Так называется счетная система равенств

$$\left.\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots = b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + \ldots = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}, \tag{10}$$

в которой коэффициенты $a_{i,k}$ и свободные члены b_i заданы, а числа x_k являются искомыми неизвестными. *Решением* системы (10) называется такая последовательность значений неизвестных, которая при подстановке в левые части уравнений превращает их в сходящиеся ряды с суммами, равными правым частям.

Если перенести левую часть каждого уравнения направо, к обеим частям i-го уравнения прибавить по x_i и положить

$$-a_{i,k} = c_{i,k} \quad (k \neq i), \qquad 1 - a_{i,i} = c_{i,i},$$

то система (10) окажется записанной в форме

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} x_k + b_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots). \tag{11}$$

В этой форме мы и будем рассматривать систему. Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| \leqslant q < 1, \quad |b_i| \leqslant B \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

где постоянные q и B не зависят от выбора i, то система (11) называется *вполне регулярной*. Ее решение $\{x_n\}$ называется *ограниченным*, если при всех k будет $|x_k| \leqslant M$.

Теорема. *Вполне регулярная система имеет одно и только одно ограниченное решение. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений, причем за исходные значения неизвестных можно принять члены любой ограниченной числовой последовательности.*

Для доказательства рассмотрим пространство m всех ограниченных числовых последовательностей и определим в этом пространстве оператор U, положив для последовательности $x=\{x_k\}\in m$ по определению $U(x)=y$, где $y=\{y_i\}$ есть последовательность чисел

$$y_i=\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}x_k+b_i \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Убедимся, прежде всего, в том, что нами действительно определен некоторый оператор. В самом деле, если $\|x\|=\sup\{|x_k|\}$, то

$$|y_i|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|c_{i,k}|\cdot\|x\|+|b_i|\leqslant q\|x\|+B. \tag{12}$$

Это показывает, что наш оператор каждой точке $x\in m$ соотносит последовательность некоторых чисел y_i. Кроме того, эти числа ограничены. Значит, оператор переводит пространство m в себя. При этом полезно заметить, что в силу (12) оказывается

$$\|U(x)\|\leqslant B+q\|x\|. \tag{13}$$

Покажем далее, что U есть сближающий оператор. Если $\{x_k\}=x$, $\{x_k'\}=x'$, $U(x)=\{y_i\}$, $U(x')=\{y_i'\}$, то $y_i'-y_i=\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_{i,k}(x_k'-x_k)$, откуда $|y_i'-y_i|\leqslant q\|x'-x\|$ и $\|U(x')-U(x)\|\leqslant q\cdot\|x'-x\|$, а это ведь и значит, что U сближающий оператор. Теперь наша теорема непосредственно вытекает из принципа Банаха. [1])

Замечание 1. Нетрудно дать оценку решения системы. Для этого примем за исходную точку в процессе последовательных приближений точку $x^{(0)}=\Theta=(0,\ 0,\ 0,\ \ldots)$ и положим $x^{(n+1)}=U(x^{(n)})$. Согласно (13) будет $\|x^{(1)}\|\leqslant B$, $\|x^{(2)}\|\leqslant B+qB$, $\|x^{(3)}\|\leqslant B+qB+q^2B$ и вообще $\|x^{(n+1)}\|\leqslant B+Bq+Bq^2+\ldots+Bq^n$, что легко подтвердить индукцией. Но тогда $\|x\|\leqslant\frac{B}{1-q}$. Кроме того, как всегда $\|x^{(n)}-x\|\leqslant\frac{\|x^{(1)}-x^{(0)}\|}{1-q}\cdot q^n$. Значит, при указанном выборе начальной точки будет $\|x^{(n)}-x\|\leqslant\frac{B}{1-q}\cdot q^n$.

Замечание 2. В теореме уже было указано, что вполне регулярная система имеет единственное ограниченное решение. Но она может иметь, кроме того, и неограниченные решения. Например, вполне регулярная система $x_1=\frac{1}{2}x_2$, $x_2=\frac{1}{2}x_3$, $x_3=\frac{1}{2}x_4$, …

[1]) И полноты пространства m.

имеет бесчисленное множество решений (c, $2c$, $4c$, $8c$, ...), где c — произвольная постоянная (причем это есть общий вид решения указанной системы). Все эти решения, кроме решения (0, 0, 0, ...), не ограничены.

Замечание 3. Иногда приходится рассматривать вопрос о нахождении такого решения (x_1, x_2, x_3, ...) бесконечной системы, которое входит в l_p ($p \geqslant 1$). Остановимся на этом вопросе для $p=2$. Пусть система (11) удовлетворяет условиям

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}^2 = q^2 < 1, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 < +\infty. \tag{14}$$

Если $x=\{x_k\}$ есть точка l_2, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}x_k$ будет сходиться и, в силу неравенства Буняковского, окажется, что сумма его z_i удовлетворяет неравенству $z_i^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}^2\right)\|x\|^2$.

Но тогда последовательность (z_1, z_2, z_3, ...), а с ней и последовательность (y_1, y_2, y_3, ...), где $y_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}x_k + b_i = z_i + b_i$, входит в l_2. Значит, оператор U, переводящий $\{x_k\}$ в $\{y_i\}$, определен на l_2 и не выводит из l_2. Кроме того, если $x=\{x_k\}$ и $x'=\{x'_k\}$ две точки l_2, а $y=\{y_i\}=U(x)$, $y'=\{y'_i\}=U(x')$, то

$$y'_i - y_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}(x'_k - x_k),$$

откуда

$$(y'_i - y_i)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}^2\right)\cdot\|x'-x\|^2 \qquad \text{и} \qquad \|y'-y\| \leqslant q\|x'-x\|.$$

Значит, U — сближающий оператор. Отсюда вытекает, что при условиях (14) система (11) имеет единственное решение в l_2.

Аналогично, при любом $p>1$ условия

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1} < 1, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^p < +\infty$$

обеспечивают существование и единственность решения системы (11) в l_q. Для $p=1$ условия существования и единственности таковы:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < 1, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |b_i| < +\infty.$$

Здесь положено для краткости $\alpha_i = \sup\{|c_{i,k}|\}$ ($k=1, 2, 3, \ldots$). Доказательство предоставляем читателю.

I. Длина дуги кривой

Чтобы выяснить геометрический смысл понятия функции с конечным изменением, рассмотрим вопрос о спрямлении дуги кривой линии. Для простоты ограничимся линией вида

$$y = f(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b), \tag{1}$$

где $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Как известно, длиной кривой (1) называется предел s длины вписанной ломаной, когда длина наибольшего из ее звеньев стремится к нулю. Если абсциссы вершин ломаной суть $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$, то

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}, \tag{2}$$

где $\lambda = \max(x_{k+1} - x_k)$[1]. Если $s < +\infty$, то кривая называется *спрямляемой*.

Лемма. *Пусть дроблению $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ отвечает сумма*

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}. \tag{3}$$

Если добавить новую точку деления $\bar{x} \in (x_i, x_{i+1})$ и обозначить через $\bar{\sigma}$ вновь полученную сумму, то окажется

$$\sigma \leqslant \bar{\sigma} \leqslant \sigma + 2[x_{i+1} - x_i + \omega_i],$$

где ω_i есть колебание $f(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$.

Доказательство. Неравенство $\sigma \leqslant \bar{\sigma}$ очевидно. С другой стороны, разность $\bar{\sigma} - \sigma$ не превосходит суммы двух новых слагаемых, каждое из которых не больше[2] $(x_{i+1} - x_i) + \omega_i$.

---

[1]) Строго говоря, надо было бы характеризовать малость звеньев не величиной λ, а величиной

$$\mu = \max \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2},$$

но легко показать, что соотношения $\lambda \to 0$ и $\mu \to 0$ равносильны.

[2]) Поскольку $\sqrt{a^2 + b^2} \leqslant |a| + |b|$.

Теорема 1. *У всякой кривой* (1) *есть конечная или бесконечная длина s. Она равна точной верхней границе множества сумм* (3), *отвечающих всевозможным дроблениям* $[a, b]$.

Доказательство. Пусть L есть упомянутая точная верхняя граница. Обозначим через L_0 какое-либо число, меньшее L, и пусть $L_0 < M < L$. По определению точной верхней границы найдется такое дробление

$$x_0^* = a < x_1^* < \ldots < x_m^* = b, \tag{4}$$

что соответствующая ему сумма σ^* удовлетворяет соотношению

$$\sigma^* > M.$$

Ввиду непрерывности $f(x)$ найдется такое $\eta > 0$, что при $|x'' - x'| < \eta$ будет $|f(x'') - f(x')| < \frac{M - L_0}{4m}$.

Обозначим через d наименьшее из расстояний между точками (4) и пусть

$$\delta = \min\left\{d, \frac{M - L_0}{4m}, \eta\right\}.$$

Рассмотрим какое-нибудь дробление

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b, \tag{5}$$

подчиненное условию $\lambda = \max(x_{k+1} - x_k) < \delta$, и обозначим через σ соответствующую ему сумму (3).

Чтобы оценить σ, введем еще один способ — «составной» — дробления $[a, b]$, наложив дробления (4) и (5), и пусть соответствующая этому «составному» дроблению сумма (3) есть $\bar{\sigma}$. Так как составное дробление получено из (4) добавлением новых точек, то по лемме

$$\bar{\sigma} \geqslant \sigma^* > M. \tag{6}$$

С другой стороны, составное дробление получено путем $(m - 1)$-кратного добавления по одной точке деления к точкам (5). Все точки x_k^* попадают в разные отрезки $[x_i, x_{i+1}]$ и появление каждой из них увеличивает сумму (3) не больше чем на $\frac{M - L_0}{m}$. Отсюда вытекает, что

$$\bar{\sigma} \leqslant \sigma + (m - 1)\frac{M - L_0}{m} < \sigma + (M - L_0).$$

Отсюда и из (6) следует, что

$$\sigma > L_0.$$

Итак, любому $L_0 < L$ отвечает такое δ, что из $\lambda < \delta$ следует $\sigma > L_0$. Так как всегда $\sigma \leqslant L$, то доказано, что L и является пределом (2).

Теорема 2 (К. Жордан). *Чтобы кривая* (1) *была спрямляема, необходимо и достаточно, чтобы* $f(x)$ *имела конечное изменение.*

Доказательство. Так как при любом дроблении сумма

$$V=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|$$

не превосходит суммы (3), отвечающей тому же дроблению, то необходимость условия очевидна.

С другой стороны,

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+[f(x_{k+1})-f(x_k)]^2}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\{[x_{k+1}-x_k]+|f(x_{k+1})-f(x_k)|\},$$

откуда

$$\sigma\leqslant b-a+\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f),$$

и условие теоремы оказывается достаточным.

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$, то длину s можно вычислять по формуле*

$$s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \tag{7}$$

Доказательство. Так как $\sqrt{1+f'^2(x)}\leqslant 1+|f'(x)|$, то интеграл (7) конечен. Покажем сначала, что

$$\sqrt{(b-a)^2+[f(b)-f(a)]^2}\leqslant\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \tag{8}$$

Для этого заметим, что левая часть (8) есть

$$\sqrt{(b-a)^2+\left[\int_a^b f'(x)\,dx\right]^2}.$$

Положим

$$b-a=r\cos\theta,\quad \int_a^b f'(x)\,dx=r\sin\theta.$$

Тогда

$$\sqrt{(b-a)^2+\left[\int_a^b f'(x)dx\right]^2}=r=\int_a^b[\cos\theta+f'(x)\sin\theta]\,dx.$$

Остается заметить, что[1])

$$|\cos\theta+f'(x)\sin\theta|\leqslant\sqrt{1+f'^2(x)}.$$

---

[1]) В силу неравенства Буняковского.

Если разбить $[a, b]$ на части точками x_k и к каждому отрезку $[x_k, x_{k+1}]$ применить (8), то мы без труда приходим к оценке

$$s \leqslant \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \qquad (9)$$

Теперь докажем неравенство противоположного смысла. Для этого разложим $[a, b]$ на n равных частей точками $x_k^{(n)} = a + \frac{k}{n}(b-a)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ и введем функцию $f_n(x)$, полагая

$$f_n(x) = \frac{f(x_{k+1}^{(n)}) - f(x_k^{(n)})}{x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}}, \text{ если } x_k^{(n)} < x < x_{k+1}^{(n)}.$$

В самих же точках $x_k^{(n)}$ полагаем $f_n(x_k^{(n)}) = 0$. Почти везде будет [1])

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f'(x).$$

Значит, по теореме Фату

$$\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \leqslant \sup\left\{\int_a^b \sqrt{1+f_n^2(x)}\,dx\right\}.$$

Но

$$\int_a^b \sqrt{1+f_n^2(x)}\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)})^2 + [f(x_{k+1}^{(n)}) - f(x_k^{(n)})]^2} \leqslant s,$$

откуда [2]) в связи с (9) и следует (7).

Замечание. Можно доказать, что наличие равенства (7) (при условии $s < +\infty$) и достаточно, чтобы $f(x)$ была абсолютно непрерывна.

II. Пример Штейнгауза

В § 4 гл. X мы видели, что у тригонометрического ряда, сходящегося на множестве положительной меры, коэффициенты стремятся к нулю. Интересно, что это предложение необратимо.

---

[1]) См. примечание к доказательству теоремы 7, § 4, гл. IX.

[2]) Мы видим, что неравенство

$$\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \leqslant s$$

верно и без предположения абсолютной непрерывности $f(x)$. Достаточно, чтобы это была функция с конечным изменением.

Например [1]), ряд

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\cos k(x - \ln \ln k)}{\ln k}, \tag{1}$$

коэффициенты которого стремятся к нулю, *расходится всюду*.

Для доказательства этого утверждения введем обозначения [2])

$$u_k = [\ln k], \quad v_k = \ln \ln k, \quad \Delta_n = [v_n, \ v_{n+1}),$$

$$G_n(x) = \sum_{k=n+1}^{n+u_n} \frac{\cos k(x - v_k)}{\ln k}, \quad G_n = \sum_{k=n+1}^{n+u_n} \frac{1}{\ln k}.$$

В сумме G_n наименьшим слагаемым является последнее и потому

$$G_n > \frac{u_n}{\ln(n+u_n)}.$$

Но правая часть этого неравенства с ростом n стремится к 1 и, стало быть, для $n > n_0$ будет

$$G_n > 0{,}9. \tag{2}$$

С другой стороны,

$$G_n - G_n(x) < \frac{1}{\ln n} \sum_{k=n+1}^{n+u_n} [1 - \cos k(x - v_k)]$$

и так как $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{\alpha^2}{2}$, то

$$G_n - G_n(x) < \frac{1}{2\ln n} \sum_{k=n+1}^{n+u_n} k^2 (x - v_k)^2. \tag{3}$$

Заметим, что по формуле Лагранжа для $\ln \ln x$ будет

$$v_{n+u_n} - v_n = \frac{u_n}{(n+\theta u_n)\ln(n+\theta u_n)} < \frac{u_n}{n \ln n} < \frac{1}{n}.$$

Если $x \in \Delta_n$, то [3]) $v_n \leqslant x < v_{n+u_n}$. Стало быть, при $n < k \leqslant \leqslant n + u_n$ будет $|x - v_k| < v_{n+u_n} - v_n < \frac{1}{n}$ и

$$\sum_{k=n+1}^{n+u_n} k^2 (x - v_k)^2 < \frac{(n+u_n)^2 u_n}{n^2}.$$

---

[1]) Этот пример принадлежит польскому математику Г. Штейнгаузу. А. Н. Колмогоров построил всюду расходящийся ряд Фурье суммируемой функции.

[2]) $[x]$ есть целая часть x.

[3]) Здесь учтено, что $n \geqslant 3$, откуда $u_n \geqslant 1$.

Отсюда и из (3) вытекает, что при $x \in \Delta_n$ будет

$$G_n - G_n(x) < \frac{(n+u_n)^2 u_n}{2n^2 \ln n}.$$

Правая часть этого неравенства с ростом n стремится к 0,5. Значит, для $n > n_1$ она становится меньшей 0,6, откуда в связи с (2) мы видим, что для $n > \max(n_0, n_1)$ и для всех x из Δ_n будет $G_n(x) > 0,3$.

Теперь уже легко закончить доказательство. Именно, закрепив произвольное x_0, положим $x_i = x_0 + 2\pi i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

Каждая из точек x_i (по крайней мере, начиная с некоторой) попадет в какой-то промежуток Δ_{n_i}, причем числа n_i будут неограниченно расти вместе с i. В силу 2π-периодичности сумм $G_n(x)$ будет $G_{n_i}(x_0) = G_{n_i}(x_i) > 0,3$.

Этим и доказана расходимость ряда (1) в точке x_0, так как $G_n(x)$ есть разность частных сумм S_{n+u_n} и S_n этого ряда.

III. Некоторые дополнительные сведения о выпуклых функциях

Здесь мы хотим дополнить § 5 гл. X.

Лемма. *Если $f(x)$ выпуклая вниз на (a, b) функция и $c \in (a, b)$, то при $x \neq c$ отношение*

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \tag{1}$$

есть возрастающая функция x.

Доказательство. Пусть $c < x < y < b$. Тогда[1])

$$f(x) = f\left[\frac{y-x}{y-c}c + \frac{x-c}{y-c}y\right] \leqslant \frac{y-x}{y-c}f(c) + \frac{x-c}{y-c}f(y).$$

Отсюда

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant \frac{f(y) - f(c)}{y - c}. \tag{2}$$

Аналогично доказывается (2) в случаях $a < x < y < c$ и $a < x < c < y < b$.

Теорема 1. *В условиях леммы функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица на каждом отрезке $[p, q] \subset (a, b)$.*

Доказательство. Пусть x и y две точки из $[p, q]$ и пусть $m = \frac{q+b}{2}$. По лемме

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(m) - f(x)}{m - x} \leqslant \frac{|f(m)| + |f(x)|}{m - q}. \tag{3}$$

Так как наша функция ограничена на $[p, q]$, то правая часть (3) ограничена сверху, что приводит к неравенству

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant K.$$

---

[1]) На основании неравенства (16) из § 5 гл. X. Так как на (a, b) функция $f(x)$ непрерывна, то применить (16) можно.

Аналогично доказывается, что

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant L.$$

Остальное ясно.

Следствие. *В условиях леммы будет*

$$f(x)=f(c)+\int_c^x \varphi(t)\,dt, \tag{4}$$

где c любая точка из (a, b), а $\varphi(t)$ измеримая функция, ограниченная на каждом $[p, q] \subset (a, b)$.

Теорема 2. *Класс функций, выпуклых вниз на интервале (a, b), совпадает с классом неопределенных интегралов от возрастающих на (a, b) и ограниченных на каждом $[p, q] \subset (a, b)$ функций.*

Доказательство. То, что каждый такой неопределенный интеграл будет выпуклой вниз функцией, доказано в гл. X. Для доказательства обратного покажем, что функцию $\varphi(t)$, входящую в (4), можно считать возрастающей. Пусть $x<y$ две точки из (a, b) и $h>0$ столь мало, что $x+h<y$ и $y+h<b$.

По лемме дробь $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ не уменьшится при замене $x+h$ на y, откуда

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}.$$

Заменяя x на $y+h$, мы лишь усилим неравенство. Значит,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \frac{f(y+h)-f(y)}{h}.$$

Предполагая, что в точках x и y существуют производные $f'(x)$ и $f'(y)$, находим $f'(x) \leqslant f'(y)$.

Обозначив через E множество точек существования $f'(x)$ и положив для всех $t \in (a, b)$

$$\varphi(t)=\sup\{f'(x)\} \quad (x \leqslant t, x \in E),$$

завершаем доказательство.

Пусть выпуклая функция $M(x)$, заданная на $[0, +\infty)$, представима в виде $M(x)=\int_0^x m(t)\,dt$, где $m(t)$ строго возрастает и непрерывна, причем $m(0)=0$, $m(+\infty)=+\infty$. Тогда у функции $z=m(t)$ есть обратная функция $t=n(z)$, заданная на промежутке $0 \leqslant z < +\infty$, также непрерывная и строго возрастающая, причем $n(0)=0$, $n(+\infty)=+\infty$. Положим $N(x)=\int_0^x n(z)\,dz$. Как и $M(x)$, эта функция будет возрастающей и выпуклой вниз на $[0, +\infty)$.

Теорема 3. *При введенных обозначениях для любых $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ справедливо так называемое неравенство Юнга*

$$ab \leqslant M(a)+N(b). \tag{5}$$

Доказательство.[1]) Легко видеть, что интеграл

$$N(b)=\int_0^b n(z)\,dz$$

можно представить[2]) в форме интеграла Стилтьеса

$$N(b)=\int_0^{n(b)} t\,dm(t).$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $m[n(b)]=b$, находим

$$N(b)=bn(b)-M[n(b)].$$

Отсюда

$$ab=bn(b)-[n(b)-a]b=M[n(b)]+N(b)-[n(b)-a]b,$$

или

$$ab=M(a)+N(b)+\left\{\int_a^{n(b)} m(t)\,dt-[n(b)-a]b\right\}.$$

Остается показать, что

$$\int_a^{n(b)} m(t)\,dt\leqslant[n(b)-a]b. \tag{6}$$

Предположим, что $a\leqslant n(b)$ [случай $a>n(b)$ аналогичен]. Так как $m(t)$ возрастает, то для $t\leqslant n(b)$ будет $m(t)\leqslant m[n(b)]=b$, откуда и следует (6).

Определение. Функции $M(x)$ и $N(x)$, заданные на $[0,+\infty)$, называются *взаимно дополнительными в смысле Юнга*, если при любых $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$ справедливо (5).

Теорема 4 (З. Бирнбаум — В. Орлич). *Если* $M(x)$ *непрерывна на* $[0,+\infty)$, $M(0)=0$, $M(x)\geqslant 0$ *при* $x>0$ *и*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{M(x)}{x}=+\infty, \tag{7}$$

то существует неотрицательная функция $N(x)$, *дополнительная к* $M(x)$ *в смысле Юнга, непрерывная на* $[0,+\infty)$, *возрастающая и выпуклая вниз.*

Доказательство. Сопоставим каждому $x\geqslant 0$ функцию

$$\varphi_x(y)=xy-M(y).$$

---

[1]) Геометрически (5) почти очевидно.

[2]) Если $m(t)$ непрерывна и строго возрастает на $[p,q]$, а $f(z)$ непрерывна на $[m(p), m(q)]$, то

$$(S)\int_p^q f[m(t)]\,dm(t)=(R)\int_{m(p)}^{m(q)} f(z)\,dz.$$

Это непосредственно следует из рассмотрения соответствующих интегральных сумм.

Очевидно, $\varphi_x(0)=0$. В силу (7) при достаточно больших y будет $\varphi_x(y)<0$. Пусть это так для $y\geqslant y_0$. На отрезке $[0, y_0]$ непрерывная функция $\varphi_x(y)$ имеет наибольшее значение, которое, очевидно, будет наибольшим и на всей полуоси $[0, +\infty)$. Обозначим это значение через $N(x)$:

$$N(x)=\max_{y\geqslant 0}[xy-M(y)]. \qquad (8)$$

Легко видеть, что $N(0)=0$. Покажем, что $N(x)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы.

Так как $N(x)\geqslant\varphi_x(0)=0$, то $N(x)$ неотрицательна. Если x закреплен, то при любом y будет $xy-M(y)\leqslant N(x)$, откуда и видно, что $N(x)$ дополнительна к $M(x)$ в смысле Юнга. Далее, для любых $x_1\geqslant 0$ и $x_2\geqslant 0$ будет

$$N\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\max\left[\frac{x_1+x_2}{2}y-M(y)\right].$$

Но

$$\frac{x_1+x_2}{2}y-M(y)=\frac{x_1y-M(y)}{2}+\frac{x_2y-M(y)}{2}\leqslant\frac{N(x_1)+N(x_2)}{2}.$$

Этим доказана выпуклость $N(x)$, а значит и непрерывность этой функции всюду, кроме $x=0$. Докажем, что и при $x=0$ функция $N(x)$ непрерывна.

В силу (7) множество (очевидно замкнутое и непустое) значений y, для которых $M(y)\leqslant y$, ограничено сверху. Пусть p его самая правая точка. Если $0<x\leqslant 1$, то для всех $y>p$ будет

$$\varphi_x(y)=xy-M(y)<xy-y\leqslant 0.$$

Стало быть, наибольшее значение $\varphi_x(y)$ принимается в такой точке y_0, что $y_0\leqslant p$. Таким образом,

$$N(x)=xy_0-M(y_0)\leqslant xy_0\leqslant px.$$

Отсюда и вытекает непрерывность $N(x)$ при $x=0$.

Остается обнаружить, что $N(x)$ возрастает. Возьмем точки $0<x_1<x_2$. Тогда

$$N(x_1)=N\left[\frac{x_2-x_1}{x_2}\cdot 0+\frac{x_1}{x_2}x_2\right]\leqslant\frac{x_2-x_1}{x_2}N(0)+\frac{x_1}{x_2}N(x_2),$$

и так как $N(0)=0$, то $N(x_1)\leqslant N(x_2)$.

Теорема доказана полностью.

Замечания. 1) Построенная при помощи формулы (8) функция $N(x)$ такова, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{N(x)}{x}=+\infty.$$

В самом деле, взяв любые n и ε, найдем такое x_0, что из $x>x_0$ следует $M(n+\varepsilon)<\varepsilon x$. Для этих x из (5) имеем

$$(n+\varepsilon)x\leqslant M(n+\varepsilon)+N(x)<\varepsilon x+N(x),$$

откуда $N(x)>nx$.

2) Теорема 4 обобщает теорему 3, ибо в условиях последней выполняется и (7). Действительно, взяв любое $A>0$, можно найти такое a, что при $t\geqslant a$ будет $m(t)\geqslant A$. Если $x>a$, то

$$\frac{M(x)}{x}>\frac{M(a)+A(x-a)}{x}. \tag{9}$$

С ростом x правая часть (9) стремится к A. Значит

$$\varliminf_{x\to+\infty}\frac{M(x)}{x}\geqslant A,$$

чем и доказано (7).

3) В теореме 4 не предполагается, что $M(x)$ выпукла и не требуется[1]), чтобы было

$$\lim_{x\to 0}\frac{M(x)}{x}=0. \tag{10}$$

Напротив, в условиях теоремы 3 будет $M(x)\leqslant xm(x)$, и (10) выполняется. Если условие $M(x)\geqslant 0$ теоремы 4 усилить, потребовав, чтобы при $x>0$ было $M(x)>0$, то можно было бы доказать, что функция $N(x)$, определенная формулой (8), удовлетворяет условию[2])

$$\lim_{x\to 0}\frac{N(x)}{x}=0. \tag{11}$$

Таким образом, $N(x)$ «лучше», чем $M(x)$.

4) Если $M(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 3, то формула (8) доставляет ту же $N(x)$, что и теорема 3. Действительно, в этом случае

$$\frac{d\varphi_x(y)}{dy}=x-m(y).$$

Корень этого уравнения есть $y=n(x)$. Стало быть,

$$N(x)=xn(x)-\int_0^{n(x)}m(t)\,dt.$$

Полагая в интеграле $m(t)=z$ и интегрируя вновь полученный интеграл по частям, получаем требуемое.

5) Применяя теорему 3 к $m(t)=t^{p-1}$ $(p>1)$, получаем неравенство Гёльдера

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\qquad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

---

[1]) Например, теорема 4 применима к функции

$$M(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2 & \text{при } 1\leqslant x<+\infty.\end{cases}$$

[2]) Без указанного усиления (11) может не иметь места.

ней
кно

(9)

не

10)

10)
ре-
ка-
во-

11)

ла
ю,

н-

а-




ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ